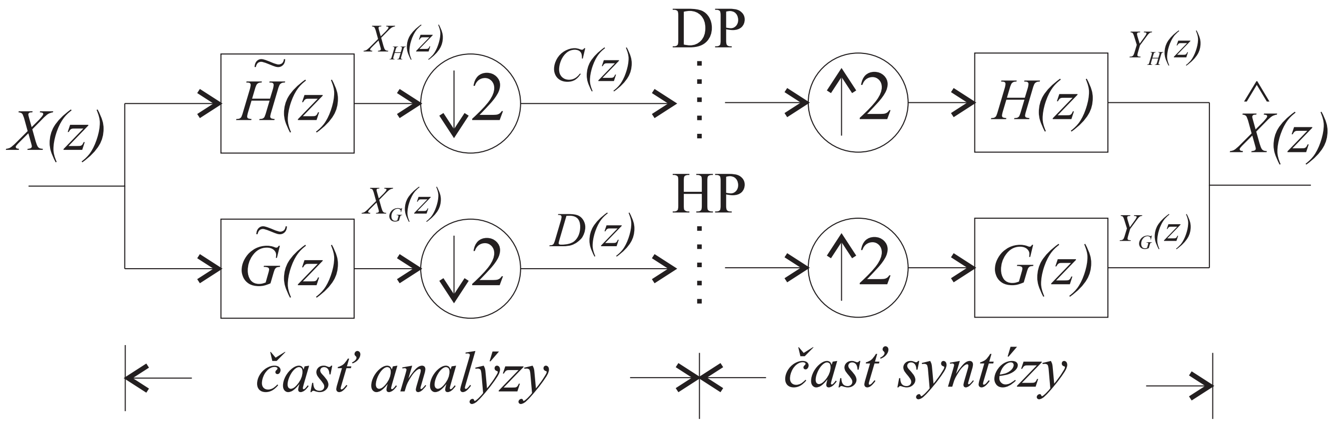
Dvojpásmové banky filtrov



Platí(V1):

$$c(n)=\sum_k \widetilde{h}(2n-k)x(k) \qquad d(n)=\sum_k \widetilde{g}(n-2k)x(k)$$

$$\hat{x}(n)=\sum_k h(n-2k)c(k)+\sum_k g(n-2k)d(k)$$

DWT(V2):

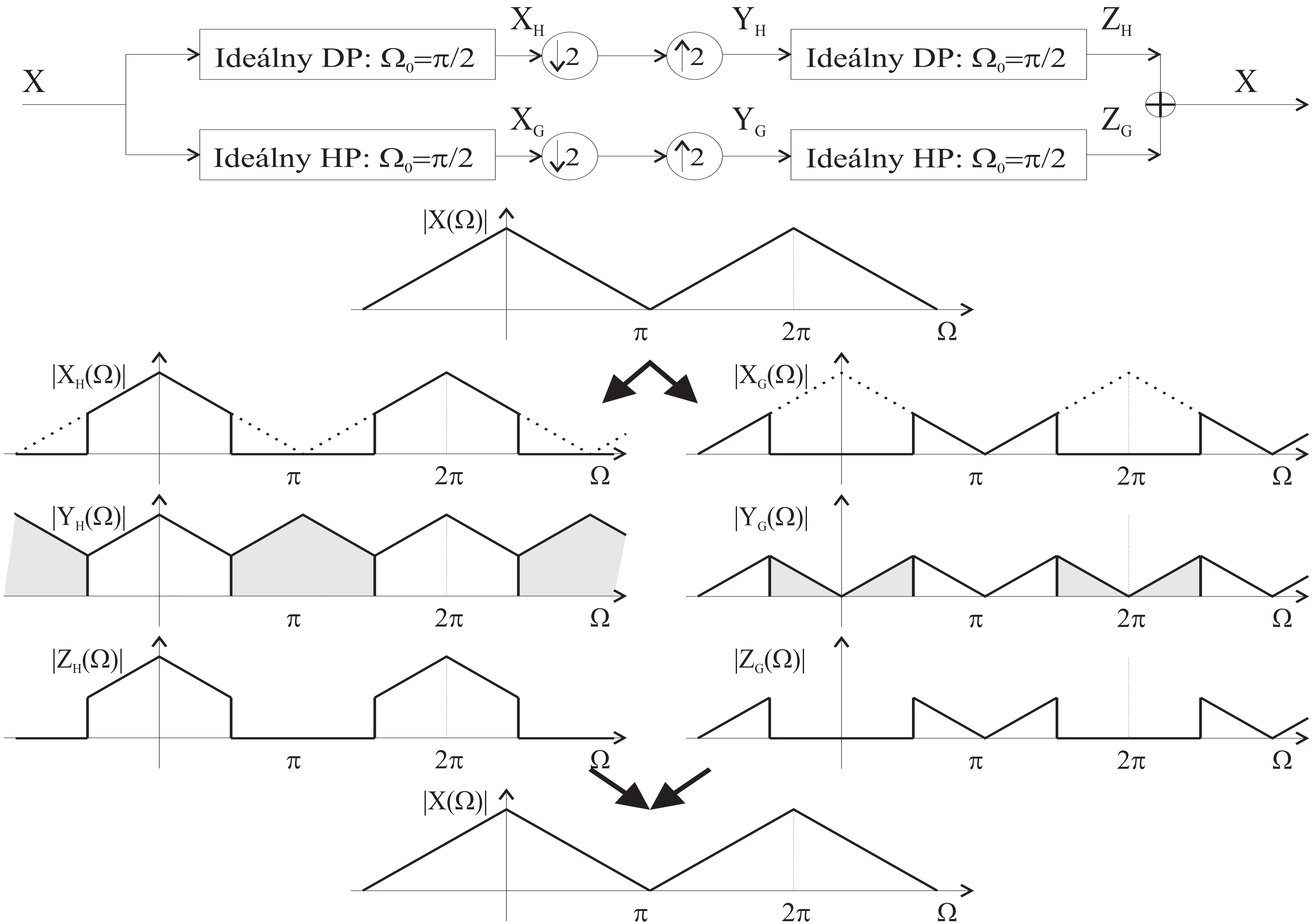
$$c_{m+1}(n)=\sum_k \widetilde{h}_{mr}(k-2n)c_m(k) \qquad d_{m+1}(n)=\sum_k \widetilde{g}_{mr}(k-2n)c_m(k)$$

$$c_m(n)=\sum_k h_{mr}(n-2k)c_{m+1}(k)+\sum_k g_{mr}(n-2k)d_{m+1}(k)$$

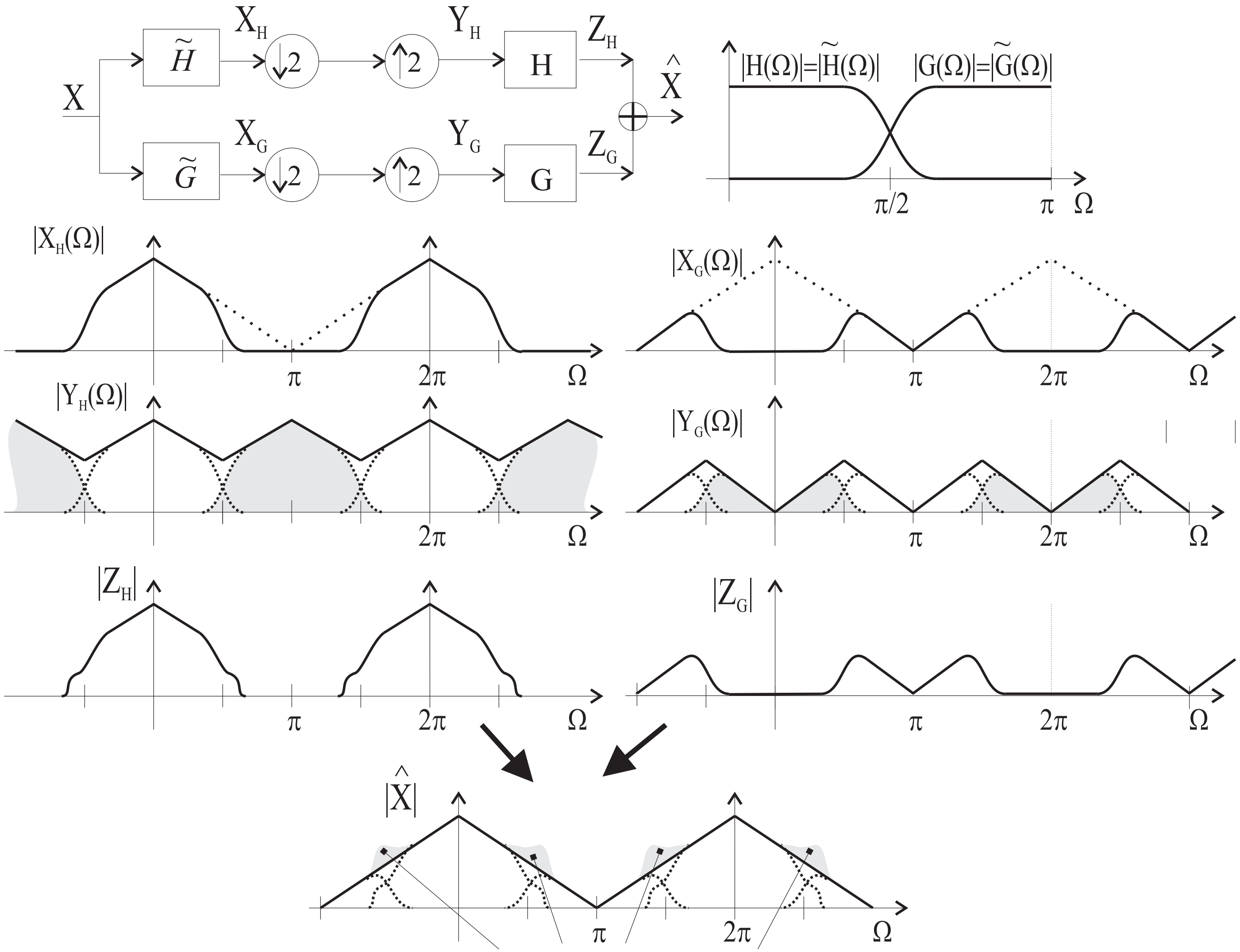
T.J.AK PLATÍ $\widetilde{h}(n)=\widetilde{h}_{mr}(-n)$ $\quad h(n)=h_{mr}(n)$

$\widetilde{g}(n)=\widetilde{g}_{mr}(-n)$ $\quad g(n)=g_{mr}(n)$ SÚ V1 a V2 TOTOŽNÉ !!!

Ako dosiahneme úplnú rekonštrukciu?



Ak filtre nie su ideálne?



Pri úplnej rekonštrukcii sa aliasing z DP a HP časti navzájom eliminuje

Polpásmový filter

Polpásmový filter s prenosovou funkciou $P(z)$ je FIR filter pre ktorý platí:

$$P(z) = P(z^{-1}) \qquad\qquad P(z) + P(-z) = 2$$

resp.

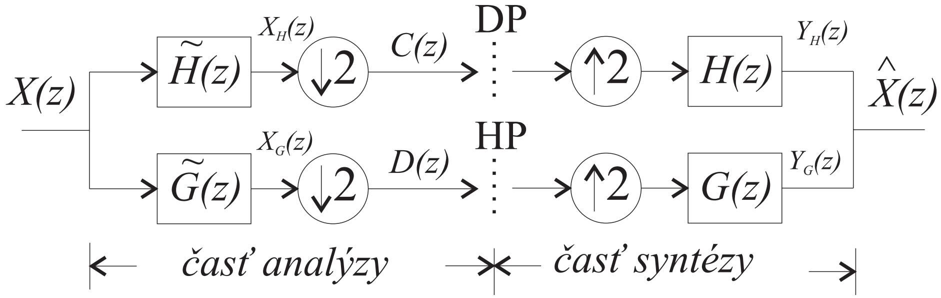
$$P(e^{j\Omega}) = P(e^{-j\Omega}) \qquad\qquad P(e^{j\Omega}) + P(e^{j(\pi-\Omega)}) = 2$$

$$p(n) = p(-n) \qquad\qquad p(n) + (-1)^n p(n) = 2\delta(n)$$

T.j $P(e^{j\Omega})$ je reálna párna funkcia Ω s nepárnou symetriou okolo bodu $[\pi/2, 1]$ a pre odpovedajúcu impulzovú charakteristiku $p(n)$ platí:

$$p(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \ je \ párne \\ p(n) & ináč \end{cases}$$

Podmienky na úplnú rekonštrukciu pre dvojpásmovú banku filtrov



Popisom signálov v oboch vetvách FB dostávame:

$$X_H(z) = X(z)\tilde{H}(z) \qquad X_G(z) = X(z)\tilde{G}(z)$$

$$C(z) = \frac{1}{2}\left[X_H\left(z^{\frac{1}{2}}\right) + X_H\left(-z^{\frac{1}{2}}\right)\right] \qquad D(z) = \frac{1}{2}\left[X_G\left(z^{\frac{1}{2}}\right) + X_G\left(-z^{\frac{1}{2}}\right)\right]$$

$$Y_H(z) = C\left(z^2\right)H(z) \qquad Y_G(z) = D\left(z^2\right)G(z)$$

$$\hat{X}(z) = Y_H(z) + Y_G(z) = \ldots = \frac{1}{2}\left[R_p(z)X(z) + R_a(z)X(-z)\right]$$

$R_p(z)$ charakterizuje celkový prenos sústavou a $R_a(z)$ aliasing

$$R_p(z) = \tilde{H}(z)H(z) + \tilde{G}(z)G(z) \qquad R_a(z) = \tilde{H}(-z)H(z) + \tilde{G}(-z)G(z)$$

Postačujúce podmienky na úplnú rekonštrukciu sú:

1) eliminácia aliasingu $R_a(z)=0$, $\forall z$

2) prenos je nanajvýš oneskorením $R_p(z)=2z^{-l}$, $l \in Z$

Riešením 1. podmienky - eliminácie aliasingu dostaneme napr.:

$$H(z)=\pm cz^m \widetilde{G}(-z) \qquad G(z)=\mp cz^m \widetilde{H}(-z), \; m \in Z$$

Pri riešení 2. podmienky označme

$$P_H(z)=\tilde{H}(z)H(z)$$

Vyjadrime $R_p(z)=\widetilde{H}(z)H(z)+\widetilde{G}(z)G(z)$ pomocou riešenia 1v závislosti od $P_H(z)$:

$$P_H(z)+P_H(-z)(-1)^l=2z^{-l}$$

Normovaním (centrovaním) $P_H(z)$ pomocou $P(z)=z^l P_H(z)$ dostaneme:

$$P(z)+P(-z)(-1)^{m+l+1}=2$$

Kde

$$P(z)=z^l \tilde{H}(z)H(z) \qquad P(-z)=z^l \tilde{G}(z)G(z)$$

T.j. všeobecné riešenie podmienky 2 možno formulovať:

Ak normovaný súčin prenosových funkcií DP filtrov v dvojpásmovej banke filtrov tvorí prenosovú funkciu polpásmového filtra a súčet* m+l *je nepárny, potom banka filtrov dosahuje úplnú rekonštrukciu.

Ak chceme sústavu s nulovým oneskorením platia nasledovné tvary vzťahov pre elimináciu aliasingu:

$$H(z) = z^{2k-1}\widetilde{G}(-z) \qquad G(z) = -z^{2k-1}\widetilde{H}(-z)$$

Energeticky komplementárne filtre

Filtre s $H(z)$ a $G(z)$ sú *energeticky komplementárne* ak platí:

$$\left|H\left(e^{j\Omega}\right)\right|^2 + \left|G\left(e^{j\Omega}\right)\right|^2 = 2$$

Riešenie vo forme kvadratúrnych zrkadlových filtrov(QMF)

Kvadratúrne zrkadlové filtre(QMF) boli v o BF prvýkrát použité v r.1977 (Esteban, Galand) voľbou:

$$H(z)=\widetilde{H}(z) \qquad \widetilde{G}(z)=\widetilde{H}(-z) \qquad G(z)=-\widetilde{H}(-z)$$

Aliasing je odstránený, avšak takáto BF podmienku na prenos iba aproximuje, t.j. nedosahuje úplnú rekonštrukciu okrem trivialneho Haarovho prípadu. Názov kvadratúrne zrkadlové filtre pochádza z vlastnosti, že $\widetilde{H}(z)$ a $\widetilde{G}(z)$ majú zrkadlové prenosové funkcie okolo $\Omega=\pi/2$, pričom sú energeticky komplementárne.

Ortogonálne (paraunitárne) riešenie

Nech $H_0(z)$ je prenosová funkcia a $h_0(n)$ impulzová charakteristika (párnej dĺžky $N = 2l$, $l \in Z$ prototypového DP FIR filtra. Potom BF z neho odvodená vzťahmi:

$$\tilde{H}(z) = H_0(z) \qquad H(z) = \pm z^{2l-1}\tilde{G}(-z) = \tilde{H}(z^{-1})$$

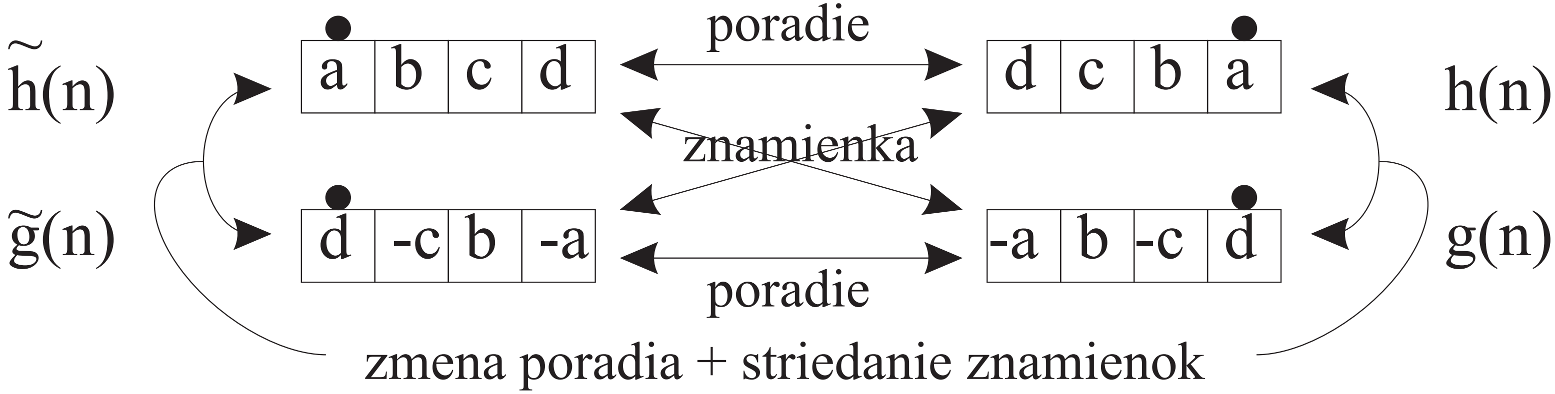
$$\tilde{G}(z) = \mp z^{-(2l-1)}\tilde{H}(-z^{-1}) \qquad G(z) = \mp z^{2l-1}\tilde{H}(-z) = \tilde{G}(z^{-1})$$

dosahuje úplnú rekonštrukciu za podmienky, že pre $h_0(n)$ platí:

$$\sum_n h_0(n) h_0(n-2k) = \delta(k) \qquad \sum_n h_0(n) = \sqrt{2}$$

Pre takéto riešenie platí:

- má *nulové oneskorenie* avšak sú tu *nekauzálne časti* - ***filtre pre analýzu a syntézu v oboch vetvách majú impulzové charakteristiky časovo obrátené.***
- Oneskorením nekauzálnych filtrov filtrov (vynásobením členom $z^{-(2l-1)}$) dostaneme kauzálnu BF s oneskorením $2l-1$.
- filtre pre analýzu (a analogicky aj pre syntézu) sú ortogonálne navzájom a aj voči svojim párnym posunom.



Príklad impulzových charakteristík filtrov v ortogonálnej FB s nulovým oneskorením. Bodkou sú označené koeficieny v n=0.

Poznámka: Ak sústavu začneme navrhovať od syntézy, t.j. $H(z) = H_0(z)$, výsledkom je zámena analyzačnej a syntetizačnej časti FB, t.j. vo vzťahoch na výpočet filtrov sa zamení označenie duálnosti.

Úvaha: Prečo musia byť filtre $H(z) = \tilde{H}(z^{-1})$, $G(z) = \tilde{G}(z^{-1})$ takto časovo otočené ?

➔Lebo ináč nemôžu formovať polpásmový filter, $p(n)$ by nebolo symetrické.

Biortogonálne riešenie

Biortogonálne riešenie umožňuje návrh 2-kanálových bánk filtrov s FIR filtrami s *lineárnou fázou* a *rôznymi dĺžkami impulzovej charakteristiky* filtrov pri analýze a syntéze. Aliasing musí byť nulový:

$$H(z) = \pm z^m \widetilde{G}(-z) \qquad G(z) = \mp z^m \widetilde{H}(-z), \quad m \in Z$$

Filtre v jednotlivých vetvách musia formovať polpásmové filter:

$$P(z) = \widetilde{H}(z) H(z) \qquad P(-z) = \widetilde{G}(z) G(z)$$

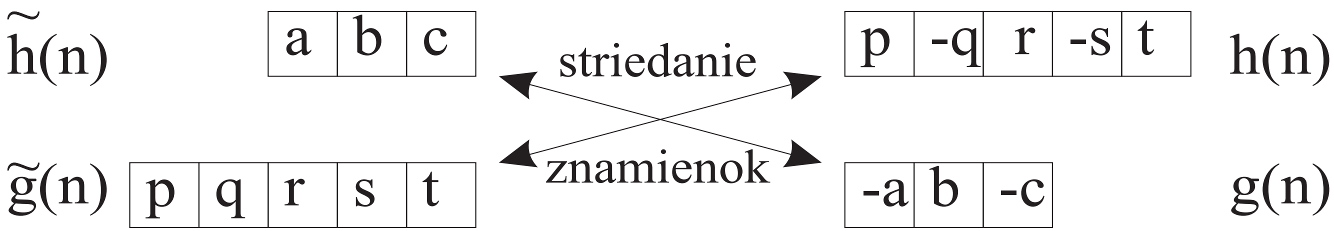
Sú možné tieto tvary riešení(formulované pre analyzačné filtre):

1) oba filtre sú symetrické, nepárnych dĺžok líšiacich sa o nepárny násobok 2
2) jeden filter je symetrický, druhý antisymetrický, oba párnych dĺžok líšiacich sa o párny násobok 2
3) jeden filter je nepárnej, druhý párnej dĺžky, oba majú nuly iba na jednotkovej kružnici. Oba sú symetrické alebo jeden je symetrický a druhý antisymetrický.

Filtre spĺňajú podmienky biortogonality, t.j. sú ortogonálne k párnym posunom svojich duálov a ortogonálne navzájom „nakríž“:

$$\sum_k h(k)\tilde{h}(2n-k)=\delta(k) \qquad \sum_k g(k)\tilde{g}(2n-k)=\delta(k)$$

$$\sum_k g(k+2m)\tilde{h}(2n-k)=\delta(k) \qquad \sum_k h(k+2m)\tilde{g}(2n-k)=\delta(k)$$



Príklad impulzových charakteristík filtrov v biortogonálnej FB so symetrickými filtrami.

Riešenie filtrov	analýza	syntéza
symetrické	$\tilde{h}(n)$=(1, 2, 1) $\tilde{g}(n)$=(-1, -2, 6, -2, -1)	$h(n)$=(-1, 2, 6, 2, -1) $g(n)$=(-1, 2, -1)
Antisymetrické (Kvadratický spline, rbio2.2)	$\tilde{h}(n)$=(1, 3, 3, 1) $\tilde{g}(n)$=(-1, -3, 3, 1)	$h(n)$=(-1, 3, 3, -1) $g(n)$=(-1, 3, -3, 1)

Maticový tvar 2kanálovaj FB

Pre 2-pásmovú banku filtrov môžeme operácie decimácie (pri analýze) a interpolácie (pri syntéze) rozpísať ako:

$$c(n) = \sum_k \tilde{h}(2n-k)x(k) \qquad\qquad d(n) = \sum_k \tilde{g}(2n-k)x(k)$$

$$\hat{x}(n) = \sum_k h(n-2k)c(k) + \sum_k g(n-2k)d(k)$$

Tieto vzťahy môžeme prepísať do maticového tvaru ako transformácie:

$$\overline{X} = T_a \overline{x} \qquad\qquad \hat{\overline{x}} = T_s \overline{X}$$

, kde $\overline{x}, \overline{X}, \hat{\overline{x}}$ sú stĺpcové vektory vstupného, transformovaného, výstupného signálu a $\mathbf{T}_a$, $\mathbf{T}_s$ sú transformačné matice pre analýzu, resp. pre syntézu. Predpokladajme konečnú dĺžku vstupného signálu a kruhovú konvolúciu vo FB. Potom $\overline{x}, \overline{X}, \hat{\overline{x}}$, $\mathbf{T}_a$, $\mathbf{T}_s$ môžemevyjadriť v tvare:

$$\overline{x} = \left(x(0), x(1), \ldots, x(N-1)\right)^T$$

$$\overline{X} = \left(c(0), c(1), \ldots, c(N/2-1), d(0), d(1), \ldots, d(N/2-1)\right)^T$$

$$\mathbf{T}_a = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{H}} \\ \widetilde{\mathbf{G}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{h}(0) & \widetilde{h}(-1) & \dots & \dots & \dots & \widetilde{h}(1) \\ \dots & \widetilde{h}(1) & \widetilde{h}(0) & \widetilde{h}(-1) & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \widetilde{h}(1) & \widetilde{h}(0) & \widetilde{h}(-1) \\ \widetilde{g}(0) & \widetilde{g}(-1) & \dots & \dots & \dots & \widetilde{g}(1) \\ \dots & \widetilde{g}(1) & \widetilde{g}(0) & \widetilde{g}(-1) & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \widetilde{g}(1) & \widetilde{g}(0) & \widetilde{g}(-1) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}_s = \begin{pmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(0) & \vdots & \dots & \vdots & g(0) & \vdots & \dots & \vdots \\ h(1) & h(-1) & \dots & \vdots & g(1) & g(-1) & \dots & \vdots \\ \vdots & h(0) & \dots & \vdots & \vdots & g(0) & \dots & \vdots \\ \vdots & h(1) & \dots & h(-1) & \vdots & g(1) & \dots & g(-1) \\ \vdots & \vdots & \dots & h(0) & \vdots & \vdots & \dots & g(0) \\ h(-1) & \vdots & \dots & h(1) & g(-1) & \vdots & \dots & g(1) \end{pmatrix}$$

Matice $\widetilde{\mathbf{H}}, \widetilde{\mathbf{G}}$ sú rozmerov N x N/2. Ich riadky sú tvorené kruhovým posunom impulzových charakteristík príslušných filtrov. V maticiach $\mathbf{H}, \mathbf{G}$ sú kruhovým posunom impulzových charakteristík tvorené stĺpce, pričom matice sú rozmerov N/2 x N.

Pri úplnej rekonštrukcii bez oneskorenia platí $\hat{\bar{x}} = \bar{X}$. Potom platí

$$\mathbf{T_a T_s} = \mathbf{I}_N = \mathbf{T_s T_a}$$

Vyjadrime:

$$\mathbf{I}_N = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{\mathbf{N/2}} & \mathbf{0}_{\mathbf{N/2}} \\ \mathbf{0}_{\mathbf{N/2}} & \mathbf{I}_{\mathbf{N/2}} \end{pmatrix} = \mathbf{T}_a \mathbf{T}_s = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{H}} \\ \widetilde{\mathbf{G}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{H}}\mathbf{H} \\ \widetilde{\mathbf{G}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{H}}\mathbf{H} & \widetilde{\mathbf{H}}\mathbf{G} \\ \widetilde{\mathbf{G}}\mathbf{H} & \widetilde{\mathbf{G}}\mathbf{G} \end{pmatrix}$$

z čoho vyplýva:

$$\widetilde{\mathbf{H}}\mathbf{H} = \widetilde{\mathbf{G}}\mathbf{G} = \mathbf{I} \qquad\qquad \widetilde{\mathbf{H}}\mathbf{G} = \widetilde{\mathbf{G}}\mathbf{H} = 0$$

T.j. impulzové charakteristiky filtrov sú ortogonálne k párnym posunom svojich duálov a ortogonálne navzájom „nakríž“ = *vyjadrenie biortogonality*.

Naopak :

$$\mathbf{I}_N = \mathbf{T}_s \mathbf{T}_a$$

vyjadruje podmienky pre *elimináciu aliasingu* v časovej oblasti.

K spôsobu tvorenia matíc $\tilde{\mathbf{H}},\tilde{\mathbf{G}}$ a $\mathbf{H},\mathbf{G}$

I. $\tilde{\mathbf{H}},\tilde{\mathbf{G}}$ sú *decimačné matice* - najprv je signál konvolvovaný, potom podvzorkovaný (ukážeme na príklade $\tilde{\mathbf{H}}$):

a) vyjadrením konvolúcie v maticovom tvare dostaneme

$$\tilde{H}_{konv} = \begin{pmatrix} \tilde{h}(0) & \dots & \dots & \tilde{h}(3) & \tilde{h}(2) & \tilde{h}(1) \\ \tilde{h}(1) & \tilde{h}(0) & \dots & \dots & \tilde{h}(3) & \tilde{h}(2) \\ \tilde{h}(2) & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(0) & \dots & \dots & \tilde{h}(3) \\ \tilde{h}(3) & \tilde{h}(2) & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(0) & \dots & \dots \\ \dots & \tilde{h}(3) & \tilde{h}(2) & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(0) & \dots \\ \dots & \dots & \tilde{h}(3) & \tilde{h}(2) & \tilde{h}(1) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \tilde{h}(3) & \tilde{h}(2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

b) následným podvzorkovaním výstupu dostaneme

$$\bar{c} = \left(\tilde{\mathbf{H}}_{konv}\,\bar{x}\right)\downarrow 2 = \left(\tilde{\mathbf{H}}_{konv} \underset{riadky}{\downarrow} 2\right)\bar{x} = \tilde{\mathbf{H}}\,\bar{x}$$

t.j. $\tilde{\mathbf{H}}$ vytvoríme odstránením každého druhého riadku $\tilde{\mathbf{H}}_{konv}$

II. $\mathbf{H},\mathbf{G}$ sú *interpolačné matice*- signál je najprov nadvzorkovaný, potom konvolvovaný, pre DP vetvu potom:

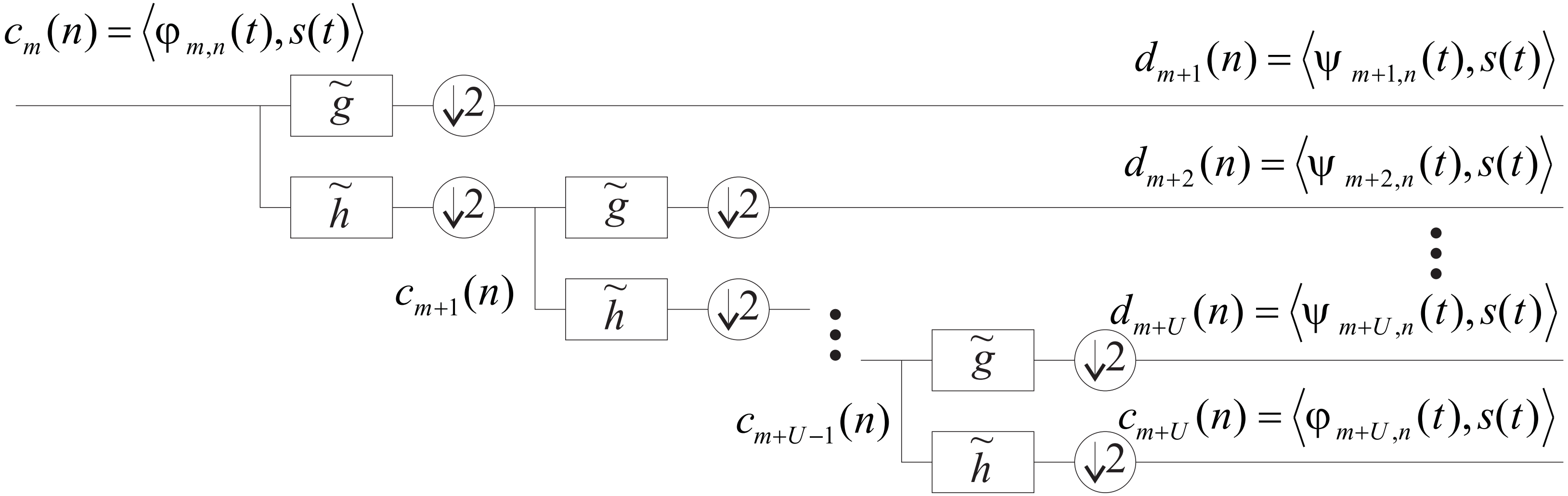
$$\hat{\bar{x}}_c = (\mathbf{H}_{konv})(\bar{c} \uparrow 2) = \left(\mathbf{H}_{konv} \underset{stĺtĺp}{\downarrow} 2 \right) \bar{c} = \mathbf{H}\,\bar{c}$$

,kde

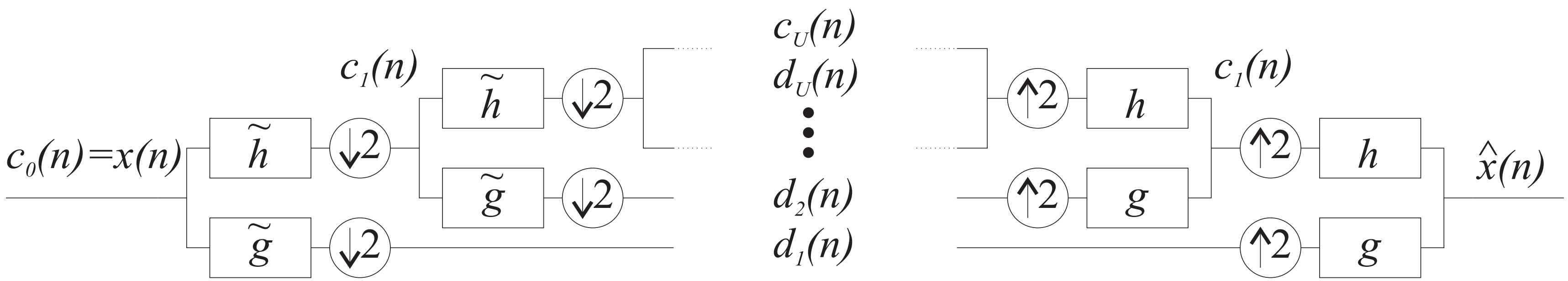
$$H_{konv} = \begin{pmatrix} h(0) & \dots & \dots & h(3) & h(2) & h(1) \\ h(1) & h(0) & \dots & \dots & h(3) & h(2) \\ h(2) & h(1) & h(0) & \dots & \dots & h(3) \\ h(3) & h(2) & h(1) & h(0) & \dots & \dots \\ \dots & h(3) & h(2) & h(1) & h(0) & \dots \\ \dots & \dots & h(3) & h(2) & h(1) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & h(3) & h(2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

t.j. $\mathbf{H}$ vytvoríme odstránením každého druhého stĺpca $\mathbf{H}_{konv}$

Realizácia výpočtu WR pomocou bánk filtrov:



Realizácia výpočtu DWT a IDWT pomocou bánk filtrov:



<u>Aký je rozdiel medzi BF s úplnou rekonštrukciou a BF ktoré realizujú wavelety?</u>

→ Pri waveletoch je nutná aspoň jedna prenosovej funkcie DP filtra v $\Omega=\pi$ lebo potrebujeme Banku filtrov *iterovať*

→ Design kalsických Bánk filtrov je viac zameraný na rozdelenie subpásiem vo frekvenčnej oblasti, na selektivitu filtrov a na vznikajúci aliasing, pričom sa často ani nepožaduje úplná rekonštrukcia

Návrh biortogonálnych waveletov spektrálnou faktorizáciou

Uvažujme všeobecné riešenie faktorizácie $P(z)$ v tvare $P(z) = \tilde{H}(z)H(z)$.

Nulové body $P(z)$ označme z_i. Potom platia nasledovné pravidlá (**Opakovanie!**):

1. Aby $\tilde{H}(z)$ a $H(z)$ boli prenosové funkcie *reálnych filtrov*, z_i a z_i^* musíme použiť v pároch. Napr:

$$H(z) = (z - z_0)(z - z_0^*) = z^2 - z(z_0 + z_0^*) + z_0 z_0^* = z^2 - 2z\,\mathrm{Re}(z_0) + |z_0|^2$$

2. Aby $\tilde{H}(z)$ a $H(z)$ boli prenosové funkcie filtrov s *Lineárnou fázou*, z_i a $1/z_i$ musíme použiť v pároch. Napr:

$$H(z) = (z - z_0)(z - 1/z_0) = z^2 - z(z_0 + 1/z_0) + 1 = symetricke\ koeficienty$$

3. Aby $\tilde{H}(z)$ a $H(z)$ mohli tvoriť *ortogonálne wavelety*, z_i a $1/z_i$ musíme použiť oddelene (magnitúdová charakteristika musí zostat rovnaka).

$$P(z) = \tilde{H}(z)H(z) = \alpha \prod_{i=1}^{N_1}\left(\left(1 - z_{1_i} z^{-1}\right)\left(1 - z_{1_i}^* z\right)\right) \prod_{i=1}^{N_2}\left(\left(1 - z_{2_i} z^{-1}\right)\left(1 - z_{2_i}^* z\right)\right)$$

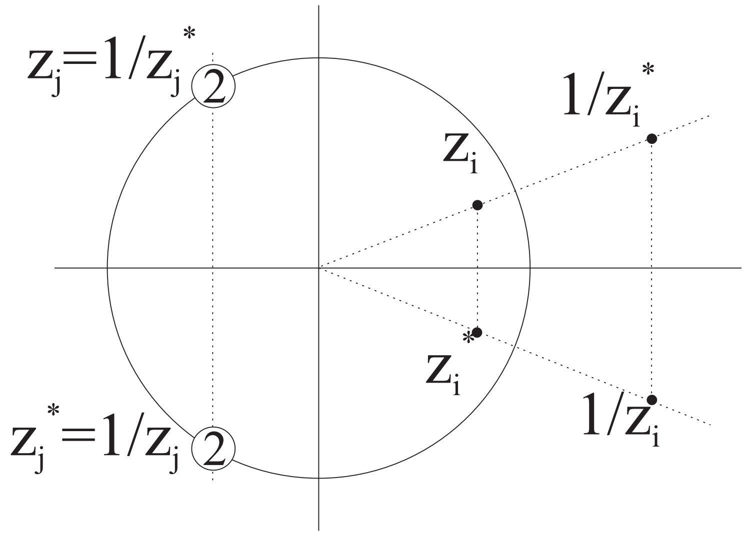
Návrh Biortogonálnych waveletov

- Začneme navrhovať ortogonálny wavelet s K nulovými momentmi.
- Ak doplníme dvojnásobný počet núl a použijeme kompletný polynóm $Q(z)$ - ***symetrická pozitívna funkcia na jednotkovej kružnici***, získavame polpásmový filter:

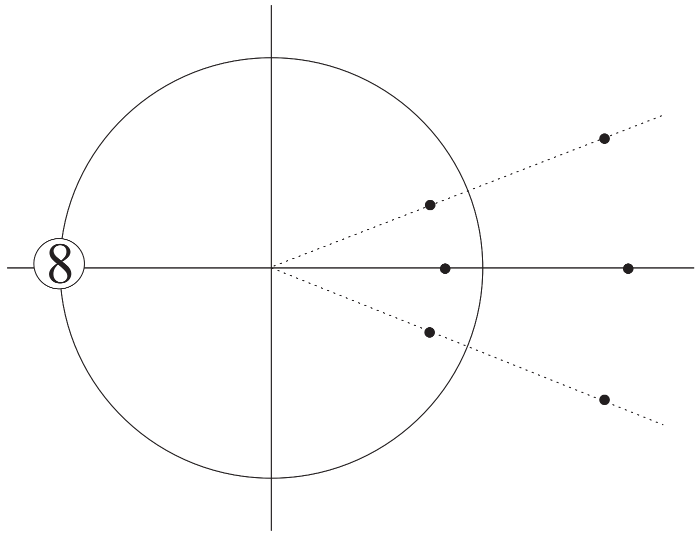
$$P(z) = 2\left(\frac{1+z}{2}\right)^K \left(\frac{1+z^{-1}}{2}\right)^K Q(z)$$

- Polpásmový filter faktorizujeme.

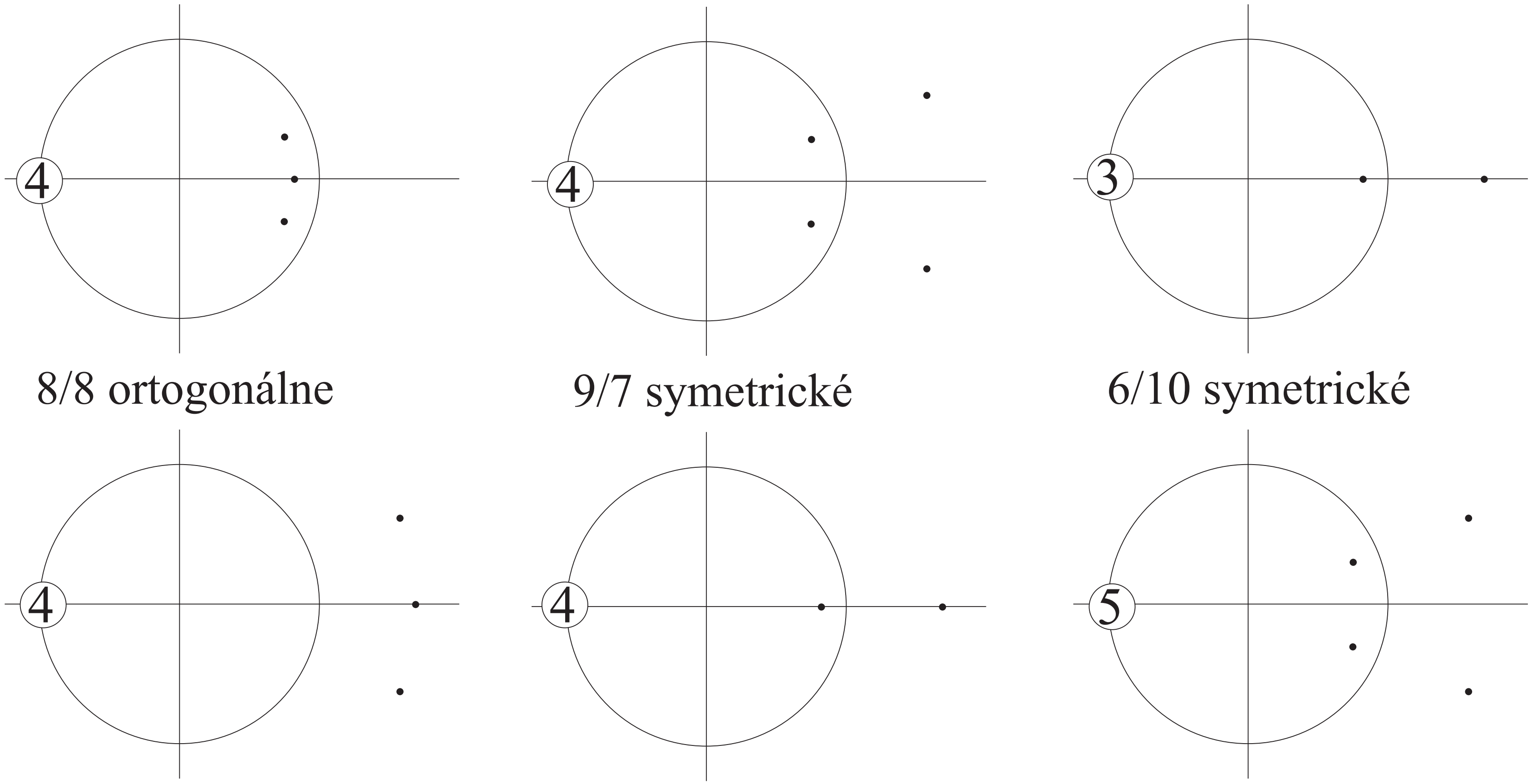
Chceme takú faktorizáciu $P(z) = \widetilde{H}(z)H(z)$, aby $H(z)$ a $\widetilde{H}(z)$ mali lienárnu fázu.



Všeobecné umienstnenie núl P(z)



Umienstnenie núl pre maximálne hladký polpásmový filter so 14 nulami v P(z)



Príklady faktorizácie P(z) maximálne hladkého filtra so 14 nulami

Príklad: Pre Db2 dostávame návrhom pre K=2 nulových momentov:

$$Q(z) = -\frac{1}{2}z + 2 - \frac{1}{2}z^{-1} = \frac{2+\sqrt{3}}{2}\left[1 - \frac{\left(2-\sqrt{3}\right)}{z}\right]\left[1 - \frac{z}{\left(2+\sqrt{3}\right)}\right]$$

Potom $P(z) = 2\left(\frac{1+z}{2}\right)^2\left(\frac{1+z^{-1}}{2}\right)^2 Q(z)$.

Naozaj je to polpásmový filter?

Musí platiť napr. $P(z) = P\left(z^{-1}\right)$ $P(z) + P(-z) = 2$

Ak chceme utvoriť Biortogonálny wavelet, môžeme vzhľadom na umiestnenie koreňov pri Db2 manipulovať iba s koreňmi v z=-1. Takže $Q(z)$ nie je treba faktorizovať .

Môžeme vytvoriť verzie:

1) Rbio1.3: $$H(z)=\sqrt{2}\left(\frac{1+z}{2}\right)^{1}$$

$$\tilde{H}(z)=\sqrt{2}\left(\frac{1+z}{2}\right)^{1}\left(\frac{1+z^{-1}}{2}\right)^{2}Q(z)$$

$$h(n)=\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2},\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\tilde{h}(n)=\tfrac{\sqrt{2}}{2}(-1/8,1/8,1,1,1/8,-1/8)$$

2) Rbio2.2: $$H(z)=\sqrt{2}\left(\frac{1+z}{2}\right)^{2}\left(\frac{1+z^{-1}}{2}\right) \qquad \tilde{H}(z)=\sqrt{2}\left(\frac{1+z^{-1}}{2}\right)^{2}Q(z)$$

3) Rbio3.1(Kvadratický B-Spline):

$$H(z)=\sqrt{2}\left(\frac{1+z}{2}\right)^{2}\left(\frac{1+z^{-1}}{2}\right) \qquad \tilde{H}(z)=\sqrt{2}\left(\frac{1+z}{2}\right)^{1}Q(z)$$

<u>Návrh biortogonálnych waveletov pomocou vedomostí o tvare autokorelačnej funkcie</u>

<u>Príklad:</u> Pomocou vedomostí o tvare autokorelačnej funkcie zostrojte ortogonálne, maximálne hladké filtre s dĺžkou 4.

<u>Riešenie:</u>

Z vlastností maximálne hladkých filtrov vyplýva, že P(z) pre N=4 má tvar:

$$P(z) = (1+z^{-1})^2(1+z)^2 Q(z) = H(z)H(z^{-1})$$

, kde $Q(z)$ je symetrická pozitívna funkcia na jednotkovej kružnici. Keďže $P(z)+P(-z)=2$, všetky koeficienty pri párnych mocninách z okrem z^0 v $P(z)$ musia byť nulové. Pre N=4 je z^{-3} najvyžšia mocnina v $H(z)$ a teda $Q(z)$ bude v tvare :

$$Q(z) = (az+b+az^{-1})$$

Ako nájsť Q(z) ? Koľko je možností?

Pomocou $P(z) = (1+z^{-1})^2(1+z)^2(az+b+az^{-1})$ vytvoríme sústavu rovníc pre koeficienty pri párnych mocninách $P(z)$:

z^0: $6a+6b=1$ →

z^2: $4a+b=0$ → $a=-\frac{1}{16}$ $b=\frac{1}{4}$

Následne:

$$Q(z) = (az+b+az^{-1}) \rightarrow Q(z) = \left(-\frac{1}{16}z+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}z^{-1}\right)$$

A nakoniec ...

vytvoríme $P(z)$, ktoré môžeme faktorizovať

$$P(z) = (1+z^{-1})^2(1+z)^2 Q(z) = H(z)H(z^{-1})$$

Napr. ortogonálnou faktorizáciu $P(z)$ dostaneme výsledok:

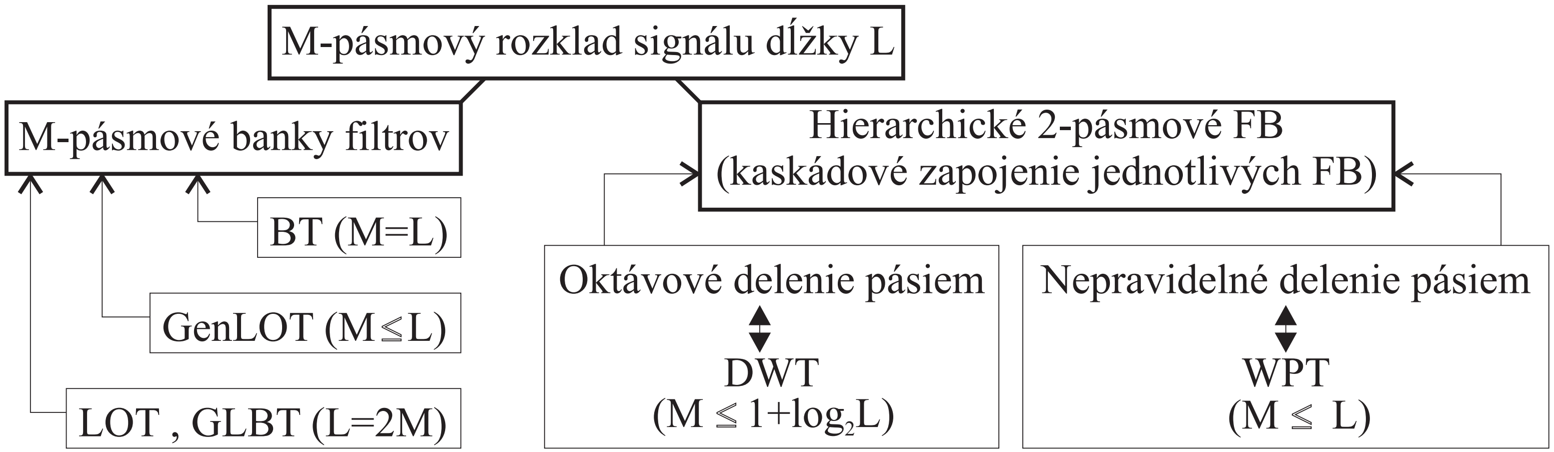
$$H(z) = \left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)\left[(1+\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})z^{-1}+(3-\sqrt{3})z^{-2}+(1-\sqrt{3})z^{-3}\right]$$

Banka filtrov a rozklad signálov

Zmena reprezentácie signálu je zväčša uskutočnená transformáciou.
Najbežňejší spôsobom rozkladu - *diskrétna lineárna transformácia (DLT)*
Najznámejšie prevedenia sú:

- *blokové transformácie*(BT) - pracujú so signálom v dávkach resp. po blokoch neodstraňujú medziblokovú koreláciu a naviac vzniká rušivý "blokový efekt"
- *prekryvné transformácie(Lapped trensforms)*
- *transformácie pracujúce na princípe viacúrovňového rozlíšenia signálu*.

Každá DLT je ekvivalentná rozkladu v M-pásmovej BF, v ktorej časovo reverzné impulzné odpovede jednotlivých filtrov pre analýzu a syntézu odpovedajú jednotlivým bázovým vektorom DLT.



Implementácia Blokových transformácií (BT) bankami filtrov

Rozdeľme vstupný signálu $x(n)$ na neprekrývajúce sa bloky $\{x_b(n)\}$ veľkosti M (b je číslo bloku). Transformáciu $x_b(n)$ pomocou transformačnej matice $\widetilde{\mathbf{F}}$ veľkosti MxM na bloky $X_b(n)$ zapíšeme v maticovom tvare ako:

$$\overline{X}_b = \widetilde{F}\,\overline{x}_b$$

, kde $\overline{x}_b = (x_b(0), x_b(1), ..., x_b(M-1))^T$, $\overline{X} = (X_b(0), X_b(1), ..., X_b(M-1))^T$. Riadkové vektory matice $\widetilde{\mathbf{F}}$ označme $\bar{\tilde{f}}_r$: $\bar{\tilde{f}}_r = \left(\tilde{f}_r(0), \tilde{f}_r(1), \ldots, \tilde{f}_r(M-1)\right)$, kde $r = 0,1,\ldots M-1$ je číslo riadku . Transformáciu môžeme implementovať nasledovnou M-pásmovou bankou filtrov, kde sú impulzové charakteristiky jednotlivých filtrov časovo otočené riadky transformačnej matice:

Platí:

$$y_r(n) = \tilde{f}_r(M-1-n) * x(n)$$
$$X_b(r) = y_r(M(b-1))$$