

Rámce

Definícia: *Rámcom* vo vektorovom priestore E nazývame neprázdnu podmnožinu $B = \{\psi_i\}$, $B \subset E$ práve vtedy, ak $L(B) = E$ a $\forall f \in E$ existujú kladné konečné konštanty C, D také, že platí:

$$C\|f\|^2 \leq \sum_{m,n} \left| \langle f, \psi_{m,n} \rangle \right|^2 \leq D\|f\|^2$$

Rámce:

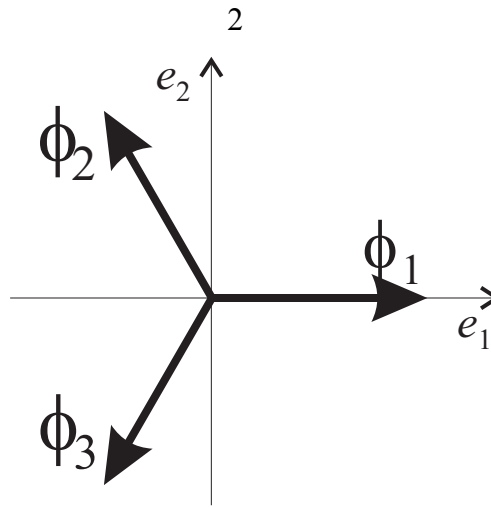
- nie su nutne lineárne nezávislé množiny
- reprezentácia vektoru pomocou rámcov môže byť redundantná a nejednoznačná
- ak $C = D$, rámec sa nazýva *tesný* a navyiac ak $\|\psi_{m,n}\|=1$, potom C udáva mieru redundancie rámca oproti báze (ak $C=2$, potrebujeme 2x viac vektorov na vyjadrenie f).
- ak $C = D = 1$, $\|\psi_{m,n}\|=1$ rámec $\{\psi_{m,n}\}$ tvorí *ortonormálnu bázu* E

K danému rámcu existuje viacero „doplnkových“ rámcov $\{\tilde{\psi}_{m,n}\}$, takých, že dvojica {rámec, doplnkový rámec} nám umožňuje signál reprezentovať aj zrekonštruovať. Možností na voľbu $\{\tilde{\psi}_{m,n}\}$ je viacero. Štandardná voľba je tzv. *duálny rámec*:

$$D^{-1}\|f\|^2 \leq \sum_{m,n} \left| \langle f, \tilde{\psi}_{m,n} \rangle \right|^2 \leq C^{-1}\|f\|^2 \quad \forall f(t) \in L^2(R)$$

Pre transformáciu do/z rámca platí:

$$\begin{aligned} d_i &= \langle f, \psi_i \rangle & \bar{d} &= \Psi^T \bar{f} & \text{dopredná} \\ f &= \sum_i d_i \tilde{\psi}_i & \bar{f} &= \tilde{\Psi} \bar{d} & \text{spätná} \end{aligned}$$



Príklad 1: Označme jednotkové vektory v rovine v smere x a y ako e_1 a e_2 . Definujme

vektory $\phi_1 = e_1$, $\phi_2 = -\frac{1}{2}e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}e_2$, $\phi_3 = -\frac{1}{2}e_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}e_2$. Zistite, či množina $\Phi = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ je tesný rámec v rovine (t. j. v priestore R^2). Ak áno, zistite jeho nadbytočnosť.

Riešenie:

1) $A\|f\|^2 \leq \sum_i |\langle f, \phi_i \rangle|^2 \leq B\|f\|^2$, aké sú A a B? Rozpísaním na zložky a úpravami zisíme, že

$\sum_i |\langle f, \phi_i \rangle|^2 = \frac{3}{2}\|f\|^2$. Zároveň platí $\|\phi_i\| = 1$. T.j. nadbytočnosť je 3/2.

2) Zostrojme rámcovú maticu $\Phi = (\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2, \bar{\phi}_3)$; $\Phi\Phi^T = \frac{3}{2}\mathbf{I}_2$. T.j. nadbytočnosť je 3/2

Príklad 2: K rámcu Φ nájdite duálny rámec $\tilde{\Phi}$ a overte vzťahy pre doprednú a spätnú transformáciu

Riešenie:

Pre duálny rámec platí: $B^{-1} \|f\|^2 \leq \sum_i |\langle f, \tilde{\phi}_i \rangle|^2 \leq A^{-1} \|f\|^2$. T.j. v našom prípade ($A=B=3/2$)

$\sum_i |\langle f, \tilde{\phi}_i \rangle|^2 = \frac{2}{3} \|f\|^2$. Vieme, že $\sum_i |\langle f, \phi_i \rangle|^2 = \frac{3}{2} \|f\|^2$. T.j. $\sum_i |\langle f, \phi_i \rangle|^2 = \frac{9}{4} \sum_i |\langle f, \tilde{\phi}_i \rangle|^2$. Vidíme že voľbou $\tilde{\phi}_i = \frac{2}{3} \phi_i$ rovnosť zabezpečíme. T.j. $\tilde{\Phi} = \frac{2}{3} \Phi$.

Pre transformáciu do/z rámca platí:

$$\begin{aligned} d_i &= \langle f, \phi_i \rangle & \bar{d} &= \Phi^T \bar{f} & \text{dopredná} \\ f &= \sum_i d_i \phi_i & \bar{f} &= \tilde{\Phi} \bar{d} & \text{spätná} \end{aligned}$$

T.j. po doprednej a spätnej transformácii dostaneme pôvodný signál:

$$\bar{f} = \tilde{\Phi} \bar{d} = \tilde{\Phi} (\Phi^T \bar{f}) = (\tilde{\Phi} \Phi^T) \bar{f} = \left(\frac{2}{3} \Phi \Phi^T \right) \bar{f} = \left(\frac{2}{3} \left(\frac{3}{2} \mathbf{I} \right) \right) \bar{f} = \bar{f}$$

Poznámka: Z $\tilde{\Phi} \tilde{\Phi}^T = \frac{2}{3} \mathbf{I}_2$ nevyplýva, že nadbytočnosť je 2/3 (t.j. "nedostatočnosť"), lebo $\|\tilde{\phi}_i\| \neq 1$.

Príklad 3: Na základe predchádzajúceho príkladu ukážte, že môže existovať viacero rôznych reprezentácií jedného vektoru $f \in R^2$ v rámci $\tilde{\Phi}$.

Riešenie: Podľa predchádzajúceho príkladu platí $f = \sum_i \langle \phi_i, f \rangle \tilde{\phi}_i$, kde $\tilde{\phi}_i = \frac{2}{3} \phi_i$. Zároveň platí

$\sum_i \phi_i = 0 = \sum_i \tilde{\phi}_i$. Ak chceme novú reprezentáciu, musíme na doprednú transformáciu použiť iný nový Φ . Zvoľme napr.:

$$\phi_{new_i} = \phi_i + x, \quad x = (\alpha, \beta), \quad x \in R^2$$

T.j. situáciu, keď ľubovoľný vektor x pričítame ku každému rámcovému vektoru. Potom

$$d_{new_i} = \langle f, \phi_{new_i} \rangle = \langle f, \phi_i + x \rangle = \langle f, \phi_i \rangle + \langle f, x \rangle$$

má samozrejme iné hodnoty (posunuté o $\langle f, x \rangle$). Pre rekonštrukciu platí:

$$\hat{f} = \sum_i d_i \tilde{\phi}_i = \sum_i (\langle f, \phi_i \rangle + \langle f, x \rangle) \tilde{\phi}_i = \sum_i (\langle f, \phi_i \rangle) \tilde{\phi}_i + \langle f, x \rangle \overbrace{\sum_i \tilde{\phi}_i}^0 = \sum_i (\langle f, \phi_i \rangle) \tilde{\phi}_i.$$

T.j. vidíme, že $\hat{f} = f$, t.j. dostávame znovu pôvodný signal.