

Čo robiť pri DWT na okraji signálu signálu:

Ak má čo chceme?

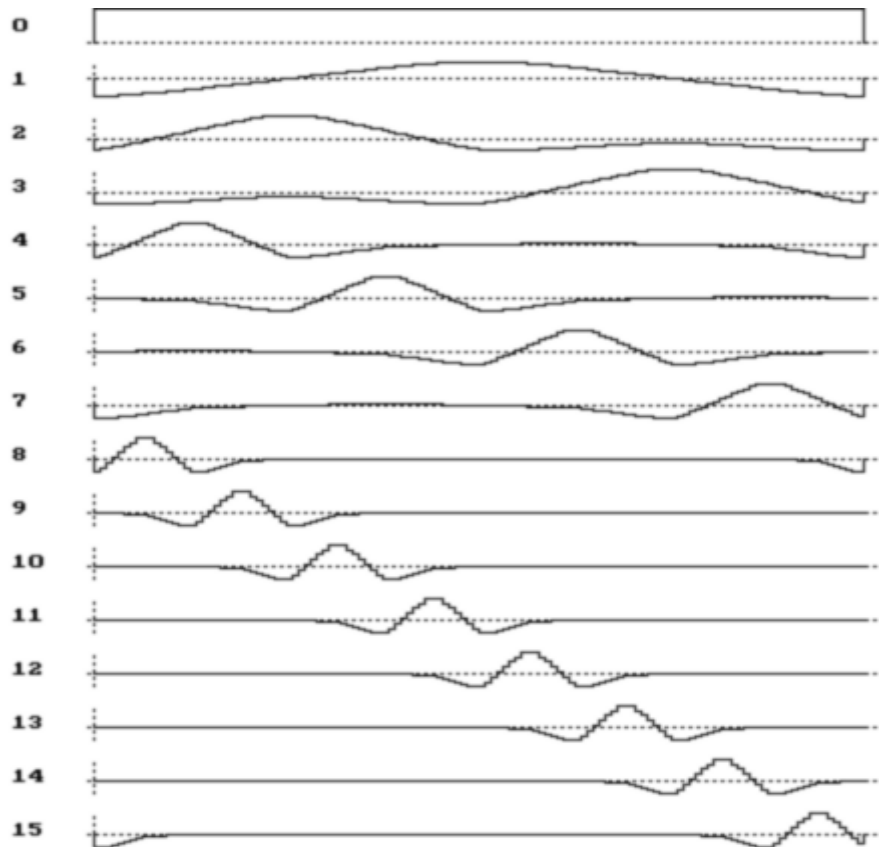
- Nadbytočnú reprezentáciu?
- Zachovať ortogonalitu ?
- Nemeniť tvar funkcií (t.j. ich vlastnosti)?

Možnosti:

1. *Doplnenie nulami* - vnáša diskontinuity na okrajoch signálu.
2. *Periodifikácia signálu* - má za následok periodifikáciu analýzy s rôznym rozlíšením (MRA), čo je v praxi implementované kruhovou konvolúciou pri filtrovaní v čase. Výsledky sú lepšie ako v 1. prípade .
3. *Symetrické rozšírenie signálu* - je podmienené použitím filtrov s lineárnou fázou , t.j. biortogonálnymi waveletmi.
4. *Priama extrapolácia*. Nepredpokladáme žiadnu symetriu, pričom okrajové hodnoty mimo hraníc signálu sa vyjadrujú pomocou transformačných koeficientov (lineárna, polynomickeá, nelineárna závislosť hraničných hodnôt).
5. *Wavelety na intervale a okrajové filtre* - Originálna definícia waveletov používa funkcie definované na celej reálnej osi. Ďalšou možnosťou je definovanie špeciálnych waveletov na intervale: tieto pozostávajú z obvyklých waveletov, ktorých podpora je úplne vnútri intervalu a špeciálnych “okrajových” waveletov. V praxi sa riešia modifikovaním $h_{mr}(n), g_{mr}(n)$ na okrajoch signálu, t.j. zavedením špeciálnych modifikovaných hraničných filtrov. Existuje celý priestor ortogonálnych riešení hraničných filtrov, t.j. je pomerne veľký stupeň voľnosti pre optimalizáciu.

Periodické rozšírenie.

- speriodifikované transformáčné matice
- speriodifikovanie bazových funkcií ("pomalšie funkcie dokonca musia meniť tvar)

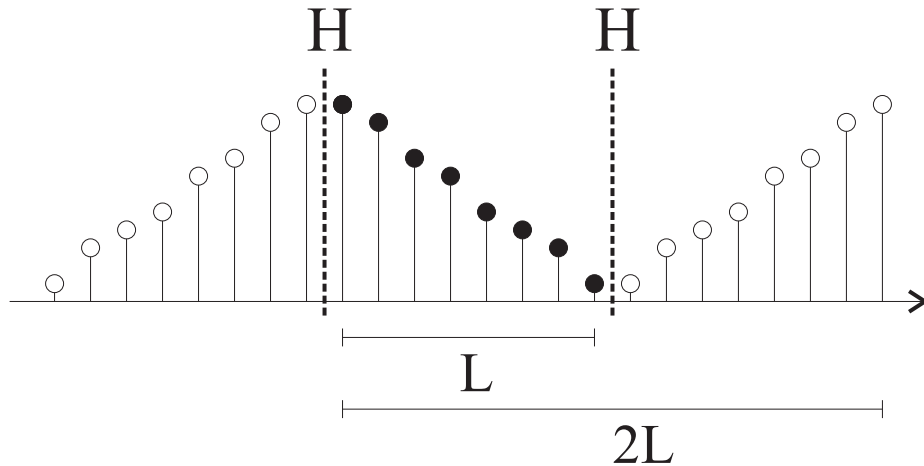


Prvých 32 bazových funkcií diskkrétnej waveletovej bázy o veľkosti $N=128$ pre FBI(9,7) wavelet

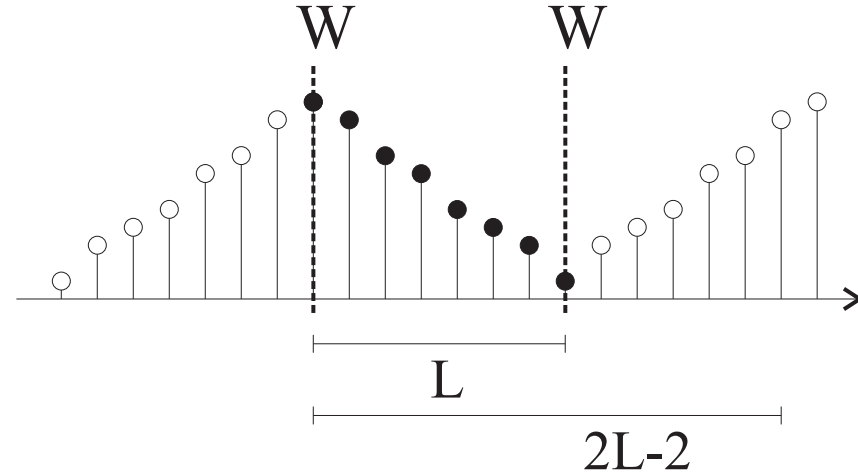
Čo sa deje ak $N \neq 2^n$?

Symetrické rozšírenie signálu

I) polbodová symetria(H)



II) celobodová symetria (W)



Pre aké filtre(sekvencie $h_{mr}(n), g_{mr}(n)$) použiť ktorú symetrizáciu?

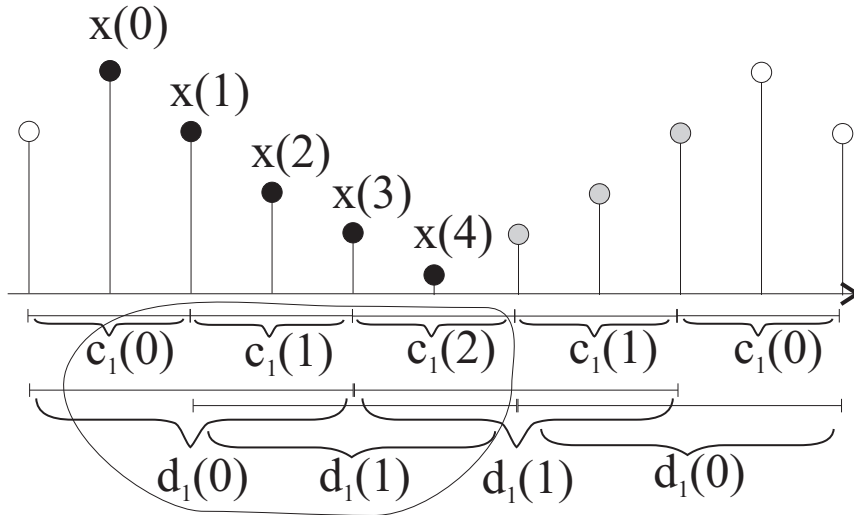
a) $h_{mr}(n), g_{mr}(n)$ majú párnú dĺžku(t.j. sami sú H symetrické) → typ H

b) $h_{mr}(n), g_{mr}(n)$ majú nepárnu dĺžku(t.j. sami sú W symetrické) → typ W

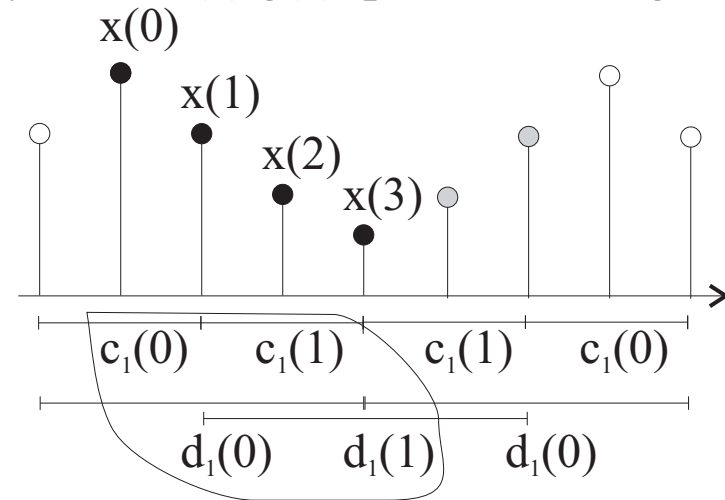
Typ symetrizácie signálu a symetria dilatačných koeficientov musí byť zhodná aby rozšírený signál po podvzorkovaní danú symetriu nestratil.

Stred filtrov a reprezentácia signálu s párnou/nepárnou dĺžkou

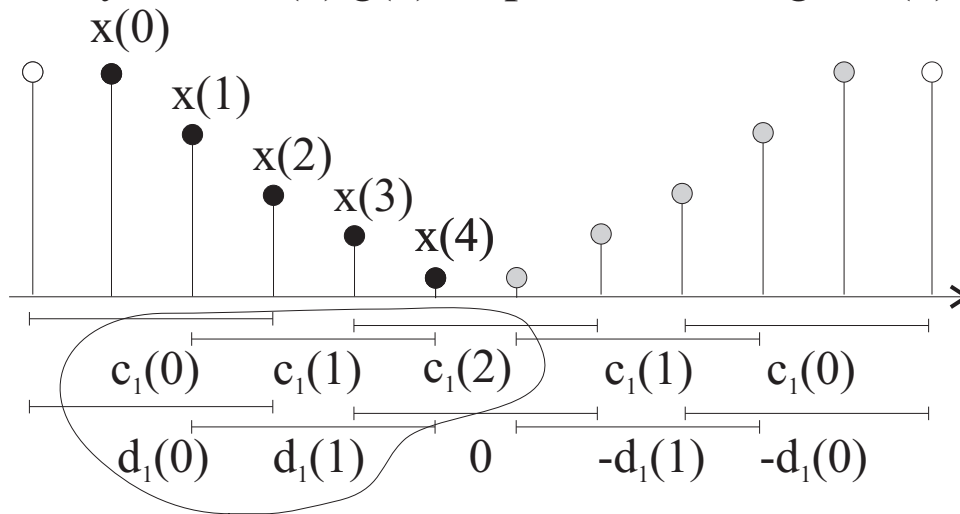
W symetria $h(n), g(n)$, **nepárna** dĺžka signálu(5)



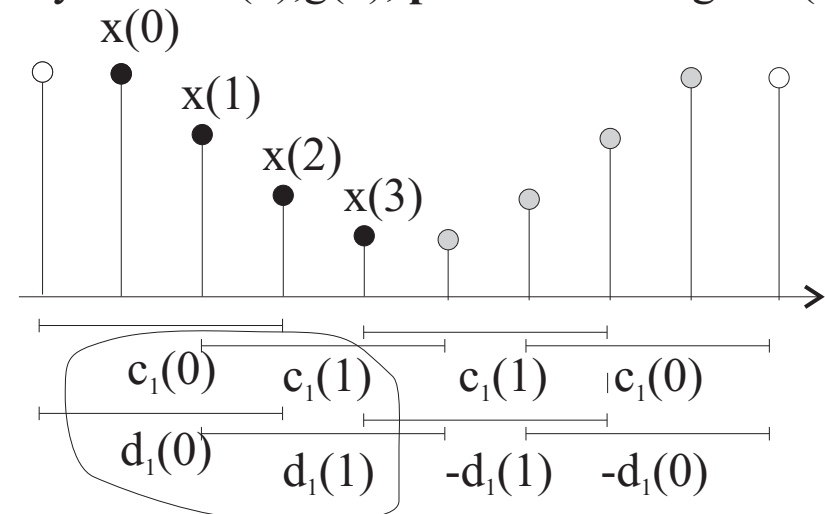
W symetria $h(n), g(n)$, **párna** dĺžka signálu(5)

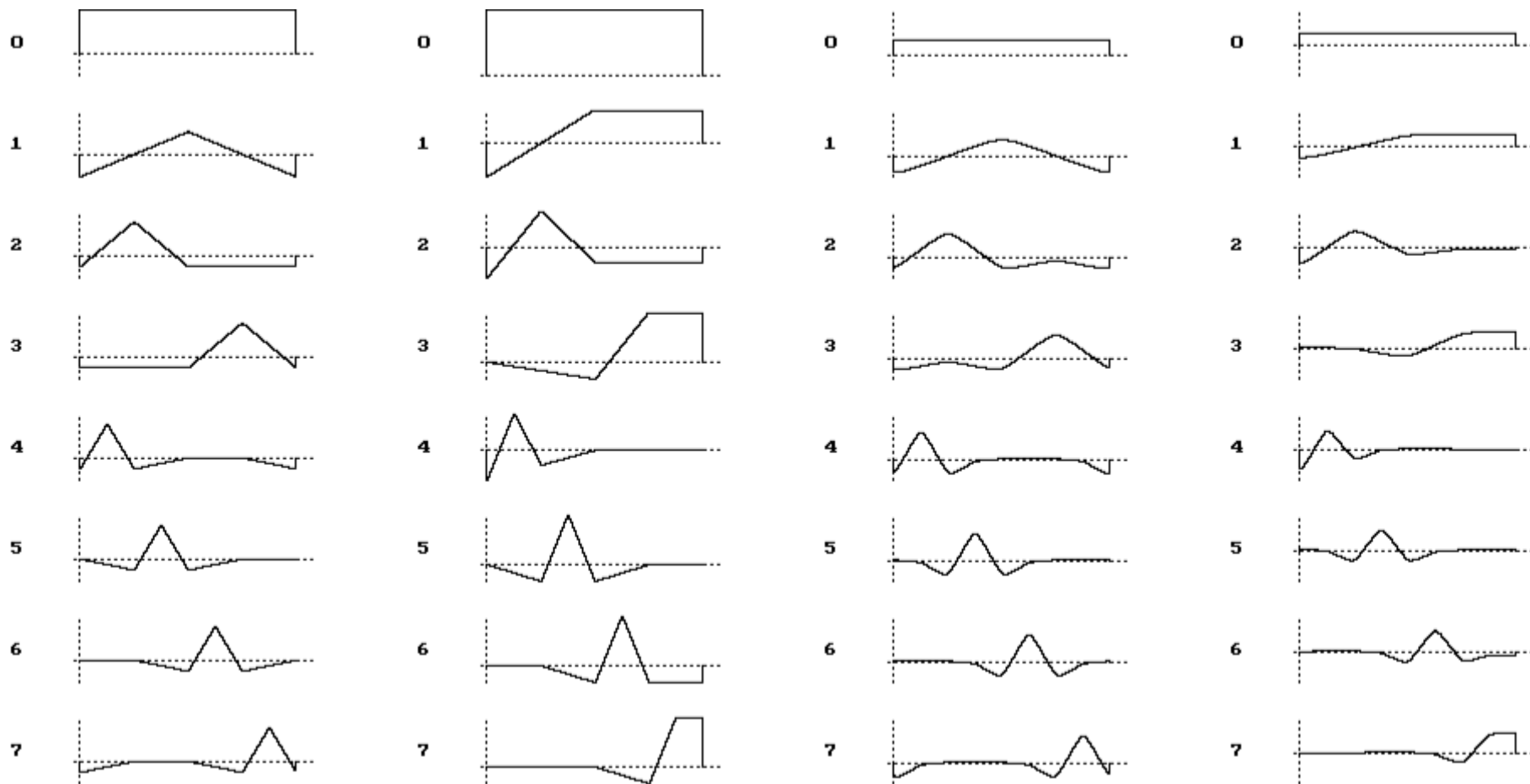


H symetria $h(n), g(n)$, **nepárna** dĺžka signálu(5)



H symetria $h(n), g(n)$, **párna** dĺžka signálu(5)





a) CDF(2,2)+PER

b) CDF(2,2) +SYM

c) FBI(9,7)+PER

d) FBI(9,7)+SYM

Porovnanie vplyvu periodického a symetrického rozšírenia na tvar báзовých funkcií 1D DWT. Zobrazených je prvých osem báзовých funkcií, veľkosť bázy je $N=128$.

Rozšírenia/zovšeobecnenia waveletov:

- wavelety na intervale
- viacrozmerné wavelety
- M-pásmové wavelety
- Multivavelety
- waveletové pakety

Viacrozmerné wavelety(1)

Triviálne, **separovateľné prípady** viacrozmerných waveletov môžeme vytvoriť pomocou tenzorového súčinu použitím 1D prototypov týmito spôsobmi [8]:

- *Štandardný prípad* — tenzorovým súčinom 1D báзовých funkcií. Výsledná 2D báza bude teda tvorená súčinmi $\varphi_{i,n}$ a $\psi_{j,n}$, $i, j, n \in \mathbb{Z}$. Napr. pri počiatočnej úrovni rozlíšenia 0 a pri U úrovniach rozkladu bude výsledkom $(U + 1)^2$ množín funkcií, pomocou ktorých bude signál reprezentovaný:

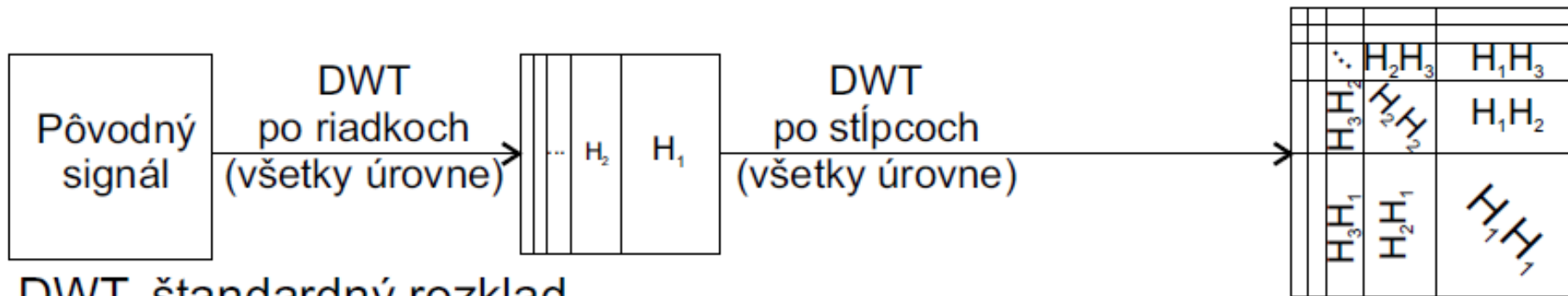
$$\begin{array}{ll} \varphi_{U,n}(x) \times \varphi_{U,n}(y) & \psi_{j,n}(x) \times \varphi_{1,n}(y) \\ \varphi_{1,n}(x) \times \psi_{i,n}(y) & \psi_{j,n}(x) \times \psi_{i,n}(y) \end{array} \quad n \in \mathbb{Z}, \quad i, j = 1 \dots U. \quad (4.8)$$

- *Neštandardný prípad* — tenzorovým súčinom analýz s viacúrovňovým rozlíšením (AVR) [18]. V 2D prípade sú potom báзовé funkcie tvorené zmenami mierky a posunmi troch základných waveletov $\psi\varphi(x, y)$, $\varphi\psi(x, y)$, $\psi\psi(x, y)$ a funkcie mierky $\varphi\varphi(x, y)$:

$$\varphi\varphi(x, y) = \varphi(x)\varphi(y) \quad \psi\varphi(x, y) = \psi(x)\varphi(y) \quad (4.9)$$

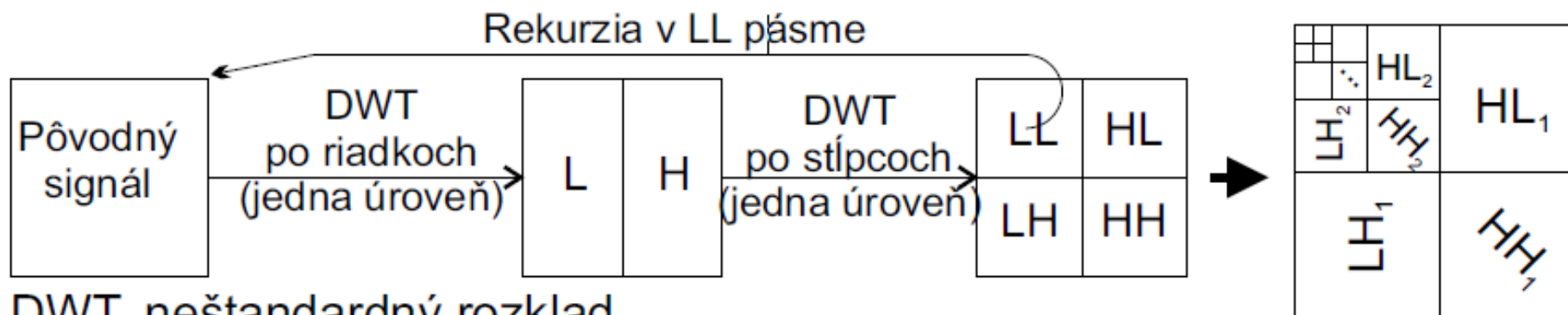
$$\varphi\psi(x, y) = \varphi(x)\psi(y) \quad \psi\psi(x, y) = \psi(x)\psi(y). \quad (4.10)$$

Viacrozmerne wavelety(2)



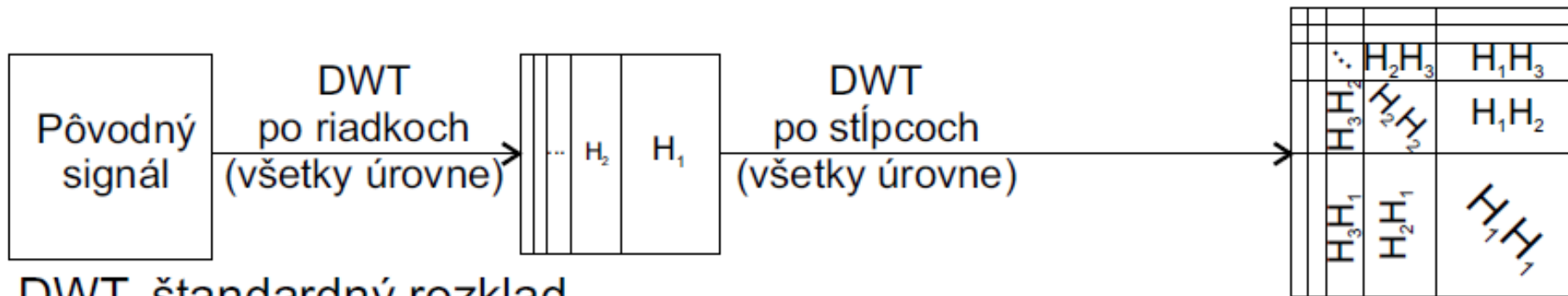
DWT, štandardný rozklad

Rozdelenie spektra do subpásiem



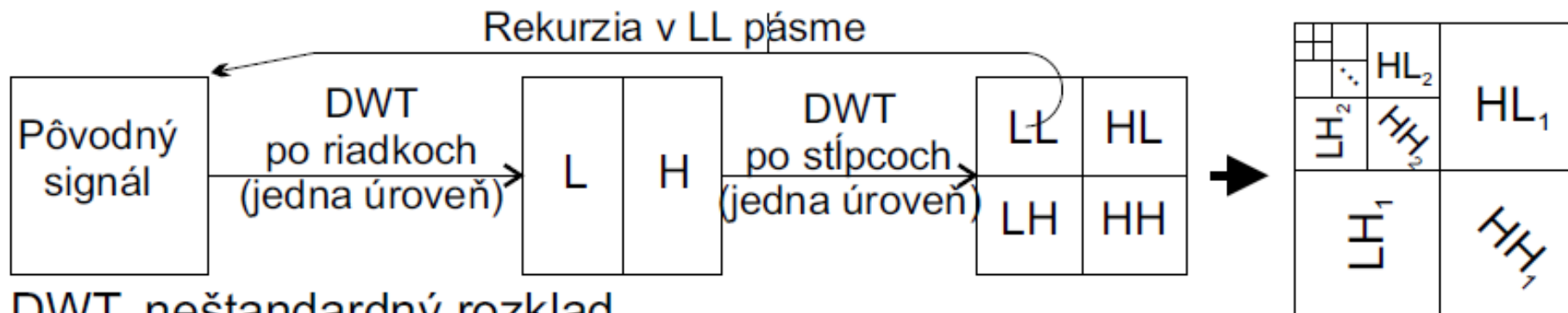
DWT, neštandardný rozklad

Viacrozmerne wavelety(3)



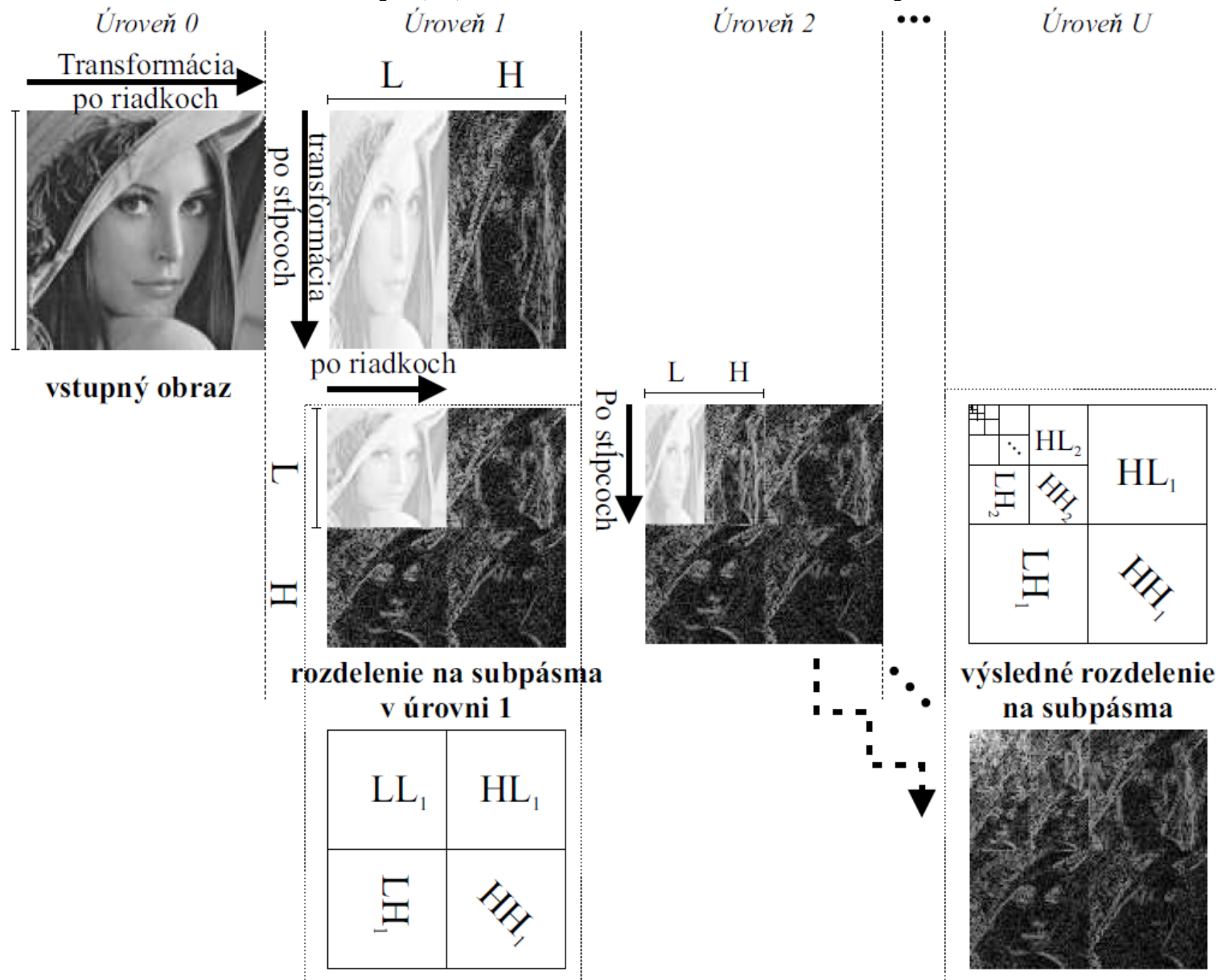
DWT, štandardný rozklad

Rozdelenie spektra do subpásiem



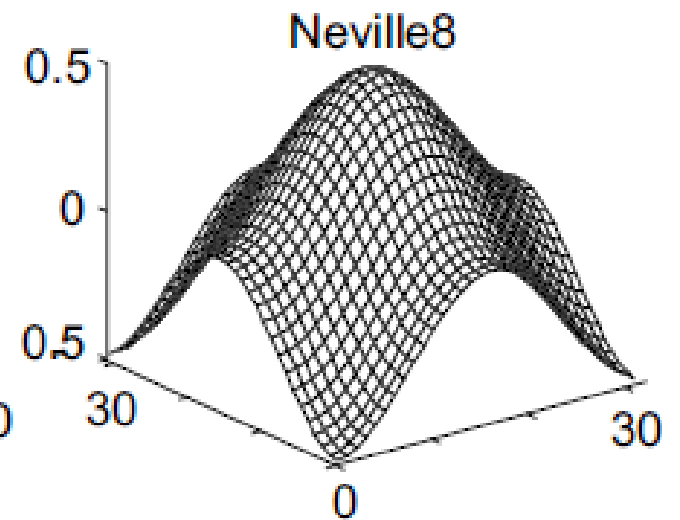
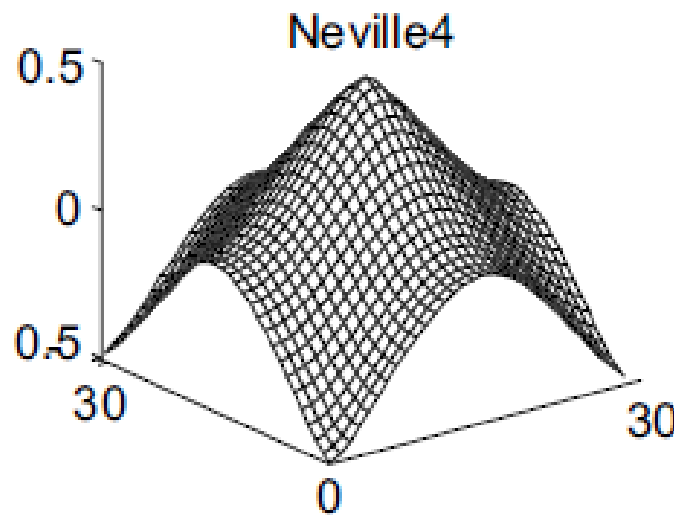
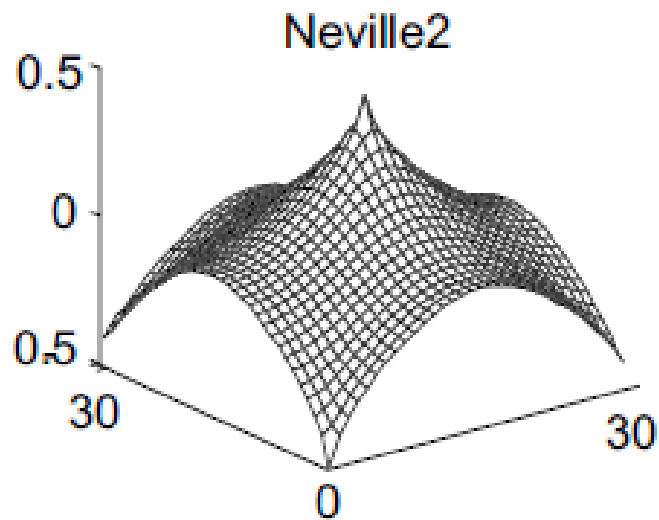
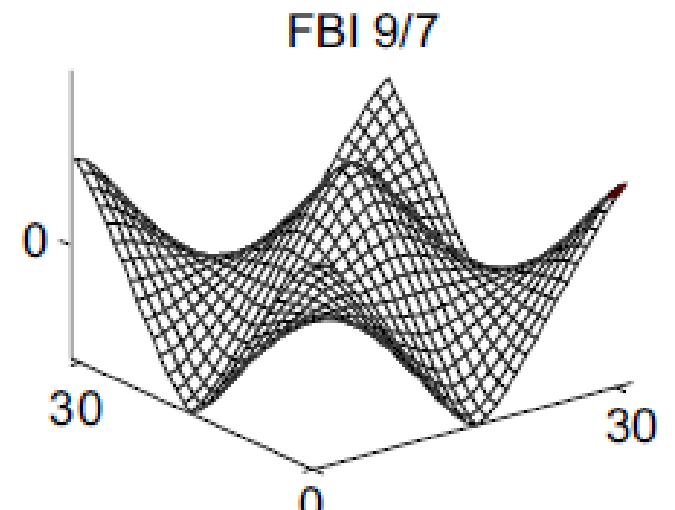
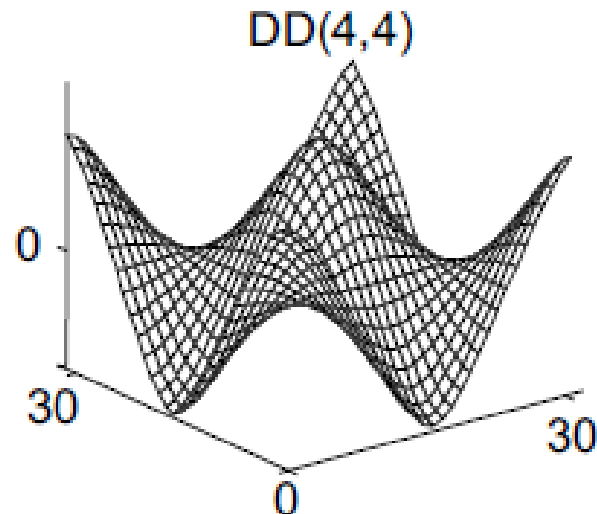
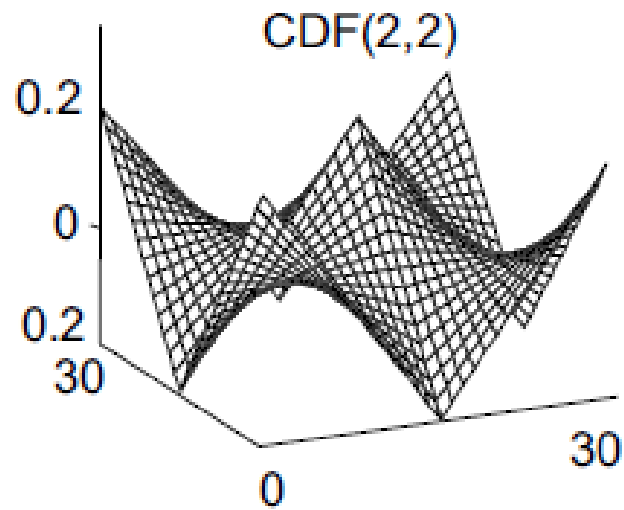
DWT, neštandardný rozklad

Viacrozmerne wavelety(4) – „neštandardný“ rozklad



Viacrozmerné wavelety(5)

separovateľné a neseparovateľné wavelety



Viacrozmerné wavelety(6)

separovateľné a neseparovateľné wavelety – aprofimácia obrazu



Originál



Aproximácia, FBI 9/7



Aproximácia, Neville8

Porovnanie aproximačných vlastností separovateľného systému s FBI 9/7 waveletom a neseparovateľného systému s Nevillovými waveletmi 8.rádu. Výsledky sú zobrazené pri zachovaní 1/800 pôvodnej informácie a použití kompresného algoritmu SPIHT.

M-pásmové wavelety

Doteraz bolo:

- báza V_m tvorená množinou $\{\varphi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \varphi(2^{-m}t - n), n \in \mathbb{Z}\}$
- dilatačná rovnica pre $\varphi(t)$: $\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n) \varphi(2t - n)$

Zovšeobecnením je:

$$\varphi(t) = \sqrt{M} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n) \varphi(Mt - n) \quad M \in \mathbb{Z}, \quad M > 2$$

Čo platí pre $h_{mr}(n)$ ak báza tvorená pomocou $\varphi(t)$ je ortonormálna?

Označme $h_{mr}(n) = h(n)$. Analogicky ako pri vlastnostiach ortonormálnych DWT platí:

$$\sum_n h(n) = \sqrt{M}$$

$$\sum_n h(Mn + m) = 1 / \sqrt{M}$$

$$H(2\pi l / M) = 0 \quad l = 0, 1, \dots, M-1$$

$$\sum_n h(n + Mm) h(n) = \delta(m) \quad \text{resp.} \quad \sum_n h(n)^2 = 1$$

$$\Rightarrow |H(\omega)|^2 + |H(\omega + 2\pi / M)|^2 + \dots + |H(\omega + 2\pi(M-1) / M)|^2 = M$$

atď...

A čo je s waveletmi ???

Nemáme jediný wavelet, ale *M-1 waveletov* $\psi_l(t)$:

$$\psi_l(t) = \sqrt{M} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_l(n) \phi(Mt - n) \quad l = 0, 1, \dots, M-1$$

Čomu na každej úrovni rozlíšenia odpovedá *M-1 diferenčných priestorov* $W_{m,l}$.
T.j. pre MRA platí?

$$V_m = V_{m+1} \oplus W_{m+1,1} \oplus W_{m+1,2} \oplus \dots \oplus W_{m+1,M-1}$$

Wavelety sú *ortogonálne* k funkcii mierky, t.j. :

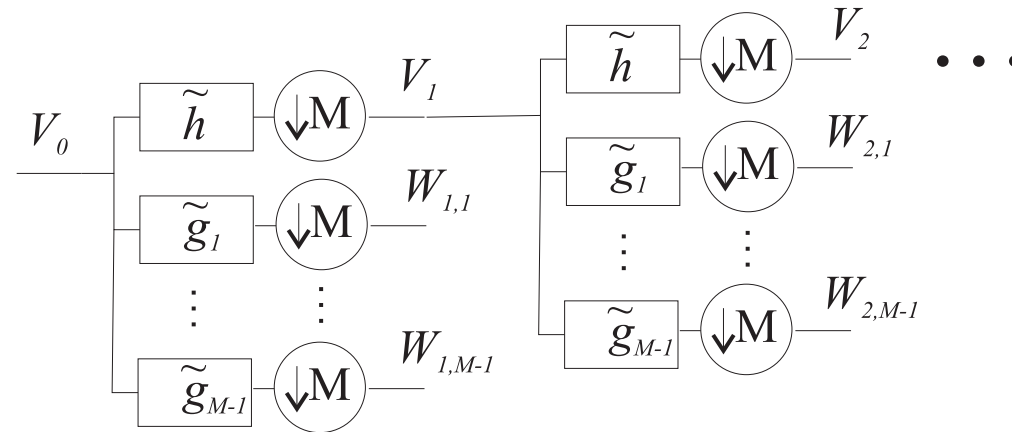
$$\int \phi(t - n) \psi_l(t - m) = 0 \quad \sum_n h(n) g_l(n - Mk) = 0 \quad l = 0, 1, \dots, M-1$$

Čo sme vlastne získali?

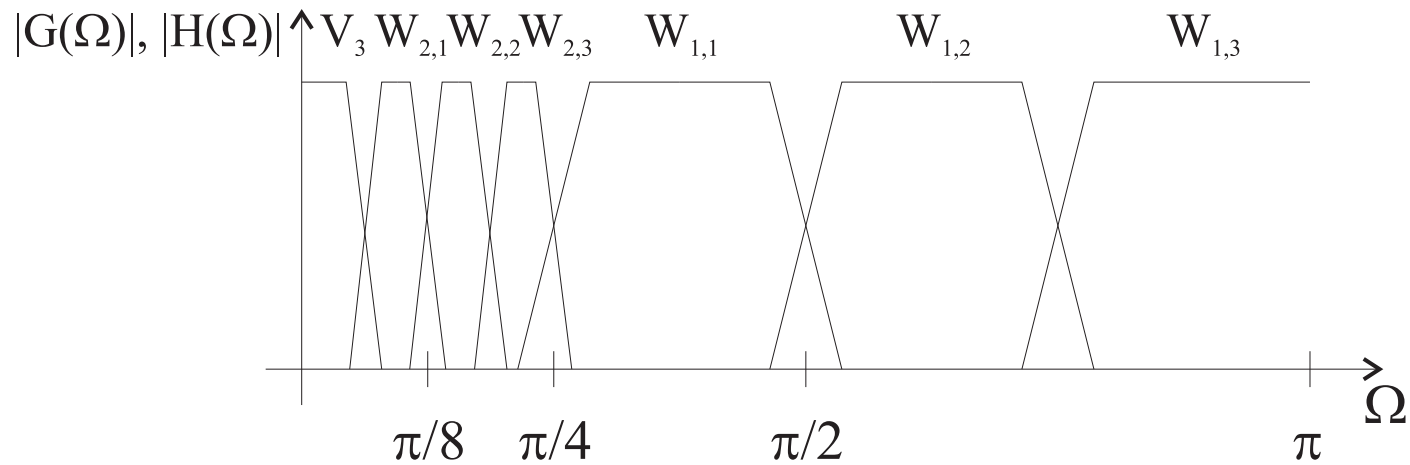
- Stupne voľnosti – je veľa rôznych ortogonálnych waveletov k danej funkcii mierky
- Časovo-frekvenčnú rovinu môžeme deliť lineárne aj logaritmicky (mix oboch)
- Čisto logaritmické delenie je ekvivalentné *M-adickým waveletom*, t.j. máme iba jeden wavelet (M-1 waveletov je rovnakých) s hustejšou vzorkovacou mriežkou

Ako vypočítame M-pasmovú DWT ?

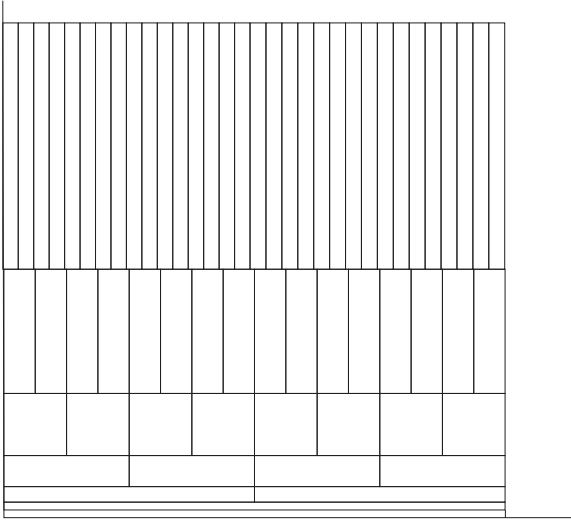
M-pásmovou bankou filtrov:



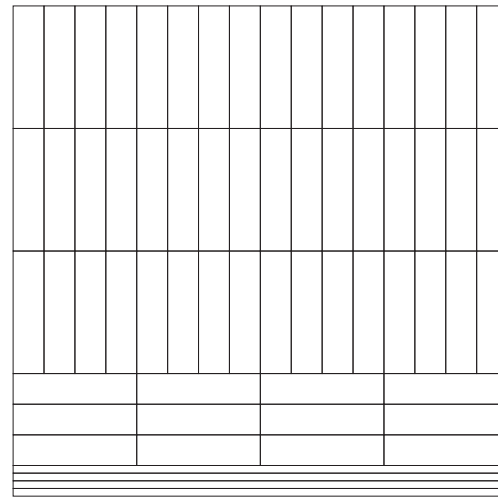
Príklad rozdelenia subpásiem pre 4-pasmovú DWT



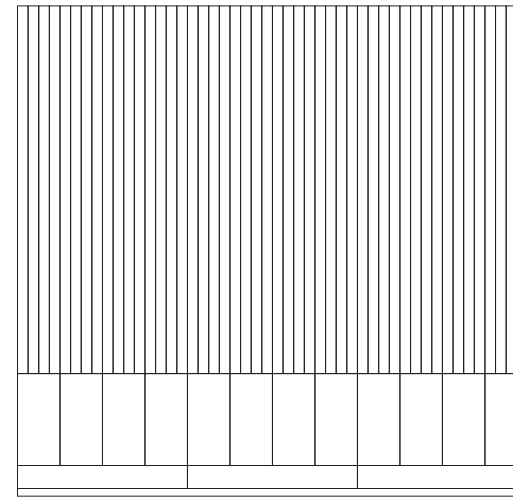
Spôsob delenia časovo-frekvenčnej roviny



Dyadická DWT



4-pásmová DWT, 3
odlišné wavelety,
ktoré zaberajú rôzne
oblasti vo frekvencii

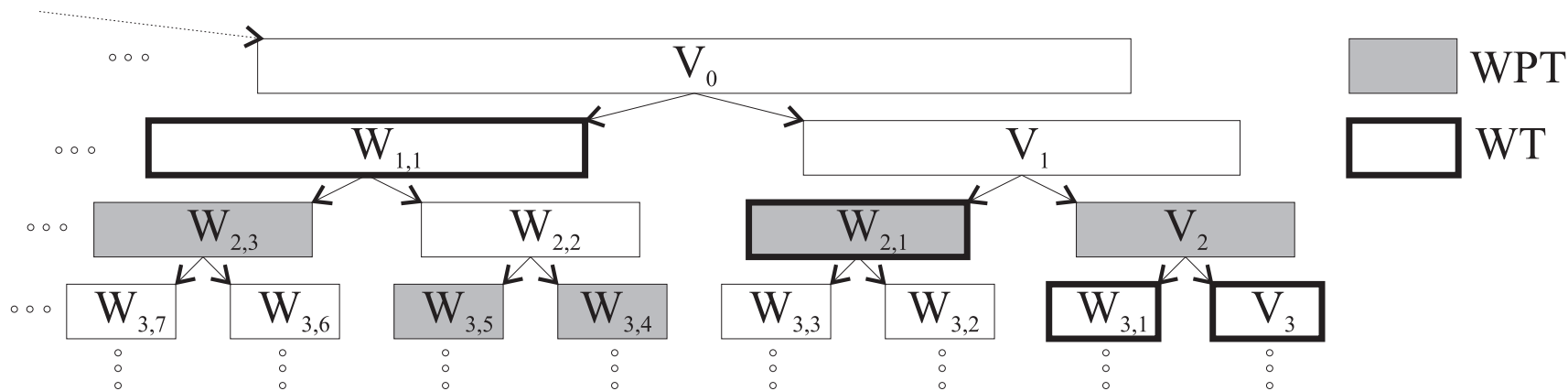


4-pásmová DWT,
špeciálny prípad ,
3 x rovnaký wavet
=
4-adická DWT

Waveletové pakety

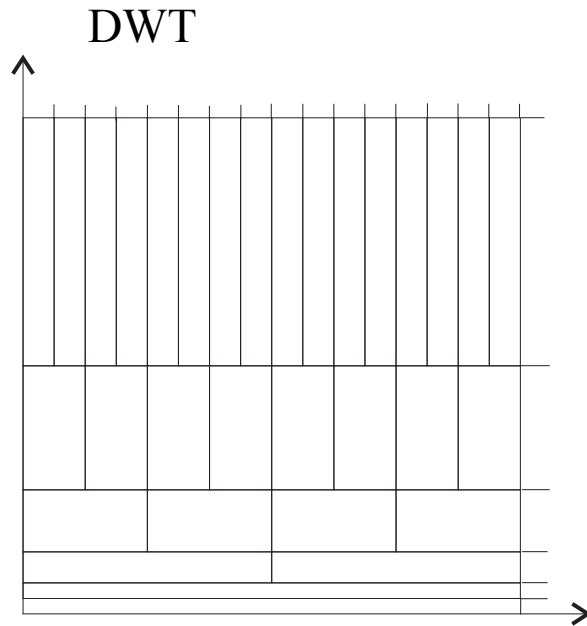
- v klasickom prípade waveletov rozkladáme v MRA iba sumačné podpriestory V_m
- waveletové pakety rozklad zovšeobecňujú aj na diferenčné priestory W_m
- sú možným rozšírením všetkých doteraz uvedených typov waveletov
- umožňujú adaptívnu, podrobnejšiu a flexibilnejšiu analýzu signálov

Výpočet Waveletovej paketovej transformácie(WPT) – v MRA je dovolené deliť aj diferenčné popriestory, nielen sumačné:

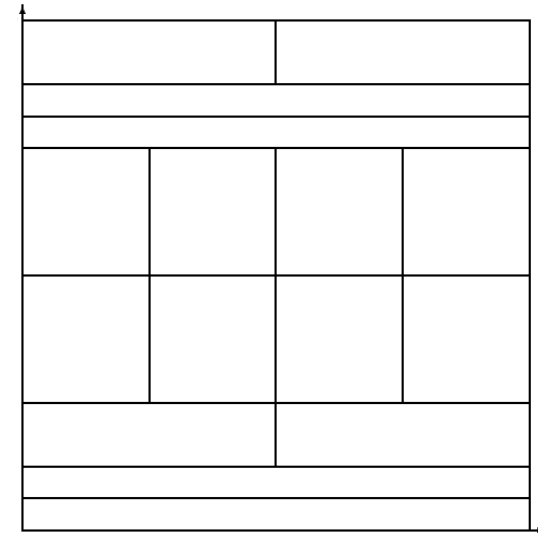


Vzniká kompletný waveletový paketový strom. Reprezentácia kompletným stromom je *redundantná* - stačí použiť iba *vhodnú časť stromu*.

Delenie priestorov odpovedá aj deleniu časovo-frekvenčnej roviny



WPT (príklad)



WPT umožňuje *adaptívne* resp. optimalizované delenie podpriestorov = delenie časovo-frekvenčnej roviny = použitie istej časti kompletného waveletového paketového stromu.

Ktorú časť stromu použiť – ako čo najlepšie reprezentovať signál ?

Výber najvhodnejšej stromovej štruktúry je ekvivalentný s *hľadaním najlepšej bázy*.

Najbežnejšie kritériá pre výber najlepšej reprezentácie signálu, formované pomocou tzv. *nákladovej funkcie* λ sú:

- minimalizácia entropie reprezentácie signálu (Wickerhauser, Coifman)
- minimalizácia počtu bitov reprezentácie signálu a skreslenia pri danej množine kvantizátorov

Koľko je možných báz?

Ak dĺžka signálu je N , potom pre α , počet možných WPT báz platí:

$$\alpha \geq 2^{N/2}$$

Ako teda vyberať najlepšiu bázu?

Najjednoduchšie je rozhodovať sa priamo počas rozkladov, t.j. rozhodovať sa, či ďalší rozklad prevedieme, alebo nie.

Aké kritérium použiť?

Rozhodujeme sa, podľa toho či *náklady po rozdelení budú väčšie ako pred rozdelením*. Kritériom musí byť taká nákladová funkcia, ktorej aditivita sa rozkladom pri DWT zachováva (napríklad entropia).

Príkladom je napr. Shannonova entrópia E zo signálu $s(n)$, pre ktorú

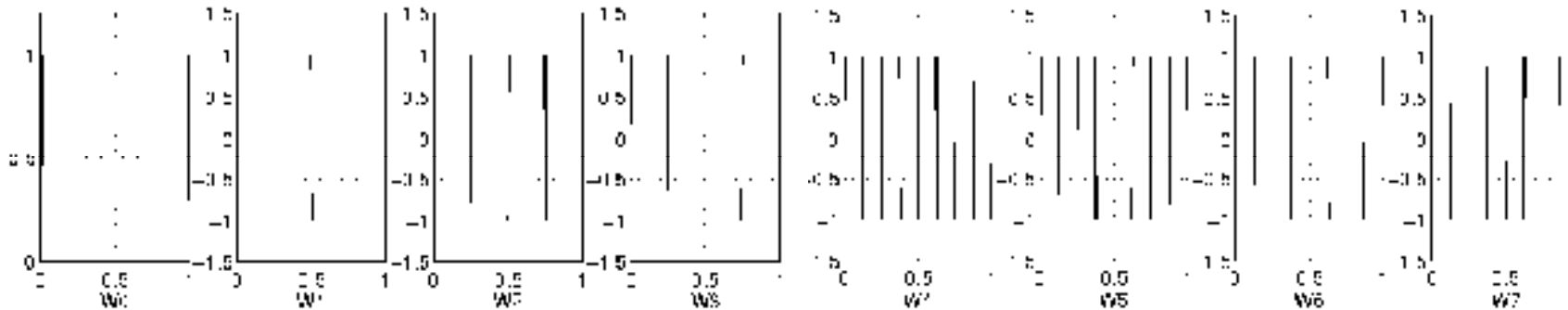
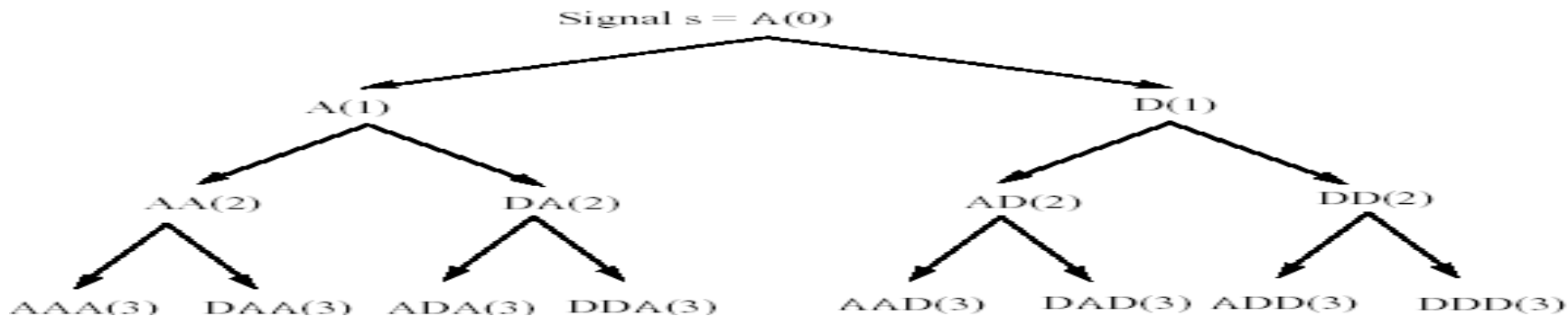
$$E(s) = - \sum_n s(n)^2 \log[s(n)^2]$$

s konvenciou $0 \log(0) = 0$.

Kritérium teda je:

Ak suma Shannonových entropií 2 subpásiem, ktoré vznikli rozdelením pôvodného subpásma, je menšia ako entropia pôvodného subpásma, je výhodné rozdelenie uskutočniť.

Ako vyzerajú bázové funkcie pri úplnom rozklade pre Haarovu WPT?



Počet prechodov nulou je:

2 3 5 4 9 8 6 7

T.j. frekvenčné pásma odpovedajúce jednotlivým priestorom nemajú vzostupný charakter, sú poprehadzované, ich poradie je:

0 1 3 2 7 6 4 5

= analogicky ako pri *Walshovej transformácii v Palleyho poradí*, t.j. nie v sekvenčnom.

Chceme zobrazit' frekvenčný obsah v prirodzenom poradí ? → *koeficienty preusporiadať*

