

Príklady ortogonálnych waveletových systémov

- Haarov wavelet
- Sinc wavelety
- Battle-Lemarie wavelety(ortogonalizované Spline wavelety)
- Daubechies wavelety
- Coiflety

Dizajn je založený na momentových vlastnostiach $\varphi(t), \psi(t)$. Snažíme nulovať momenty waveletu a rovnako aj funkcie mierky. Pre Coiflet L tého rádu platí
 $m_{\varphi}(k)=0, m_{\psi}(k)=0 \quad k=1,2,\dots,L-1$

- Symlety – majú minimálnu a maximálny počet nulových momentov pri danej dĺžke $h(n)$

Príklady návrhu ortogonálnych waveletov

- Ortogonalizácia (napr. Battle Lemarie)
- Parametrizácia koeficientov mierky
- Spektrálna faktorizácia – wavelety s K nulovými waveletovými momentmi (napr. Daubechies)
Pozn. Analogicky sú navrhované *biortogonálne* CDF(Cohen-Daubechies-Feauveau) spline wavelety
- wavelety s K nulovými waveletovými momentmi a K nulovými momentmi funkcie mierky(Coiflets)
- wavelety s minimalizovanými momentmi(Odegard)
- *lifting schéma*

Parametrizácia koeficientov mierky

Systém 0. rádu - dĺžka $h(n)$ je 2

Nemá žiadne stupne voľnosti. Podmienky sú:

$$h(0) + h(1) = \sqrt{2}$$

$$h^2(0) + h^2(1) = 1$$

Riešením je $h(n) = \{\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\}$

Systém 1. rádu - dĺžka $h(n)$ je 4

Má jeden stupeň voľnosti. Podmienky sú:

$$h(0) + h(1) + h(2) + h(3) = \sqrt{2}$$

$$h^2(0) + h^2(1) + h^2(2) + h^2(3) = 1$$

$$h(0)h(2) + h(1)h(3) = 0$$

Riešením je

$$h(0) = (1 - \cos(\alpha) + \sin(\alpha)) / (2\sqrt{2})$$

$$h(1) = (1 + \cos(\alpha) + \sin(\alpha)) / (2\sqrt{2})$$

$$h(3) = (1 + \cos(\alpha) - \sin(\alpha)) / (2\sqrt{2})$$

$$h(2) = (1 - \cos(\alpha) - \sin(\alpha)) / (2\sqrt{2})$$

Pozn:

Ak $\alpha = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2 \rightarrow$ Haarov wavelet

Ak $\alpha = \pi/3 \rightarrow$ Daubechies2 wavelet

Návrh ortogonálnych waveletov s K nulovými momentmi

Nech $h(n)$ s dĺžkou N je *K-regulárny filter* . Potom:

$$H(\Omega) = \sqrt{2} \left(\frac{1 + e^{i\omega}}{2} \right)^K L(\Omega)$$

spĺňa $|H(\Omega)|^2 + |H(\Omega + \pi)|^2 = 2$ vtedy a len vtedy, ak

$$|L(\Omega)|^2 = Q(\sin^2(\Omega/2)) \quad \sin^2(\Omega/2) = \frac{1}{2}(1 - \cos(\Omega)) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}(e^{i\Omega} + e^{-i\Omega}) \right) = -\frac{1}{4}z + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z^{-1}$$

kde

$$Q(y) = \sum_{k=0}^{K-1} \binom{K-1+k}{k} y^k + y^K R(1/2 - y)$$

a $R(y)$ je *antisymetrický polynóm* taký, že $Q(y) \geq 0$ pre $y \in \langle 0, 1 \rangle$.

Ak $R(y)=0$ dostávame wavelety s maximálnym počtom nulových momentov N , tzv. *Daubechies* wavelety.

Ak $N > 2K$ potom $R(y)$ nám vyjadruje stupne voľnosti, ktoré môžeme použiť na modifikáciu vlastností waveletov.

Ako nájsť $L(z)$ pri danom $Q(z)$ také, pre ktoré $|L(\Omega)|^2 = Q(\Omega)$?

Využitie autokorelácie a spektrálnej faktorizácie.

Autokoreláciou sekvencie $h(n)$ je sekvencia:

$$p(n) = \langle h(k), h(k-n) \rangle$$

Potom

$$P(\Omega) = |H(\Omega)|^2$$

Pričom platí:

$P(\Omega)$ je reálna nezáporná funkcia

$$|H^*(\Omega)| = |H(\Omega)|$$

$$H(\Omega)H(\Omega) \neq |H(\Omega)|^2$$

$$|H(\Omega)^2| \neq |H(\Omega)|^2$$

Je zrejmá a očividná podobnosť:

$$P(\Omega) = |H(\Omega)|^2 \quad \leftrightarrow$$

$$Q(\Omega) = |L(\Omega)|^2$$

Vyjadrením $P(\Omega) = H^*(\Omega)H(\Omega)$ v Z-rovine dostaneme:

$$P(z) = H_*(z^{-1})H(z)$$

, kde označenie * znamená konjugáciu koeficientov, nie celej funkcie.

Platí:

$$P(z) = \alpha \prod_{i=1}^{N_1} \left((1 - z_{1_i} z^{-1})(1 - z_{1_i}^* z) \right) \prod_{i=1}^{N_2} \left((1 - z_{2_i} z^{-1})(1 - z_{2_i}^* z) \right)$$

, kde N_1 je počet **párov núl** na jednotkovej kružnici (platí $|z_{1_i}|=1$, pár je vlastne dvojnásobný koreň) a N_2 je **počet párov núl** mimo jednotkovej kružnice (platí $|z_{2_i}|<1$).

Pre danú $P(z)$ sa vyhovujúce $H(z)$ nazývajú **spektrálne faktory** $P(z)$:

- získame ich **použitím iba jednej nuly z každého páru núl** $P(z)$ - druhú nulu v páre nám “dorobí“ $H_*(z^{-1})$.
- Tieto riešenia majú **rovnakú magnitúdovú charakteristiku**, líšia sa iba vo fázovej charakteristike a **nie sú jedinečné**
- Dôležité je **riešenie s minimálnou fázou**, t.j. pri vytváraní $H(z)$ použijeme iba nuly **na** a **v** (!) jednotkovej kružnici. Potom:

$$H(z) = \sqrt{\alpha} \prod_{i=1}^{N_1} (1 - z_{1_i} z^{-1}) \prod_{i=1}^{N_2} (1 - z_{2_i} z^{-1})$$

Príklad: Zistite koeficienty $h(n)$, pre Daubechies wavelety s minimálnou fázou ak $N=6$.

Riešenie: Chceme max. počet nulových momentov, t.j. $K=3$, $R=0$.

Potom $Q(y) = 1 + 3y + 6y^2$,

$$y = \sin^2(\omega/2) = \frac{1}{2}(1 - \cos(\omega)) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}(e^{i\omega} + e^{-i\omega})\right) = -\frac{1}{4}z + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z^{-1}$$

$$Q(z) = \frac{3}{8}z^2 - \frac{9}{4}z^1 + \frac{19}{4} - \frac{9}{4}z^{-1} + \frac{3}{8}z^{-2}$$

$$\frac{8}{3}z^2Q(z) = z^4 - 6z^3 + \frac{38}{3}z^2 - 6z^1 - 6z^0$$

nájdeme nulové body:

$$z_0 = 0.28725 - 0.15289i \quad 1/z_0 = 2.71275 + 1.44389i$$

$$z_0^* = 0.28725 + 0.15289i \quad 1/z_0^* = 2.71275 - 1.44389i$$

$$Q(z) = \frac{3}{8}z^{-2}(z - (0.28725 - 0.15289i))(z - (0.28725 + 0.15289i)) \\ (z - (2.71275 + 1.44389i))(z - (2.71275 - 1.44389i))$$

Výsledok však musíme dostať do tvaru:

$$H(z) = \sqrt{\alpha} \prod_{i=1}^{N_1} (1 - z_{1_i} z^{-1}) \prod_{i=1}^{N_2} (1 - z_{2_i} z^{-1})$$

Úpravami dostaneme (prvé dva členy na pravej strane vynásobíme z^{-1} , z druhých vyjmeme nuly $1/z_0$ a $1/z_0^*$ a presunieme ich do α):

$$Q(z) = \alpha (1 - z^{-1}(0.28725 - 0.15289i))(1 - z^{-1}(0.28725 + 0.15289i)) \\ (1 - z/(2.71275 + 1.44389i))(1 - z/(2.71275 - 1.44389i))$$

kde

$$\alpha = \frac{3}{8} (2.71275 + 1.44389i)(2.71275 - 1.44389i) = \frac{3}{8} 9.443814$$

vytvoríme faktor s minimálnou fázou:

$$L(z) = \sqrt{\alpha} (1 - (0.28725 - 0.15289i)z^{-1})(1 - (0.28725 + 0.15289i)z^{-1})$$

Potom:

$$H_{\min}(z) = \sqrt{2} \left(\frac{1+z}{2} \right)^3 L_{\min}(z)$$

čo je numericky

$$H_{\min}(z) = 0.33267z^3 + 0.80689z^2 + 0.45988z - 0.13501 - 0.08544z^{-1} + 0.03523z^{-2}$$

Výsledok odpovedá nekauzálnemu filtru. Kauzalitu dosiahneme vynásobením $H_{\min}(z)$ faktorom z^{-3} , t.j. oneskorením $h(n)$ o 3 takty. Potom

$$h(n) = \{0.33267, 0.80689, 0.45988, -0.13501, 0.08544, 0.03523\}$$

Pozn: pri výbere faktoru s *maximálnou fázou* dostaneme:

$$H_{\max}(z) = 0.03523z^5 - 0.08544z^4 - 0.13501z^3 + 0.45988z^2 + 0.80689z^1 + 0.33267$$

t.j. otočenú a posunutú verziu filtra s minimálnou fázou.