

Všeobecné opakovanie od začiatku.

Opakovanie ~ Biortogonalita: Zovšeobecnenie SWT

Pri SWT je možné použiť pri rozklade a rekonštrukcii signálu *rôzne základné wavelety* $\tilde{\psi}(t)$ a $\psi(t)$:

$$f(t) = \frac{1}{C_{\tilde{\psi}, \psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle f, \tilde{\psi}_{a,b} \rangle \psi_{a,b} \frac{da db}{a^2}$$

Invertovateľnosť je podmienená vzťahom pre výpočet $C_{\tilde{\psi}, \psi}$ nasledovne:

$$C_{\tilde{\psi}, \psi} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tilde{\Psi}(\omega)| |\Psi(\omega)|}{|\omega|} d\omega < \infty$$

Táto podmienka je postačujúca, základné wavelety nemusia spĺňať žiadne iné podmienky.

Opakovanie ~ Biortogonalita: Waveletové rámce (WF) a rady (WR)

Ak z $\psi(t)$ (a analogicky pre $\tilde{\psi}(t)$) skonštruujeme množiny funkcií:

$$\text{Pri WF: } \psi_{m,n}(t) = a_0^{-\frac{m}{2}} \psi(a_0^{-m}t - nb_0), \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Pri WR: } \psi_{m,n}(t) = 2^{-\frac{m}{2}} \psi(2^{-m}t - n), \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

Potom signal môžeme reprezentovať pomocou jeho waveletových koeficientov

$$d_{m,n} = \langle f(t), \psi_{m,n}(t) \rangle \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

A spätne zrekonštruovať pomocou

$$f(t) = \sum_m \sum_n d_{m,n} \tilde{\psi}_{m,n}(t) \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

Opakovanie – biortogonalita

Pár $(\psi, \tilde{\psi})$ spĺňa podmienku *biortogonality* (hovoríme o *biortogonálnych waveletoch*), ak množiny $\{\psi_{m,n}\}$ a $\{\tilde{\psi}_{m,n}\}$ sú duálne bázy, spĺňajúce podmienku biortogonality:

$$\langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{l,m} \rangle = \delta(j-l)\delta(k-m) \quad j, k, l, m \in \mathbb{Z}$$

Biortogonálne wavelety a rozklad signálu

V predchádzajúcom texte sme vytvorili MRA s použitím ortonormálnych báz. Ak bázy $\{\psi_{m,n}\}$ a $\{\tilde{\psi}_{m,n}\}$ sú navzájom biortogonálne potom k základným waveletom $(\psi, \tilde{\psi})$ existujú funkcie mierky $\phi, \tilde{\phi}$ také, že množiny $\{\phi_{mn}\}$ a $\{\tilde{\phi}_{mn}\}$ tvoria bázy pre podpriestory V_{-m} resp. $\tilde{V}_{-m}$ a množiny $\{\psi_{mn}\}$ a $\{\tilde{\psi}_{mn}\}$ tvoria bázy pre podpriestory W_{-m} resp. $\tilde{W}_{-m}$. V $L^2(\mathbb{R})$ potom existujú dve MRA s hierarchiami:

$$\begin{aligned} \dots V_2 &\subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \dots \\ \dots \tilde{V}_2 &\subset \tilde{V}_1 \subset \tilde{V}_0 \subset \tilde{V}_{-1} \subset \tilde{V}_{-2} \dots \end{aligned}$$

Platí:

- W_{m+1} je síce doplnkom k V_{m+1} v priestore V_m , ale nie je to ortogonálny doplnok.
- W_{m+1} je však ortogonálny doplnok k $\tilde{V}_{m+1}$ v priestore $\tilde{V}_m$.
- $\tilde{W}_{m+1}$ je neortogonálny doplnok k $\tilde{V}_{m+1}$ v priestore $\tilde{V}_m$ a ortogonálny doplnok k V_{m+1} v priestore V_m .

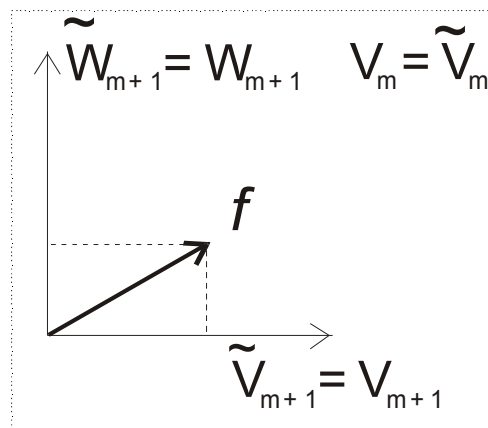
T.j.

$$\begin{aligned} V_m &= V_{m+1} \oplus W_{m+1} & V_m &= V_{m+1} \overset{\perp}{\oplus} \tilde{W}_{m+1} \\ \tilde{V}_m &= \tilde{V}_{m+1} \oplus \tilde{W}_{m+1} & \tilde{V}_m &= \tilde{V}_{m+1} \overset{\perp}{\oplus} W_{m+1} \end{aligned}$$

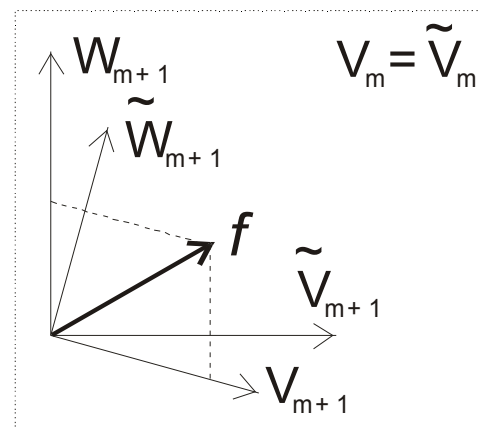
Vzt'ahy

$$\begin{aligned} V_m &= V_{m+1} \oplus W_{m+1} & V_m &= V_{m+1} \overset{\perp}{\oplus} \tilde{W}_{m+1} \\ \tilde{V}_m &= \tilde{V}_{m+1} \oplus \tilde{W}_{m+1} & \tilde{V}_m &= \tilde{V}_{m+1} \overset{\perp}{\oplus} W_{m+1} \end{aligned}$$

môžeme znázorniť graficky:



a) ortogonálny rozklad



b) biortogonálny rozklad

Relácie zmeny mierky môžeme vyjadriť vzt'ahmi:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n) \varphi(2t-n) & \psi(t) &= \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{mr}(n) \varphi(2t-n) \\ \tilde{\varphi}(t) &= \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{h}_{mr}(n) \tilde{\varphi}(2t-n) & \tilde{\psi}(t) &= \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{g}_{mr}(n) \tilde{\varphi}(2t-n) \end{aligned}$$

Aký bude odpovedajúci výpočet DWT?

Ak chceme signal vyjadriť v priestoroch V_{m+1} , W_{m+1} , musíme pri získavaní súradníc používať priestory $\tilde{W}_{m+1}$, $\tilde{V}_{m+1}$ - (viď. geometrická analógia). V tom prípade:

Rozklad (analýza):

$$c_{m+1}(n) = \sum_k \tilde{h}_{mr}(k-2n) c_m(k)$$
$$d_{m+1}(n) = \sum_k \tilde{g}_{mr}(k-2n) c_m(k)$$

Rekonštrukcia(syntéza):

$$c_m(n) = \sum_k h_{mr}(n-2k) c_{m+1}(k) + \sum_k g_{mr}(n-2k) d_{m+1}(k)$$

Resp. ak chceme signal vyjadriť v priestoroch $\tilde{W}_{m+1}$, $\tilde{V}_{m+1}$, musíme pri získavaní súradníc používať priestory V_{m+1} , W_{m+1} . **Voľba je na nás.**

Ako to bude vyzerat' v maticovom tvare? ... veľmi podobne ako v ortonormálnom prípade avšak pri konštruovaní matíc použijeme podľa uvedených vzťahov aj sekvencie $\tilde{h}_{mr}$ a $\tilde{g}_{mr}$.

- Aké sú vzťahy medzi $\tilde{h}_{mr}$, $\tilde{g}_{mr}$, h_{mr} , g_{mr} ?

Zložitejšie ako v ortonormálnom prípade, avšak koncept “bánk filtrov” nám pomôže.

Základné vzťahy v ortonormálnom prípade boli:

- $\sum_n h(n)h(n-2k) = \delta(k)$
- $\sum_n h(n)g(n-2k) = 0$
- $\sum_n h(n) = \sqrt{2}$, $\sum_n g(n) = 0$
- $g(n) = \pm(-1)^n h(M-n)$

V biortogonálnom prípade platí:

- $\sum_k h(k)\tilde{h}(2n-k) = \delta(k)$ $\sum_k g(k)\tilde{g}(2n-k) = \delta(k)$
- $\sum_k g(k+2m)\tilde{h}(2n-k) = 0$ $\sum_k h(k+2m)\tilde{g}(2n-k) = 0$
- $\sum_n g(n) = 0$, $\sum_n \tilde{g}(n) = 0$, $\sum_n h(n) = ?$ $\sum_n \tilde{h}(n) = ?$
- ?

- Chýba nám koncept zavádzajúci K-regularitu ...
- Máme viac stupňov voľnosti ako v ortonormálnom prípade

- **Príklad = rodina -Spline waveletov**

Spliny sú po častiach polynomicke funkcie daného stupňa s plynulým prechodom medzi jednotlivými časťami. B-Spline $\varphi_{SM}(t)$ stupňa M je tvorený M násobnou konvolúciou „Box“ funkcie:

$$B(t) = \begin{cases} 1 & t \in \langle 0, 1 \rangle \\ 0 & \text{inde} \end{cases}$$

a má kompaktnú podporu na intervale $\langle 0, M+1 \rangle$, $M-1$ spojitých derivácií.

Platí: $\varphi_{S0}(t) = B(t) = \varphi_{Haar}(t)$, takže $\varphi_{S0}(t)$ môžeme generovať pomocou

koefficientov $h(n) = (1, 1)$ resp. ich N -násobnými konvolúciami. To odpovedá

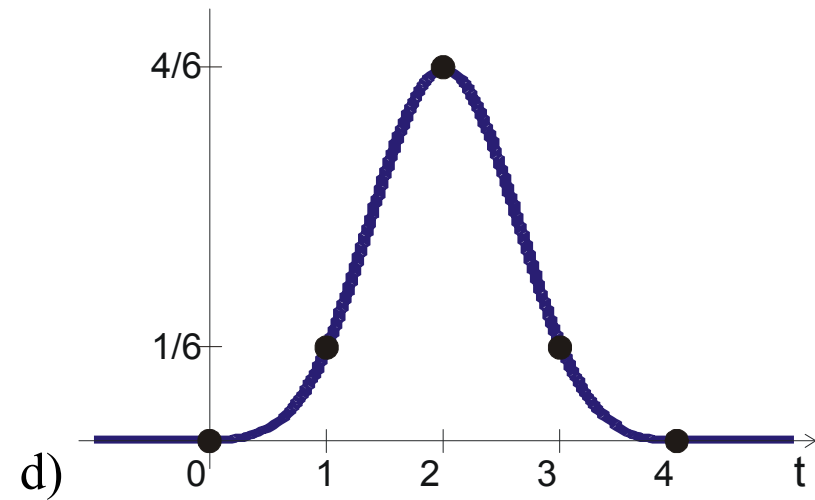
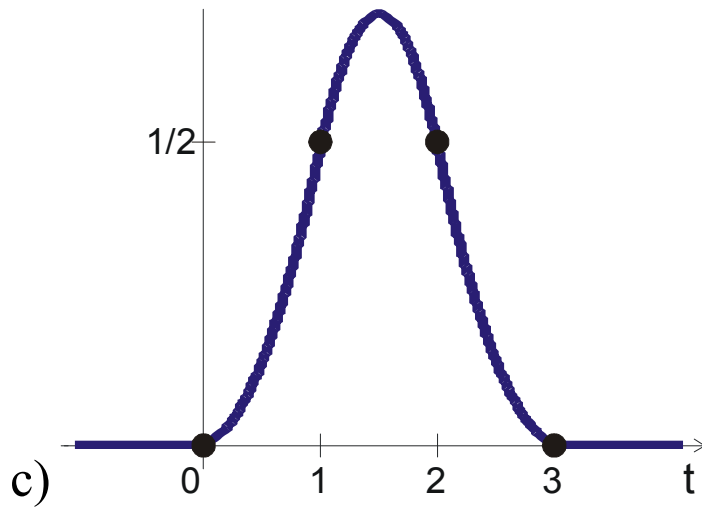
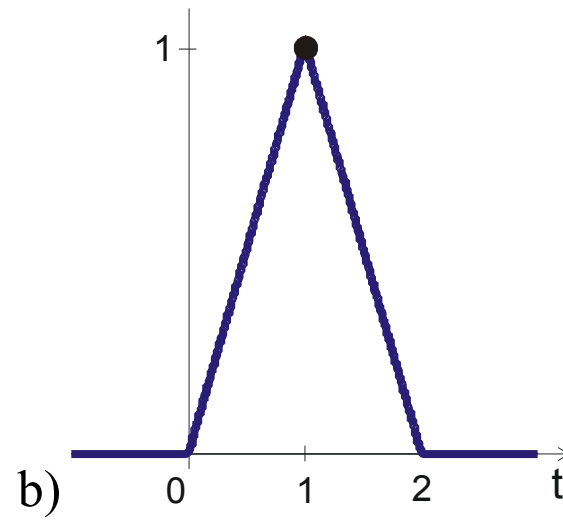
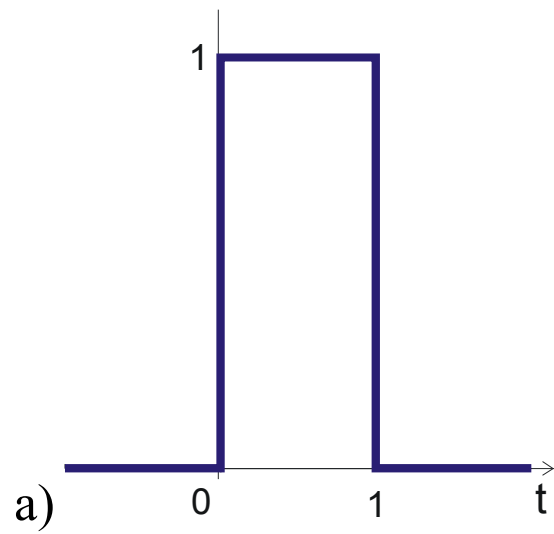
Pascalovmu rojuholníku na určenie kombinačných čísiel. Koefficienty $h(n)$ pre B-spline funkcie mierky sú potom:

$$h_{S0}(n) = (1, 1) \frac{\sqrt{2}}{2} \quad - \text{konštantný (spline nultého rádu)}$$

$$h_{S1}(n) = (1, 2, 1) \frac{\sqrt{2}}{4} \quad - \text{lineárny (spline prvého rádu)}$$

$$h_{S2}(n) = (1, 3, 3, 1) \frac{\sqrt{2}}{8} \quad - \text{kvadratický(...)}$$

$$h_{S3}(n) = (1, 4, 6, 4, 1) \frac{\sqrt{2}}{16} \quad - \text{kubický(...)}$$



B-Splínové funkcie mierky: a)Konštantná b)Lineárna c)Kvadratická d)Kubická

N-násobnej konvolúcii $h(n)$ odpovedá násobenie v Z rovine, t.j:

$$H_{SM}(z) = \sqrt{2} \left(\frac{1+z}{2} \right)^{M+1}$$

Takže Spline majú $K=M+1$ násobnú nulu v $z=-1$. Dĺžka $h_{SM}(n)$ je $M+2$.

- Platí $\int \varphi_{SM}(t) dt = 1$ a $\sum_n h_{SM}(n) = \sqrt{2}$
- Základná otázka: Formujú funkcie $\varphi_{SM}(t)$ bázy V_0 ?
Formujú, lebo $\varphi_{SM,m,n}(t)$ spĺňajú dilatačné rovnice. $\varphi_{SM}(t)$ potom môžeme považovať za funkcie mierky.
- Spline majú symetrické $h(n)$, symetrické bázové funkcie, t.j. nemôžu tvoriť ortogonálne systémy (okrem triviálneho prípadu)
- Spline nie sú navzájom ortogonálne, t.j:
 $\langle \phi_{SM}(t), \phi_{SM}(t+k) \rangle = a(k)$, pričom $a(k) \neq \delta(k)$

Semiortogonálne spline wavelety

Množiny $\{\varphi_{SM,m,n}(t)\}$ tvoria neortogonálne bázy V_m . Semiortogonálne wavelety $\{\psi_{SM,m,n}(t)\}$ tvoria neortogonálne bázy W_m , pre ktoré platí:

$$V_m \perp W_m \quad V_m = V_{m+1} \oplus W_{m+1}$$

T.j. v MRA existuje len jedna hierarchia aproximačných podpriestorov

$$\{0\} \dots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \dots L^2(R)$$

Oproti Biortogonálnemu prípadu to znamená že

$$V_m = \tilde{V}_m \quad W_m = \tilde{W}_m$$

Pri spline rádu M vypočítame koeficienty $g_{mr}(n)$ z koeficientov $h_{mr}(n)$ nasledovne:

$$g_{mr}(n) = \pm(-1)^n h_{mr}(M+1-n) a_M(M+1-n)$$

kde

$$a_M(k) = \langle \phi_{SM}(t), \phi_{SM}(t+k) \rangle$$

Prakticky

$$a_M(k) = 2^{M+1/2} h_{S(M+2)}(k)$$

POZOR: ak použijeme $g_{mr}(n)$ a $h_{mr}(n)$ v tomto tvare (KIO filtre) pri analýze, pri syntéze je nutné použiť NIO filtre (a naopak).

Biortogonálne spline wavelety

- Množiny $\{\varphi_{SM,m,n}(t)\}$ tvoria neortogonálne bázy V_m .
- K nim si môžeme skonštruovať $\{\psi_{SM,m,n}(t)\}$ také aby tvorili neortogonálne doplnky W_m (máme viac stupňov voľnosti ! Vid'. príklady na ďalšej strane)
- V $L^2(R)$ potom existujú dve MRA

$$\dots V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \dots$$

$$\dots \tilde{V}_2 \subset \tilde{V}_1 \subset \tilde{V}_0 \subset \tilde{V}_{-1} \subset \tilde{V}_{-2} \dots$$

atd...

Konkrétny spôsob návrhu Biortogonálnych B-spline waveletov uvidíme neskôr.

- pomôže nám koncept “bánk filtrov”
- použijeme vedomosti o spektrálnej faktorizácii v ortonormálnom prípade

Napr. Bior 1.3 a Bior 1.5 majú tie isté $\{\varphi_{SM,m,n}(t)\}$ - spliny nultého rádu (rozdiel je iba v časovom posunutí). Majú tie isté priestory V_m .

