Wavelety

Prípustné wavelety
(zaručená rekonštrukcia)

Približne prípustné wavelety

Vlastnosti:
+ ψ(τ) vyjadrené v uzavretom tvare
+ možná symetria ψ(τ)
- rekonštrukcia nie je zaručená
- ψ(τ) nemajú kompaktný nosič
- funkcia mierky φ(τ) neexistuje
- analýza nie je ortogonálna
- rýchly algoritmus neexistuje

Použitie: analýza spojitých signálov
Príklady: Gaussov a Morletov wavelet
, mexický klobúk

Wavelety s nekonečnou regularitou

Vlastnosti:
+ funkcia mierky φ(τ) existuje
+ analýza je ortogonálna
+ symetrické ψ(τ), φ(τ)
- ψ(τ) a φ(τ) nemajú kompaktný nosič
- rýchly algoritmus neexistuje

Použitie: SWT až DWT (s NIO filtrami)
Príklady: Meyerove, sinc wavelety

Semiortogonálne spline wavelety
bez kompaktného nosiča

Wavelety s kompaktným nosičom pre ψ(τ), φ(τ) *a rýchlym algoritmom výpočtu*

Ortogonálne wavelety

Vlastnosti:
+ ψ(τ), φ(τ) majú istý počet nulových momentov
+ KIO filtre pri implementácii WT
- možné iba asymetrické ψ(τ), φ(τ), maximálne približne symetrické

Použitie: SWT až DWT rýchlym algoritmom
Príklady: Daubechies(Db), symlety, Coiflety, Burt-Adelson, Battle-Lemarie wavelety

Biortogonálny pár waveletov

Vlastnosti:
+ ψ(τ), φ(τ) a ich duály majú istý počet nulových momentov
+ KIO filtre pri implementácii WT
+ možné iné vlastnosti analýzy a syntézy
+ možné symetrické ψ(τ), φ(τ)
- strata ortogonality a vlastnosti postupnej aproximácie

Použitie: SWT až DWT rýchlym algoritmom
Príklady: Biortogonálne spline, Cohononen-Daubechies-Feauveau (CDF) a Desaulerious-Dubuc(DD) wavelety

Analýza vlastností funkcií mierky a waveletov v ortogonálnom prípade

Označenie:

$\varphi(t), \psi(t)$ - funkcia mierky a wavelet spĺňajúca relácie zmeny rozlíšenia

$h(n), g(n)$ - zjednodušené označenie koeficientov pre zmenu rozlíšenia $h_{mr}(n)$, $g_{mr}(n)$

$H(\omega), G(\omega)$ - DTFT koeficientov $h(n)$ a $g(n)$

Teorém 1 : Ak platí $\int \varphi(t)dt \neq 0$ potom $\sum_n h(n) = \sqrt{2}$. Pozn.: podmienka $\int \varphi(t)dt \neq 0$ je nutná aby MRA bola kompletná.

Teorém 2 : Ak celočíselné posuny $\varphi(t)$ sú navzájom ortonormálne, t.j. $\int \varphi(t)\varphi(t-k)dt = \delta(k)$ potom $\sum_n h(n)h(n-2k) = \delta(k)$.

Dôsledky:

$$\sum_n h(2n) = \sum_n h(2n+1) = \sqrt{2}/2$$

$$\sum_n |h(n)|^2 = 1$$

Teorém 3 : Ak $\varphi(t)$ má kompaktnú podporu na intervale $\langle 0, N-1 \rangle$ a $\varphi(t-k)$ sú lineárne nezávislé, potom $h(n)$ má kompaktnú podporu na $0 \leq n \leq N-1$, t.j. $h(n) = 0$ pre $n < 0$ a pre $n > N-1$, dĺžka sekvencie $h(n)$ je N.

Vlastnosti $\varphi(t)$, $\psi(t)$	Vlastnosti $h(n)$, $g(n)$	Vlastnosti $H(\omega)$, $G(\omega)$	Poznámka
$\int \varphi(t)dt = 1$	$\sum_n h(n) = \sqrt{2}$	$H(0) = \sqrt{2}$	Teorém 1
$\int \varphi(t)\varphi(t-k)dt = \delta(k)$	$\sum_n h(n)h(n-2k) = \delta(k)$ ak $k=0$ platí $\sum_n \lvert h(n)\rvert^2 = 1$	$\lvert H(\omega)\rvert^2 + \lvert H(\omega+\pi)\rvert^2 = 2$	Teorém 2
$\sum_l \varphi(t-l) = \sum_l \varphi(l) = 1$	$\sum_n h(2n) = \sum_n h(2n+1)$	$H(\pi) = 0$	
$\int \psi(t)dt = 0$	$\sum_n g(n) = 0$	$G(0) = 0$	
$\int \varphi(t-n)\psi(t-m)dt = 0$	$g(n) = \pm(-1)^n h(M-n)$	$\lvert G(\omega)\rvert = \lvert H(\omega + M\pi)\rvert$	M je nepárne
	$\sum_n h(n)g(n-2k) = 0$	$\lvert H(\omega)\rvert^2 + \lvert G(\omega)\rvert^2 = 2$	

Prehľad vlastností pri ortonormálnych WR a DWT

- Aby mohli byť splnené podmienky pre $h(n)$, treba aby *N*, dĺžka $h(n)$ bola párna.
- $h(n)$ $g(n)$ sa navzájom jednoznačne určujú. Potom ...
- K danému ortogonálnemu waveletu existuje jediná funkcia mierky (a naopak).
- Ak $h(n)$ spĺňa uvedené podmienky, sú zaručené iba základné vlastnosti $\varphi(t)$ (integrovateľnosť, ortonormalitu, ...) pričom $\varphi(t)$ môže mať extrémne neregulárny, prípadne fraktálový charakter.
- regularita waveletu a k nemu náležiacej funkcie mierky je rovnaká (wavelet je ich konečná lineárna kombinácia)
- Pri návrhu $h(n)$ s dĺžkou *N*, ostáva po splnení nutných *N/2+1* podmienok ešte *N/2-1* stupňov voľnosti. Tieto môžeme využiť aby $\varphi(t), \psi(t)$ resp. $h(n), g(n)$ mali požadované vlastnosti, ako napr. istú regularitu, aproximačné vlastnosti ...

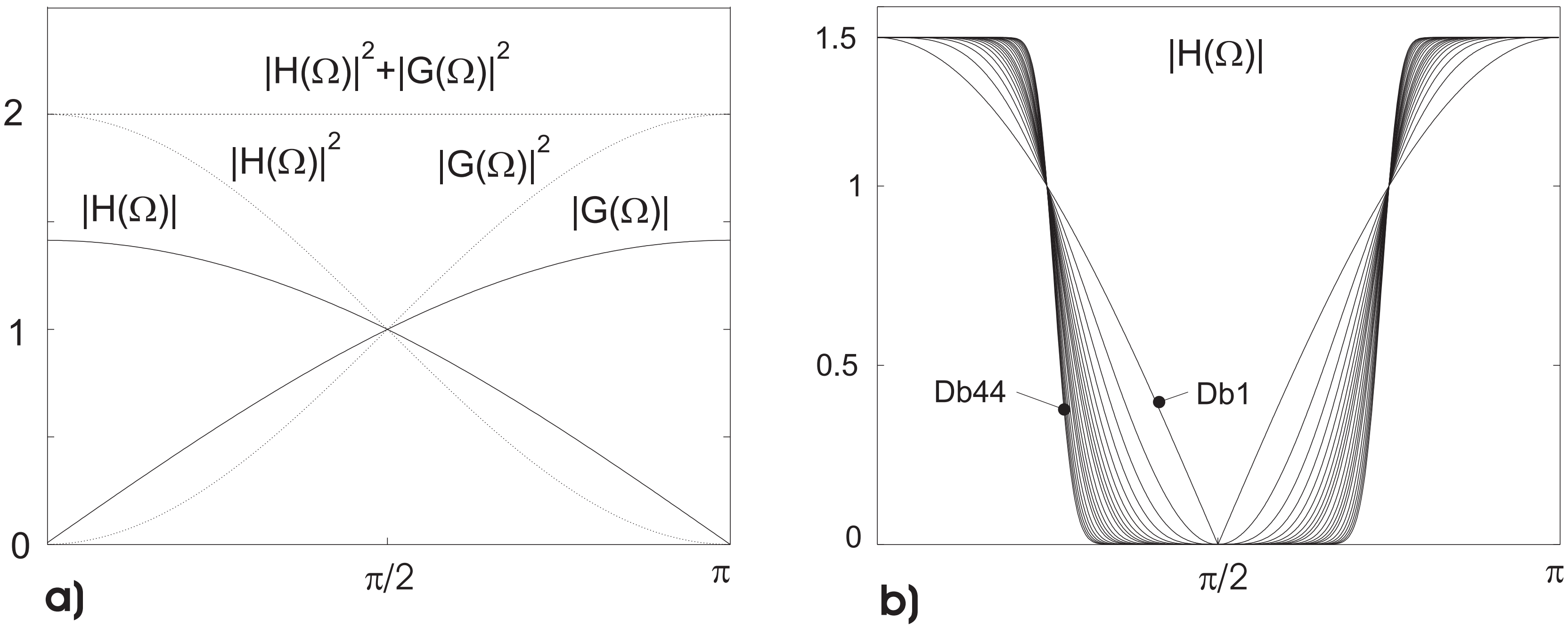
Pozn.1: nutných *N/2+1* podmienok je:

a) 1.podmienka: $\sum_n h(n) = \sqrt{2}$ kvôli existencii $\varphi(t)$

b) *N/2* podmienok kvôli ortonormalite $\varphi(t)$:

$$\sum_n h(n)h(n-2k) = \delta(k) \qquad k = 0,1,\ldots, N/2-1$$

Pozn.2: Nech $|H(\omega)|^2 + |H(\omega+\pi)|^2 = 2$. Označme $P(\omega) = |H(\omega)|^2$. Potom P je tzv. *Polpásmový filter* t.j. v Z rovine platí : $P(z) + P(-z) = 2$



DTFT dilatačných koeficientov a ich vlastnosti: a) celková situácia pri Db1(Haarov) wavelete b) vplyv rádu waveletu na frekvenčné vlastnosti koeficientov mierky pri systéme Daubechieovej waveletov

Kaskádové algoritmy, generovanie $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ vo frekvenčnej a časovej oblasti.

Ako vypočítať $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ ak poznáme koeficienty pre zmenu mierky?

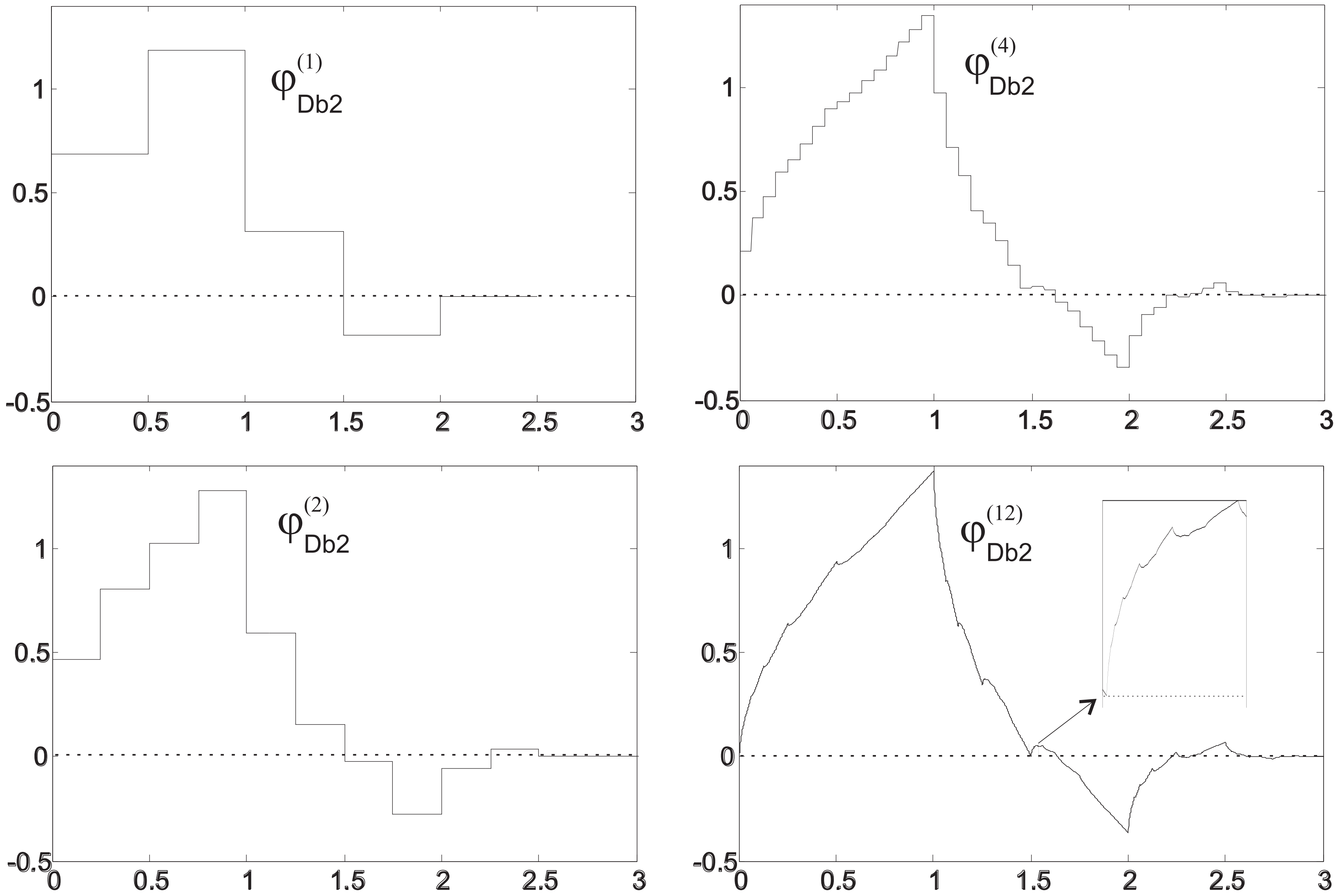
Vychádzajme z rovníc:

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n)\varphi(2t-n) \qquad \psi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{mr}(n)\varphi(2t-n)$$

Tieto rovnice môžeme riešiť *iteračne*, pričom ak postup bude konvergovať k pevnému bodu, potom je pevný bod hľadaným riešením. Iterácie sú definované:

$$\varphi^{(k+1)}(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n)\varphi^{(k)}(2t-n) \qquad \psi^{(k+1)}(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n)\psi^{(k)}(2t-n)$$

Uvedený iteračný postup sa nazýva aj *kaskádový algoritmus*.



Generovanie funkcie mierky Db2 waveletu kaskádovým algoritmom v čase. Výpočet zobrazený po 1,2,4 a 12 iteráciách. Počiatočný signál bola "Box" funkcia. Vpravo dole je zo zväčšeniny zrejmý fraktálový charakter. Porovnajte s tvarmi bázových funkcií priestorov V

Hľadajme teraz riešenie vo frekvenčnej oblasti.

Použitím Fourierovej transformácie dostaneme:

$$\varphi^{(k+1)}(t) = \sqrt{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n)\varphi^{(k)}(2t-n) \quad \Rightarrow \quad \Phi^{(k+1)}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} H_{mr}(\omega/2)\,\Phi^{(k)}(\omega/2)$$

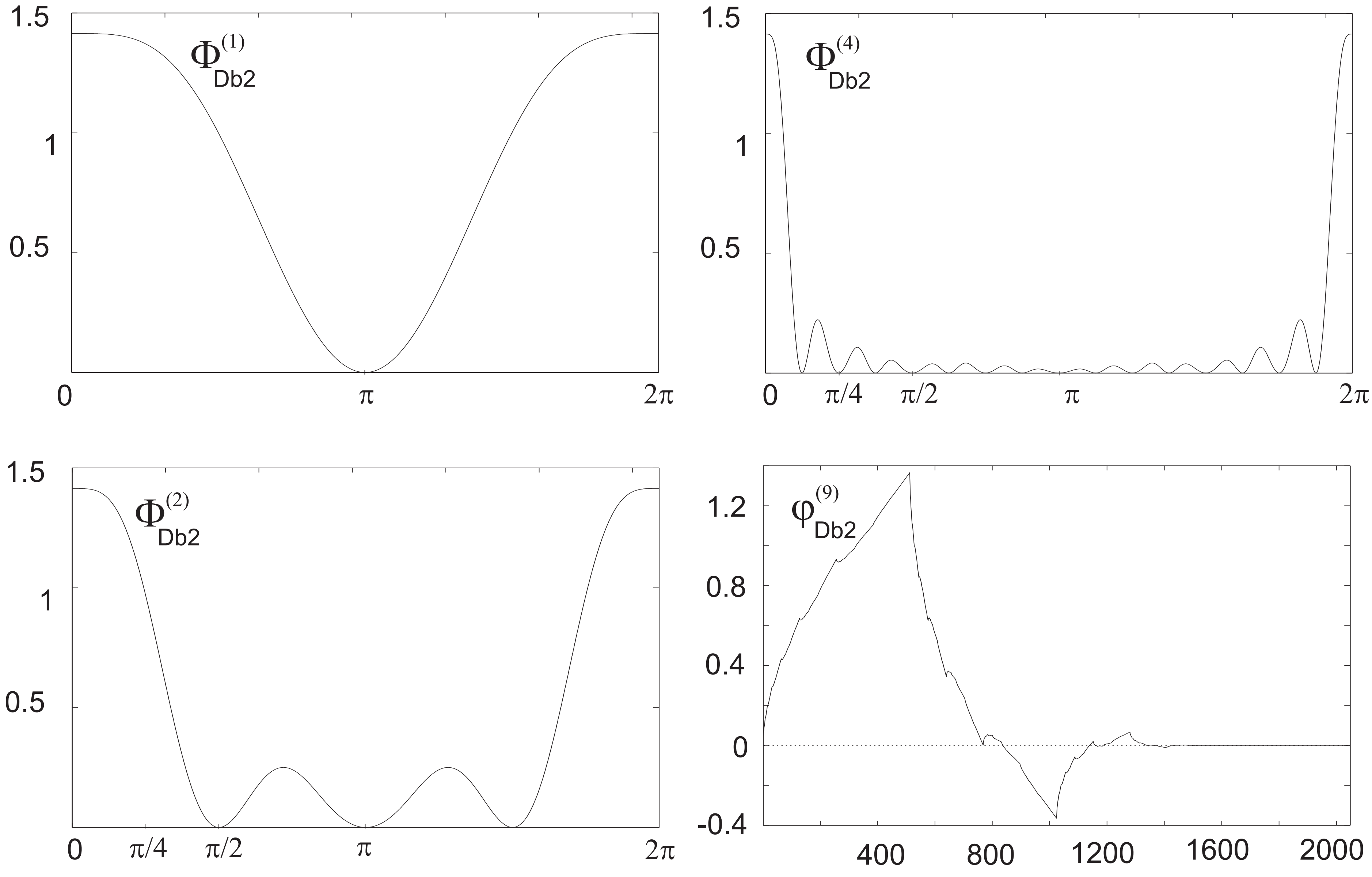
riešením tejto rovnice pre $k \to \infty$ dostávame

$$\Phi^{(\infty)}(\omega) = \Phi^{\infty}(0)\prod_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} H_{mr}\left(\omega/2^{k}\right)\right]$$

Ak táto limita existuje a je spojitá v $\omega = 0$ potom $\Phi(\omega) = \Phi^{(\infty)}(\omega)$. Analogicky:

$$\Psi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} G_{mr}(\omega/2)\prod_{k=2}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} H_{mr}\left(\omega/2^{k}\right)\right]$$

Výsledok oboch prípadoch nezávisí od tvaru $\varphi^{(0)}(t)$ ale iba od hodnoty $\Phi^{(k)}(0) = \int \varphi^{(k)}(t)dt = A_0 > 0$, ktorá je invariantná vzhľadom na iterácie.



Generovanie funkcie mierky Db2 waveletu kaskádovým algoritmom vo frekvencii. Zobrazená iterácia n=1,2,4$ (vždy iba prvá perióda) Výsledná funkcia mierky je vypočítaná pre n=9 vzorkovaním periódy na 2048 vzoriek a následnou IDFT.

Momentové vlastnosti

k-te momenty $\varphi(t), \psi(t)$ sú definované:

$$m_\varphi(k) = \int t^k \varphi(t) dt \qquad m_\psi(k) = \int t^k \psi(t) dt$$

diskrétne k-te momenty $h(n), g(n)$ sú definované:

$$\mu_h(k) = \sum_n n^k h(n) \qquad \mu_g(k) = \sum_n n^k g(n)$$

z diskrétnych momentov μ_h, μ_g môžeme vypočítať *spojité momenty* pomocou:

$$m_\varphi(k) = \frac{1}{(2^k - 1)\sqrt{2}} \sum_{l=1}^{k} \binom{k}{l} \mu_h(l) m_\varphi(k-l) \qquad m_\psi(k) = \frac{1}{2^k \sqrt{2}} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \mu_g(l) m_\varphi(k-l)$$

na začiatku výpočtu si treba uvedomiť, že $m_\varphi(0) = 1$.

Počet nulových momentov $m_\psi(k)$ dáva informáciu o plochosti $H(\omega)$ a hladkosti $\psi(t)$ ktoré rastú priamo úmerne. Okrem toho, čím viac máme waveletových momentov je nulových, tým lepšiu aproximáciu získame pri projekcii signálu $f(t) \in L^2(R)$ do V_m.

Čím väčší počet nulových momentov $m_\varphi(k)$ je dôležitý pri aproximácii signálu $f(t) \in L^2(R)$ vo V_m pomocou vzoriek $f(t)$ namiesto projekčných koeficientov. Takisto sa zlepšuje aj symetria $\varphi(t)$.

Príkladom waveletového systému, ktorého dizajn je založený na momentových vlastnostiach $\varphi(t), \psi(t)$ sú tzv. *Coiflets.* Je to ortonormálny systém v ktorom sa snažíme nulovať momenty waveletu a rovnako aj funkcie mierky:

$$m_\varphi(k) = 0, \; m_\psi(k) = 0 \qquad k = 1, 2, \ldots, L-1$$

K-regulárne filtre

FIR filter s impulzovou odpoveďou $h(n)$, ktorá spĺňa podmienky v Tab.1 sa nazýva *K-regulárny* vtedy ak platia nasledovné ekvivalentné tvrdenia:

1) $H(\omega)$ má *K-násobnú nulu* v $\omega = \pi$

2) prvých K-diskrétnych aj spojitých waveletových momentov je nulových, t.j.: $m_\psi(k) = 0$, $\mu_\psi(k) = 0$, pre $k = 0,1,\ldots,(K-1)$

3) polynomické sekvencie stupňa $\leq (K-1)$ môžu byť vyjadrené lineárnou kombináciou posunov $h(n)$.

4) polynómy stupňa $\leq (K-1)$ môžu byť vyjadrené lineárnou kombináciou posunov $\varphi(t)$

Ak je $h(n)$ K-regulárny, potom Z transformáciu $h(n)$: $H(z)=\sum_n h(n)z^{-n}$ môžeme napísať v tvare:

$$H(z)=\left(\frac{1+z^{-1}}{2}\right)^K L(z)$$

pričom $L(z)$ nemá žiadne póly v $z=e^{i\pi}$. Ak *N* je dĺžka filtra $h(n)$, potom polynóm $H(z)$ je stupňa *N-1* a $L(z)$ stupňa *N-1-K*. Aby $L(z)$ zabezpečilo splnenie nutných *N/2* podmienok pre ortogonalitu, musí byť aspoň stupňa *N/2-1*. Potom $K \le N/2$.

Zároveň z podmienky existencie $\varphi(t)$ automaticky platí, že $h(n)$ je aspoň $K=1$ regulárne. Takže platí :

$$1 \le K \le N/2$$

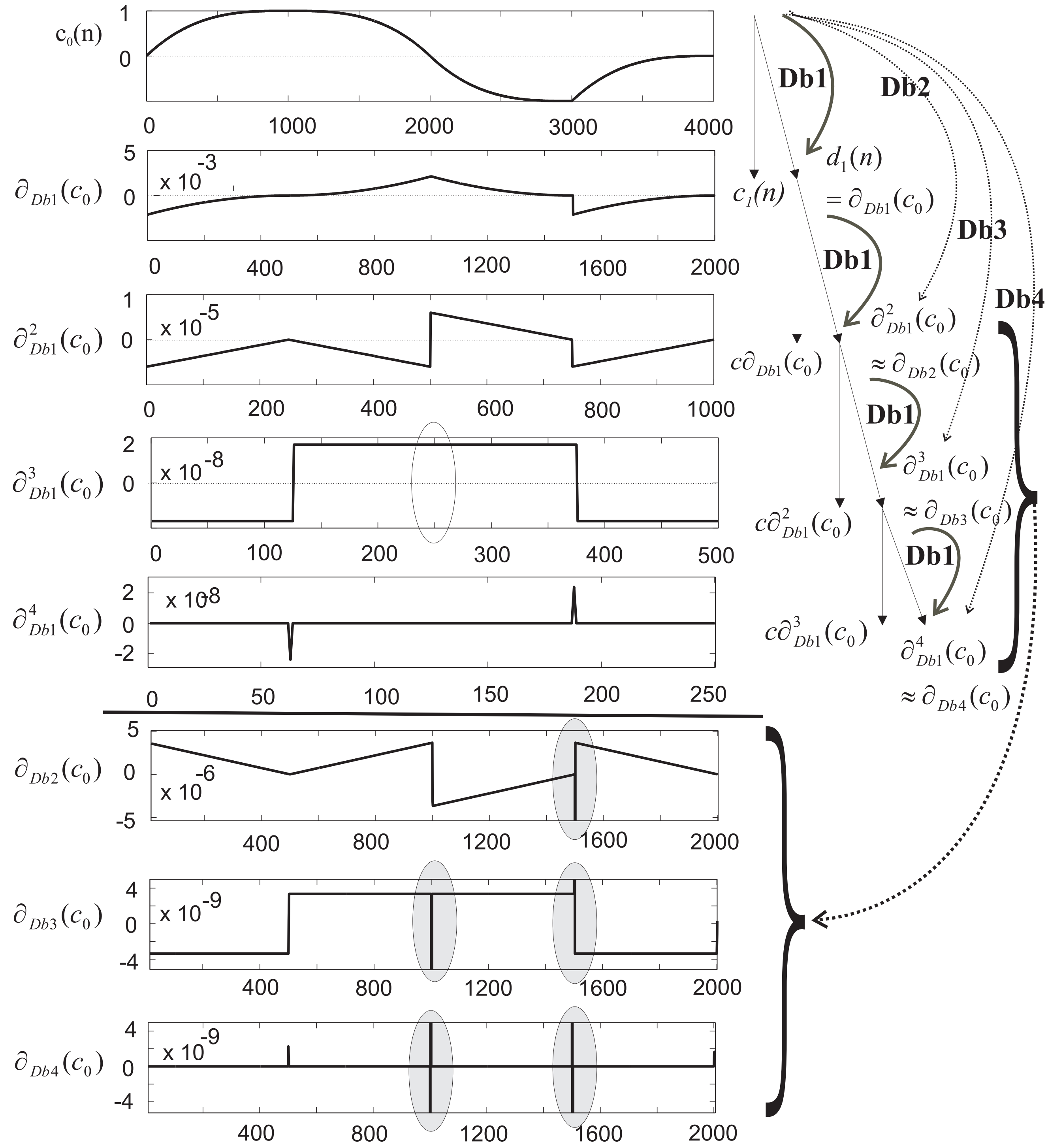
Wavelety ako diferenciálne operátory

- Wavelety môžu slúžiť ako viacú rovňový derivátor (diferenciálny operátor)
- Nech $h(n)$ je K-regulárny filter, generujú ci $\varphi(t)$ a $\psi(t)$. Potom waveletové koeficienty (spektrálne koeficienty po DWT) zodpovedajú K-tej derivácii vyhladenej verzie analyzovaného signálu:

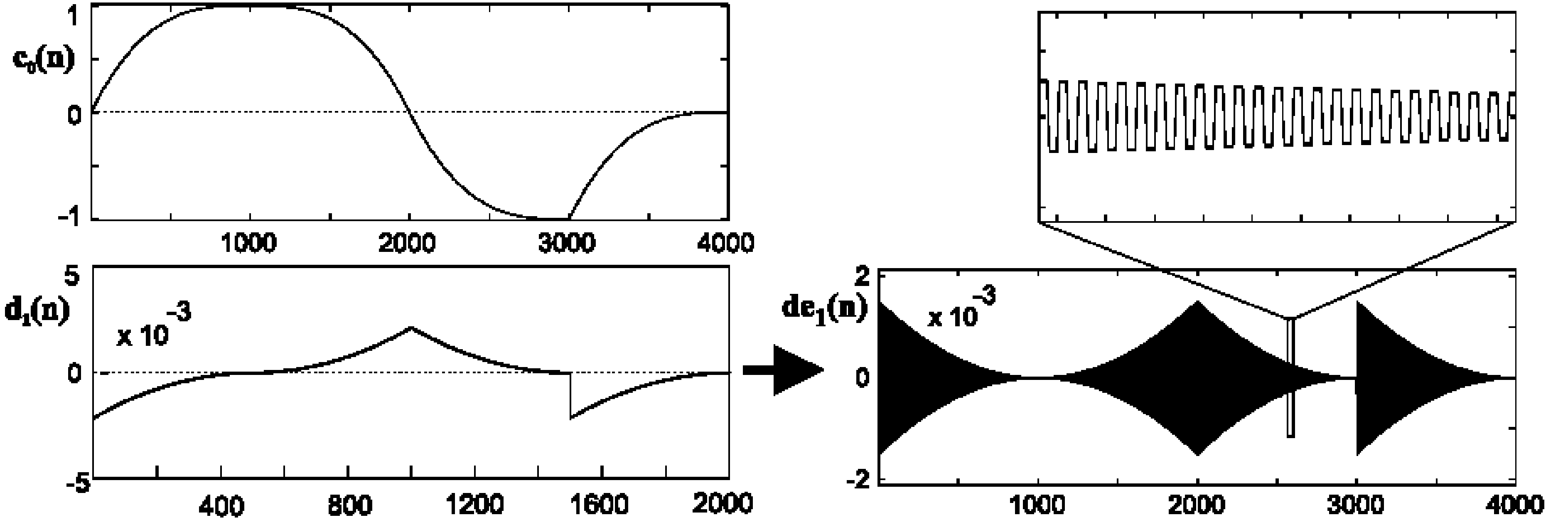
$$\langle f(x), \psi(x-u) \rangle = \partial^K \{\gamma * f\}(u)$$

kde γ je vyhladzujúci operátor definovaný vo frekvencii ako

$$\Gamma(\omega) = \Psi^*(\omega)/(j\omega)^K$$



$c_0(n)$
$\partial_{Db1}(c_0)$
$\partial^2_{Db1}(c_0)$
$\partial^3_{Db1}(c_0)$
$\partial^4_{Db1}(c_0)$
$\partial_{Db2}(c_0)$
$\partial_{Db3}(c_0)$
$\partial_{Db4}(c_0)$
x 10^-3
x 10^-5
x 10^-8
x 10^-8
x 10^-6
x 10^-9
x 10^-9
Db1
Db2
Db3
Db4
$d_1(n) = \partial_{Db1}(c_0)$
$c_1(n)$
$c\partial_{Db1}(c_0)$
$\partial^2_{Db1}(c_0) \approx \partial_{Db2}(c_0)$
$c\partial^2_{Db1}(c_0)$
$\partial^3_{Db1}(c_0) \approx \partial_{Db3}(c_0)$
$c\partial^3_{Db1}(c_0)$
$\partial^4_{Db1}(c_0) \approx \partial_{Db4}(c_0)$



Obr. 2.6. Waveletové koeficienty signálu $c_0(n)$ na prvej úrovni rozkladu a ich detail (de_1), pri použití Db1 waveletu. Rozliatie detailu je dôsledkom nedostatočnej regularity Db1. (t. j. na obr. 2.5 by nemali rozliaty detail iba koeficienty $\partial_{Db4}(c_0) \approx \partial^n_{Db1}(c_0)$)