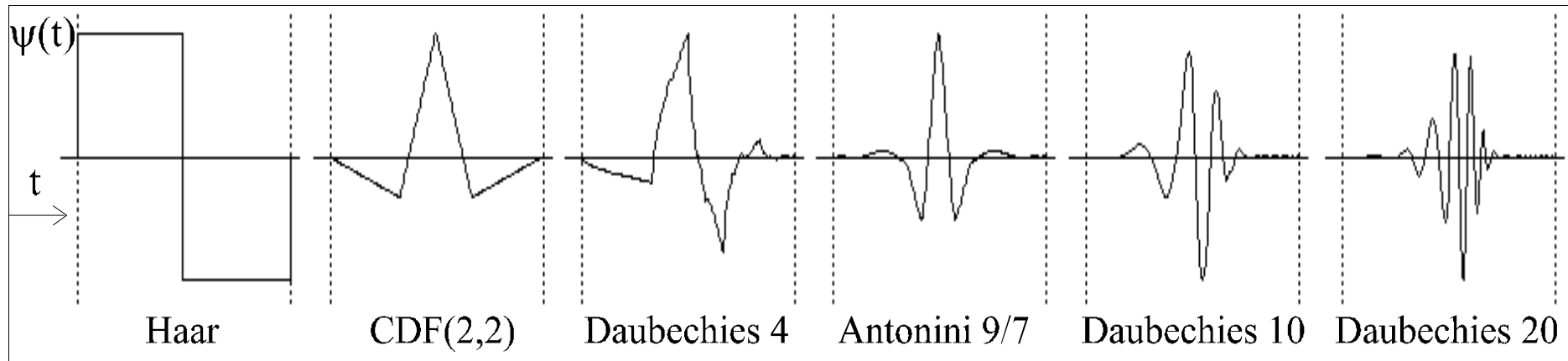


# Wavelet, čo to je?

(fr. *ondelette* = vlnka, angl. *wavelet*)

- predstavte si ho ako vlnový balík  
(= v praxi je to čosi medzi **Dirakovým impulzom** a **vlnou**)



## Waveletová transformácia (WT)

- funkcie, pomocou ktorých signál transformujeme a potom spätne skladáme sú „**vlnky**“
- vysoko efektívny prostriedok analýze a spracovaní signálov. Oproti **DFT** a **DCT** špecifická v tom, že umožňuje oveľa lepšie v **spektre** signálu zachytiť jeho **časovo-frekvenčné** vlastnosti.

## Reprezentácia signálov

- poznáte reprezentáciu signálov **v čase, vo frekvencii** (FT)
- wavelety umožňujú flexibilnú a cielenú reprezentáciu *niekde medzi*.

## Histórické korene

- Prvý "wavelet" skonštruoval I.Haar v r. 1910 pri konštrukcii alternatívneho ortonormálneho systému k Fourierovmu
- teórie Littlewood-Paleyho, **harmonická analýza**, atomická dekompozícia a **teória rámcov**
- Objavenie tesných vzťahov medzi **bankami filtrov** a waveletovými bázami. - S.Mallat, 1985

## Aplikácie waveletov

- Analýza signálov (spojitých, disktrétnych, fyzikálne veličiny, zvuk, obraz, ...)
- Filtrácia (napr. kôli odstraňovaniu šumu, ...)
- Kompresia (obraz, zvuk, video)
- Počítačová grafika (interpolácie, aproximácie, vyhladzovanie, modelovanie ...)
- Spotrebná elektronika
- ...

## Implementácie

PC

DSP

FPGA

# **Telekomunikácie**

## **WT & audio signály**

efektívny prostriedok pri časovo-frekvenčnej analýze a to formou SWT (spojitej waveletovej transformácie)  
watermarking (označovanie) audiosignálov  
potláčanie šumu v signále  
škálovateľné riešenia na internetovú telefóniu  
waveletová syntéza zvuku

## **WT & obraz & video**

JPEG 2000 pre kompresiu a prenos statického obrazu  
watermarking statického obrazu a videa  
Kompresia videa (zatiaľ neštandardizované)

# Oblasti, v ktorých sa budeme pohybovať a ktoré sa budú prelínať

- A) Lineárna algebra ➔ [vektory, priestory, transformácie, matice]
  - Hilbertove priestory ➔ [priestory funkcií, hierarchie priestorov]
  - Signály v čase a frekvencii
- B) Fourierova analýza (spojitá, diskretná) ➔ [rôzne druhy FT, STFT]
  - Signály v čase a frekvencii
- C) Diskrétné signály a Z transformácia
  - Impulzové charakteristiky
  - Filtre a banky filtrov
- D) Diskrétné transformácie v maticovom tvare
  - Ich spojenie a realizácia bankami filtrov

# Demo MATLABU

# A) Hilbertove priestory a rozklady signálov

(Skripta: dodatky, str.117)

**Definícia 6.1:** *Vektorový priestor*  $E$  nad komplexnými  $C$  alebo reálnymi číslami  $R$  je množina vektorov  $E$  spolu s operáciou sčítania a skalárneho násobenia, pre ktoré  $(E, +, \cdot)$  je *lineárny priestor* nad poľom  $C$  alebo  $R$ .

**Definícia 6.2:** *Podpriestor vektorového priestoru*  $E$  je taká podmnožina  $M \subset E$ , pre ktorú platí:

- 1)  $\forall x, y \in M; x + y \in M$
- 2)  $\forall x \in M$  a pre  $\alpha \in C$  alebo  $\alpha \in R$  platí, že  $\alpha x \in M$

**Definícia 6.3:** *Lineárny obal*  $L(M)$  množiny  $M \subset E$  s prvkami  $x_i$  je *podpriestorom*  $E$  a platí

$$L(M) = \left\{ \sum_i \alpha_i x_i; \alpha_i \in C \text{ alebo } R, x_i \in M \right\}$$

**Definícia 6.4:** *Bázou* vektorového priestoru  $E$  nazývame neprázdnu podmnožinu  $B \subset E$  práve vtedy, ak  $L(B) = E$  a  $B$  je množina lineárne nezávislých vektorov.

**Definícia 6.5:** *Hilbertov priestor*  $E$  je vektorový priestor  $E$ , ktorý je *úplný* a na ktorom je definovaný *skalárny súčin* ktorý označujeme  $\langle \cdot, \cdot \rangle$

**Definícia 6.6:** *Velkosť vektora*  $x$  (označujeme  $\|x\|$ ) je v Hilbertových priestoroch daná skalárnym súčinom  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ .

**Definícia 6.7:** Nech  $E$  je Hilbertov priestor, potom

- a) prvky  $x, y \in E$  sú *ortogonálne* ( $x \perp y$ ) ak  $\langle x, y \rangle = 0$
- b) Prvok  $x$  je *ortogonálny* na  $M \subset E$ , ak  $\forall y \in M$  platí  $x \perp y$
- c) Podpriestory  $M_1, M_2 \subset E$  sa nazývajú *ortogonálne* ak  $\forall x \in M_1, \forall y \in M_2$  platí  $x \perp y$

**Definícia 6.8:** Nech  $M_i$  sú podpriestory Hilbertovho priestoru  $E$ . Ak každý vektor  $x \in E$  môžeme jednoznačne vyjadriť v tvare  $x = x_1 + x_2 + \dots + x_k$  pričom  $x_i \in M_i$ , potom  $E$  je *priamou sumou* *podpriestorov*  $M_i$ . Píšeme  $E = M_1 \oplus M_1 \oplus \dots \oplus M_k$

**Definícia 6.9:** Nech  $M$  je podpriestor Hilbertovho priestoru  $E$ . Potom *ortogonálny doplnok* k  $M$  v  $E$  je množina  $M^\perp = \{x \in E; x \perp M\}$ .

**Veta 1.1:** Nech podpriestor  $M \subset E$  je uzavretý. Potom pre daný vektor  $z \in E$  existuje  $x \in M$  a  $y \in M^\perp$  také, že  $z = x + y$ . T.j. platí:  $E = M \oplus M^\perp$ .

# Separabilné Hilbertove priestory

## Komplexné / reálne priestory

Komplexný priestor  $C^n$  je množina všetkých  $n$ -tíc  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  s **konečnými hodnotami**  $x_i$  na množine  $C$ . *Skalárny súčin* je definovaný ako:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i^* \quad x, y \in C^n$$

Analogická definícia platí aj pre  $R^n$ . Kvôli jednoznačnosti budeme používať aj klasickú notáciu  $\bar{x} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T$ .

## Priestor $l^2(Z)$

Vektormi  $x$  v priestore  $l^2(Z)$  sú sekvencie  $x(n) \in C$ ,  $n \in Z$ , s konečnou energiou  $\|x\| < \infty$ . Zvyčajne reprezentujú signály diskkrétne v čase. *Skalárny súčin* je definovaný ako:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) y(n)^* \quad x, y \in l_2(Z)$$

## Priestor $L^2(R)$

Vektormi  $x$  v priestore  $L^2(R)$  sú funkcie  $x(t) \in C$ ,  $t \in R$ , ktoré sú po štvorcoch integrovateľné, t.j.  $\|x\| < \infty$ . *Skalárny súčin* je definovaný ako:

$$\langle x, y \rangle = \int_{t \in R} x(t) y(t)^* dt \quad x, y \in L_2(R)$$

Pozn.: Analogicky pre funkcie  $n$  premenných môžeme definovať priestory  $L_2(R^n)$

# Ortonormálne bázy

Množina  $B = \{b_i\}$  je *ortonormálny systém* v priestore  $E$ , ak

$$\forall b_i, b_j \in B; \quad \langle b_i, b_j \rangle = \delta(i - j)$$

$B = \{b_i\}$  je bázou priestoru  $E$ , ak všetky  $y \in E$  môžeme vyjadriť

$$y = \sum_k \alpha_k b_k$$

kde  $\alpha_k$  sú *spektrálne koeficienty*

$$\alpha_k = \langle b_k, y \rangle.$$

Pre takýto systém platí *Parsevalova rovnosť*

$$\|y\|^2 = \sum_i |\langle b_i, y \rangle|^2 \quad \forall y \in E$$

Analogické tvrdenia platia aj pre *ortogonálne systémy*, vo vzťahoch je iba pridaná normalizačná konštanta.

# Biortogonálne bázy

Nech množiny  $B = \{b_i\}$  a  $\tilde{B} = \{\tilde{b}_i\}$  sú bázami priestoru  $E$ . Tieto bázy sú navzájom *duálne* resp. *biortogonálne*, ak:

a) ich bázové vektory sú *navzájom ortogonálne*, t. j. *biortogonálne*:

$$\forall i, j \in Z; \quad \langle b_i, \tilde{b}_j \rangle = \delta(i - j)$$

b) existujú kladné konečné konštanty  $C, D, \tilde{C}, \tilde{D}$ , že pre  $\forall x \in E$  platí:

$$C\|x\|^2 \leq \sum_k |\langle b_k, x \rangle|^2 \leq D\|x\|^2 \quad \tilde{C}\|x\|^2 \leq \sum_k |\langle \tilde{b}_k, x \rangle|^2 \leq \tilde{D}\|x\|^2$$

Potom signál  $x \in E$  môžeme vyjadriť ako

$$x = \sum_k \langle b_k, y \rangle \tilde{b}_k = \sum_k \langle \tilde{b}_k, y \rangle b_k$$

*Parsevalova* rovnosť má tvar:

$$\|y\|^2 = \sum_k \langle b_k, y \rangle^* \langle \tilde{b}_k, y \rangle \quad \forall x \in E$$

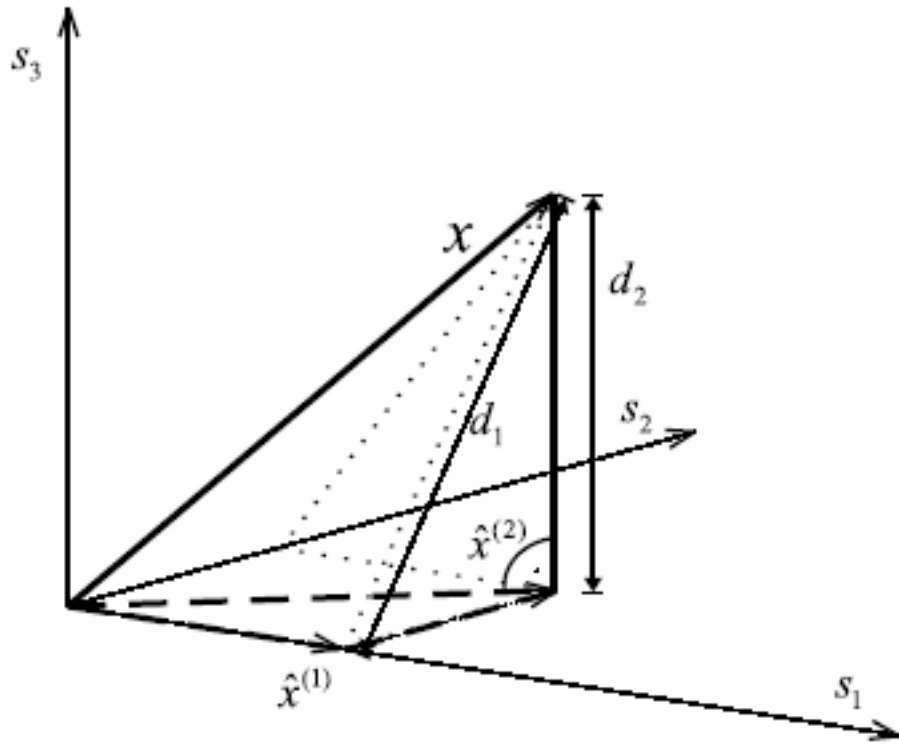
# Ortogonalná projekcia a aproximácia signálu

**Definícia:** *Ortogonalná projekcia(priemet)* vektora  $x$  do vektora  $s$  je zložka vektora  $x$  v smere vektora  $s$  nazývaná  $x_s$  s veľkosťou:

$$\|x_s\| = \langle x, s \rangle / \|s\|^2 \quad s = x_{s_1} s .$$

Skalár  $x_{s_1}$  nazývame *súradnicou vektora  $x$  vo vektore  $s$* .

Aproximujme  $x \in E$  v uzavretom podpriestore  $S_k$  s bázou  $S_k = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ .



Projekcia vektora  $x \in R^3$  do podpriestoru  $S_2 \subset R^3$  daného ako  $L(\{s_1, s_2\})$ .

Označme ortogonálnu projekciu  $x \in E$  do  $S_k$  ako  $\hat{x}^{(k)}$ .

Platí  $(x - \hat{x}) \perp S_k$  a zároveň

$$\|x - \hat{x}\| = \min \|x - s\| \quad \forall s \in S_k$$

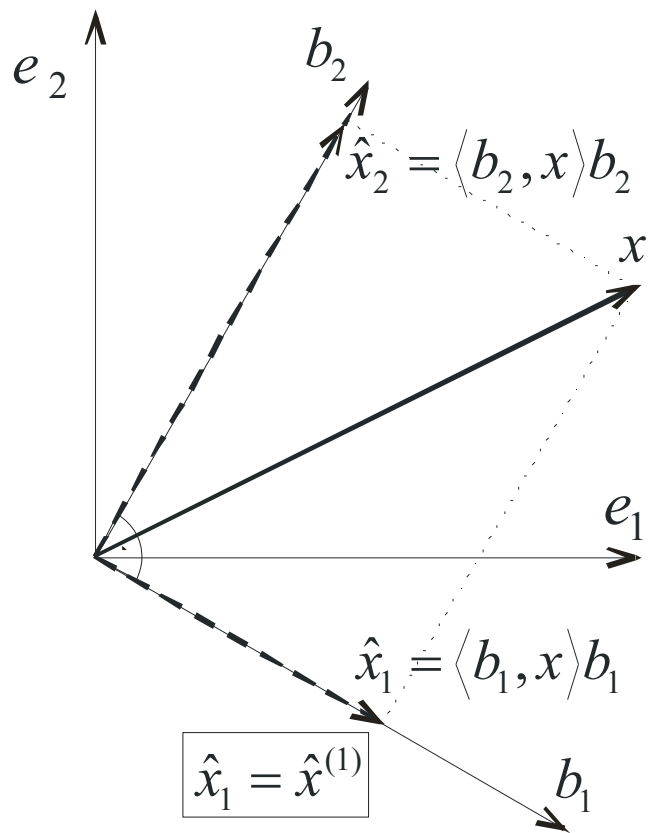
T.j. aproximácia ortogonálnou projekciou je najlepšia v zmysle *najmenších štvorcov*.

## Postupná aproximácia:

- A) Nech  $S_k$  je *ortonormálna* báza  $S_k$ . Označme ortogonálnu projekciu  $x \in E$  do  $S$  ako  $\hat{x}^{(k)} = \sum_i \langle s_i, x \rangle s_i$ . Keďže  $s_i$  sú vzájomne ortogonálne (stačí aby báza  $S_k$  bola ortogonálna), zachováva sa vlastnosť najlepšej aproximácie v zmysle najmenších štvorcov. *Platí vlastnosť postupnej aproximácie*, t.j.:

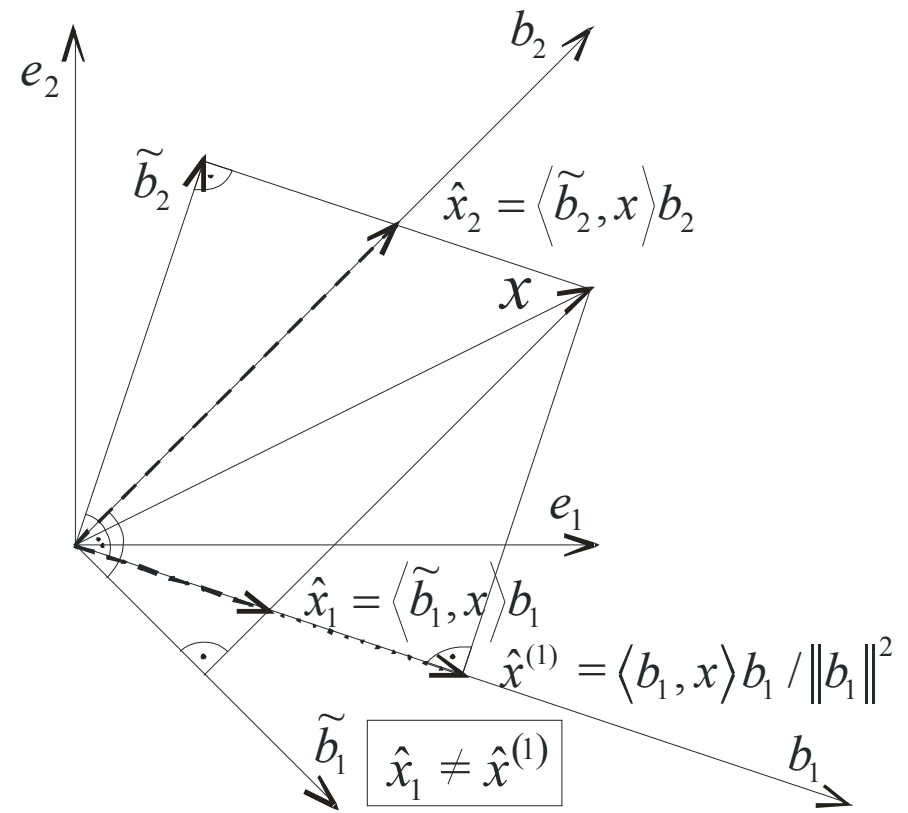
$$\hat{s}^{(k+1)} = \hat{s}^{(k)} + \langle s_{k+1}, x \rangle s_{k+1} .$$

- B) Keď  $S_k$ , báza  $S_k$  nie je ortogonálna, *neplatí vlastnosť postupnej aproximácie*, t.j. aproximáciu v  $S_{k-1}$  nemôžeme priamo použiť, je nutné celú aproximáciu prepočítať znovu.



a) Ortonormálna báza  $B$

$$B = \{b_1, b_2\} = \left\{ \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, 0.5 \right), \left( 0.5, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\}$$



b)  $B$  je neortogonálna

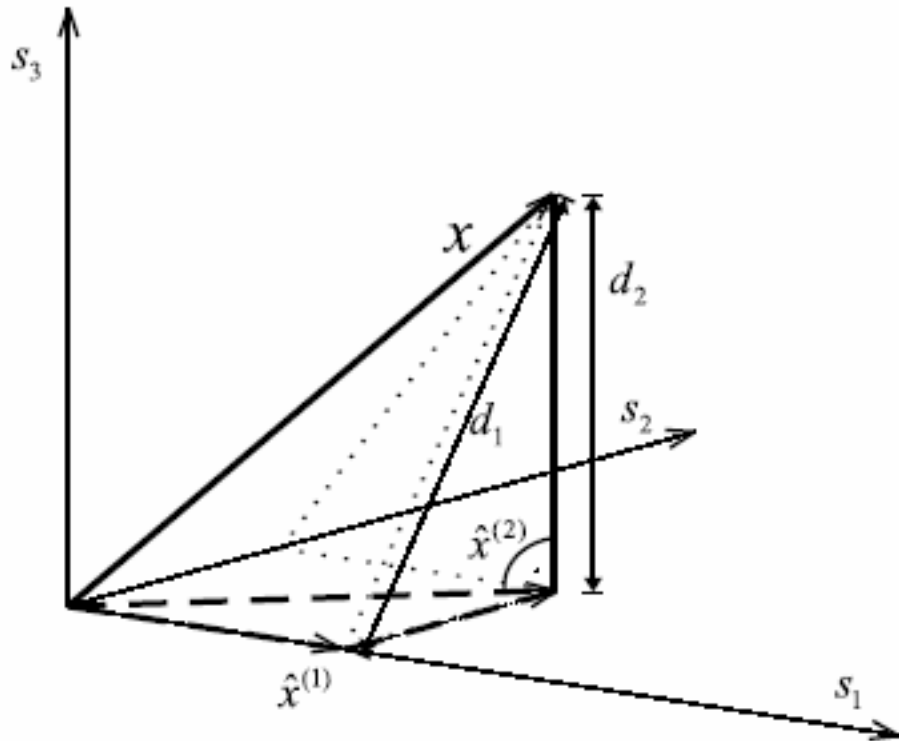
$$B = \{b_1, b_2\} = \{(1.5, -0.5), (1, 1)\}$$

$$\tilde{B} = \{\tilde{b}_1, \tilde{b}_2\} = \{(0.5, -0.5), (0.25, 0.75)\}$$

Príklad reprezentácie signálu v  $x = \{1, 0.5\}$   $E = \mathbb{R}^2$  v báze  $B$ : a)  $B$  je ortonormálna b)  $B$  je neortogonálna

## Príklad Postupnej aproximácie v troch rozmeroch:

Aproximujme  $x \in E$  v uzavretom podpriestore  $S_k$  s bázou  $S_k = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ .



Projekcia vektora  $x \in R^3$  do podpriestoru  $S_2 \subset R^3$  daného ako  $L(\{s_1, s_2\})$ .

Označme ortogonálnu projekciu  $x \in E$  do  $S_k$  ako  $\hat{x}^{(k)}$ .

## Zmena súradníc pri prechode k inej báze v $C^n$ .

Nech  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  a  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  sú bázy Hilbertovho priestoru  $C^n$ . Prepísaním do maticovej notácie dostaneme *štvorcové matice* hodnosti  $n$ :

$$\mathbf{A} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n) \quad \mathbf{B} = (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_n)$$

kde,  $\bar{a}_i = a_i^T$  a  $\bar{b}_i = b_i^T$  sú stĺpcové vektory.

**Veta:** Každý vektor z bázy  $B$  môžeme jednoznačne vyjadriť ako lineárnu kombináciu vektorov bázy  $A$ , t.j. platí  $B = AP_{AB}$ .

**Definícia:** Maticu  $P_{AB}$  nazývame *maticou prechodu* od bázy  $A$  k báze  $B$ . Analogicky označme  $P_{BA}$  maticu prechodu od  $B$  k  $A$ . Potom platí:

$$P_{BA} = P_{AB}^{-1}.$$

**Veta:** Nech  $\bar{x} \in C^n$  má v báze  $A$  súradnice  $\bar{x}(A) = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  a v  $B$  súradnice  $\bar{x}(B) = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ . Potom platí:

$$\bar{x}(B) = P_{AB}^{-1} \bar{x}(A) = P_{BA} \bar{x}(A).$$

V praxi sú naše vstupné vektory reprezentáciou diskretných signálov v **čase**. Potom:

$$A = I_n \quad P_{AB} = I_n^{-1} B = B$$

, kde  $I_n$  je jednotková matica hodnosti  $n$ .

*Doprednou transformáciou* signálu  $x(n) = x(I) = \bar{x} \in C^n$  potom budeme rozumieť zmenu vektora  $\bar{x}$  na vektor  $\bar{y} = \bar{x}(B)$ . Označme  $T = P_{IB}^{-1} = B^{-1}$ :

$$\bar{y} = T\bar{x}$$

, kde

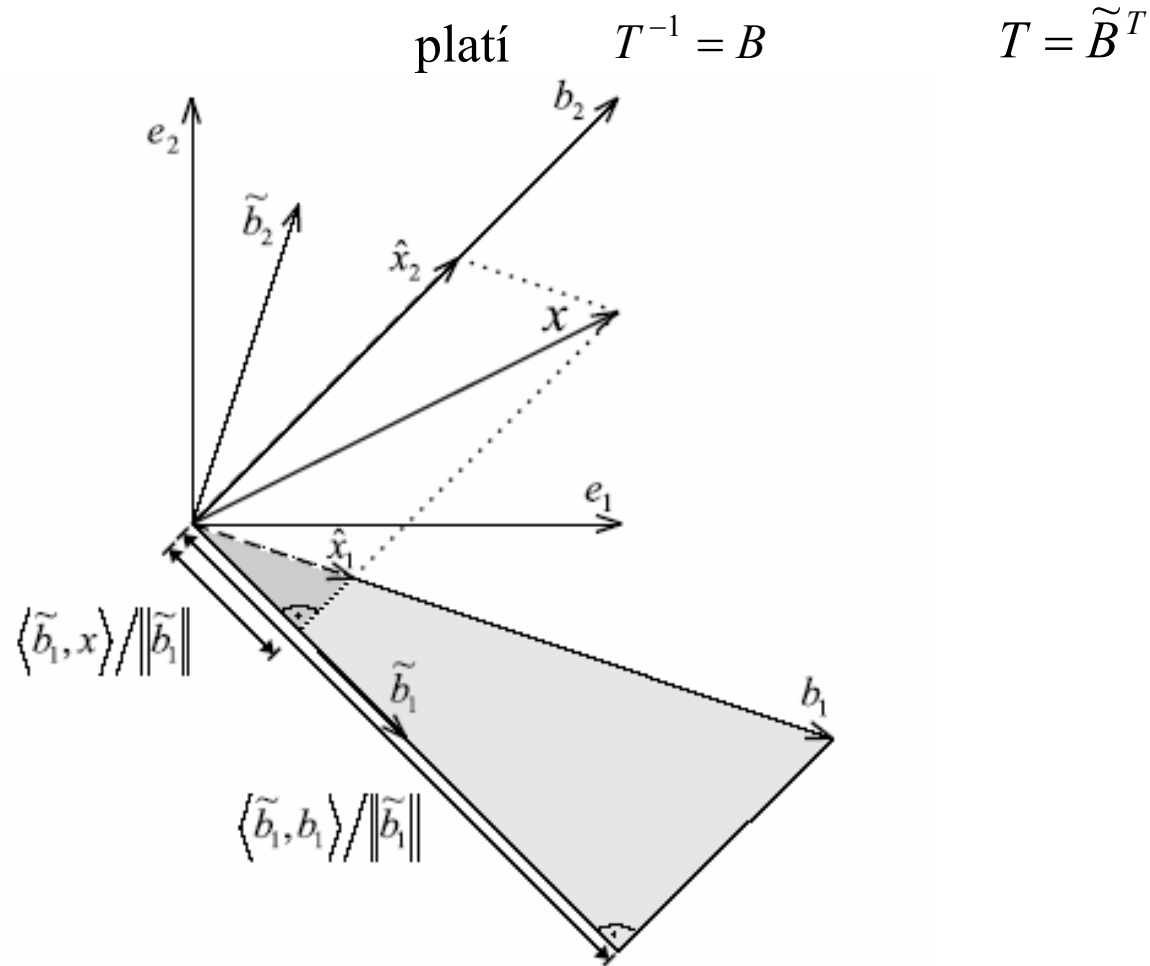
- T je *transformačná matica*
- vektor  $\bar{y}$  predstavuje *spektrum*
- jeho zložky  $y_i$  sú *spektrálne koeficienty*,

Signál  $\bar{x}$  rekonštruujeme *spätnou transformáciou*:

$$\bar{x} = T^{-1}\bar{y} = B\bar{y} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \bar{b}_1 y_1 + \bar{b}_2 y_2 + \dots + \bar{b}_n y_n$$

A) Pre ortonormálne bázy  $B = \{b_i\}$ , platí  $T^{-1} = B$   $T = B^{-1} = B^{*T}$

B) Všeobecný prípad: riadky matice  $T = B^{-1}$  predstavujú báзовé vektory tzv. duálnej bázy  $\tilde{B} = \{\tilde{b}_i\}$  „duálnej“ k  $B = \{b_i\}$



➔ Súradnice vektora  $\bar{x}$  vo vektorovom priestore s bázou  $B = \{b_i\}$ , získame jeho ortogonálnou projekciou do vektorov bázy  $\tilde{B} = \{\tilde{b}_i\}$  duálnej k báze  $B$ .

## Interpretácia:

### Všeobecný prípad („biortogonálny“)

$T = B^{-1}$  - pri transformácii vykonávame skalárne súčiny vstupného vektora s jednotlivými riadkami matice T, t.j. bazovými vektormi, "novej", duálnej bázy  $\tilde{B} = \{\tilde{b}_i\}$ . Keďže jej vektory sú v riadkoch matice T, platí  $T = \tilde{B}^T$ . T.j. platí:

$$B^{-1} = \tilde{B}^T$$

### Ortonormálny prípad:

$T = B^{-1} = B^{*T}$  - pri transformácii vykonávame skalárne súčiny vstupného vektora s jednotlivými riadkami matice T, t.j. bazovými vektormi bázy B, ktoré sa transponovali a skonjugovali. V ortonormálnom prípade  $\tilde{B} = B^*$ .

### Teda platí:

*Súradnice vektora  $\bar{x}$  vo vektorovom priestore s bázou  $B = \{b_i\}$ , získame jeho ortogonálnou projekciou do vektorov bázy  $\tilde{B} = \{\tilde{b}_i\}$  duálnej k báze B*

## Analýza všeobecného – „biortogonálneho“ prípadu

Vektor  $x$  z bázy  $B = \{b_i\}$  rekonštruujeme ako

$$x = \hat{x}_1 + \hat{x}_2 = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2, \quad \text{kde } x(B) = (\alpha_1, \alpha_2)$$

- Ako získať  $\hat{x}_1, \hat{x}_2$  ?
- Pomôže nám ortogonálna projekcia do  $B = \{b_i\}$  ?
- Počítajme  $\hat{x}_1$ . Zvoľme ľubovoľné  $\tilde{b}_1$ , o ktorom si myslíme že projekcia doňho nám pomôže
- Vidíme, že  $\langle \tilde{b}_1, b_2 \rangle = 0$

- Vieme, že  $\hat{x}_1 = \alpha_1 b_1 = \|\hat{x}_1\| \cdot \frac{b_1}{\|b_1\|}$

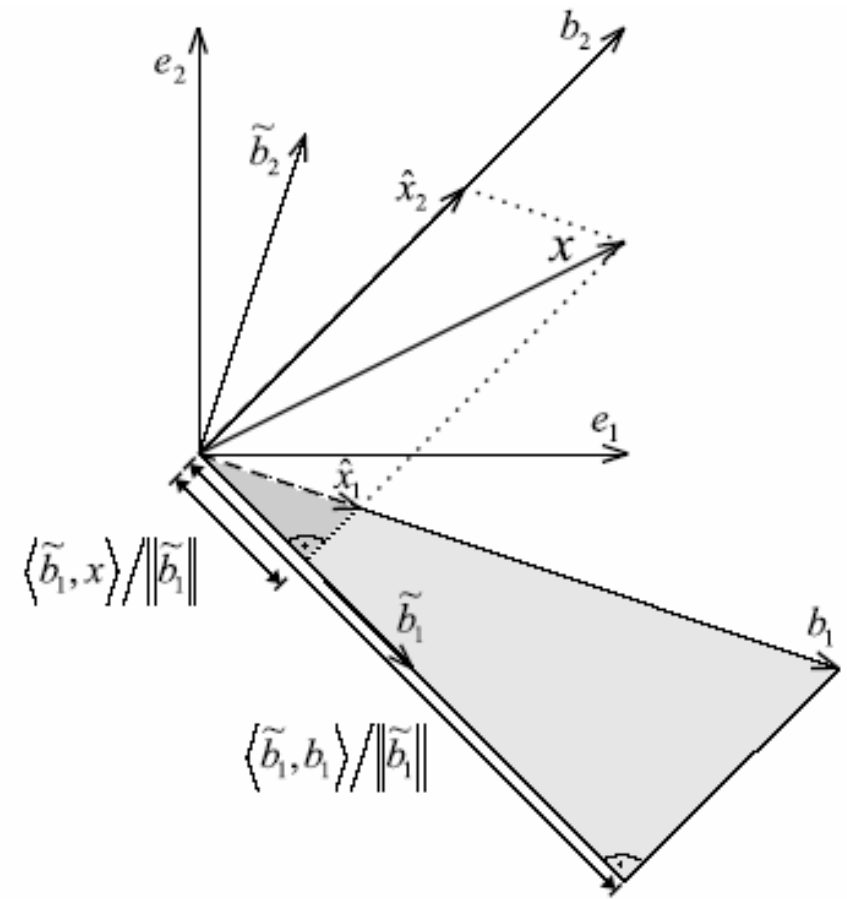
- Do  $\tilde{b}_1$  spravme projekciu  $x$  a aj  $b_1$ . Zpodobnosti znázornených trojuholníkov dostávame:

$$\frac{\langle \tilde{b}_1, \hat{x}_1 \rangle / \|\tilde{b}_1\|}{\|\hat{x}_1\|} = \frac{\langle \tilde{b}_1, b_1 \rangle / \|\tilde{b}_1\|}{\|b_1\|} \Rightarrow \|\hat{x}_1\| = \frac{\langle \tilde{b}_1, \hat{x}_1 \rangle \|b_1\|}{\langle \tilde{b}_1, b_1 \rangle} \Rightarrow \hat{x}_1 = \frac{\langle \tilde{b}_1, \hat{x}_1 \rangle b_1}{\langle \tilde{b}_1, b_1 \rangle} \Rightarrow \hat{x}_1 = \langle \tilde{b}_1, \hat{x}_1 \rangle b_1$$

Vidíme, že potrebujeme také  $\tilde{B} = \{\tilde{b}_i\}$ , pre ktoré  $\langle \tilde{b}_1, b_2 \rangle = 0$  a  $\langle \tilde{b}_1, b_1 \rangle = 1$ , t.j.  $\tilde{b}_1$  má vhodnú veľkosť.

Analogicky pri výpočte  $\hat{x}_2$  dostaneme  $\langle \tilde{b}_1, b_2 \rangle = 0$  a  $\langle \tilde{b}_1, b_1 \rangle = 1$

**T.j. platí  $\forall i, j \in Z ; \langle b_i, \tilde{b}_j \rangle = \delta(i - j)$ , čo je podmienka biortogonality.**



# Základné pojmy

- Pod pojmom „*signál*“ rozumieme vektor v niektorom z *Hilbertových priestorov*.
- Signál zvyčajne predstavuje priebeh nejakej meniacej sa veličiny v *časovej oblasti*.
- *Transformáciou* signálu sa dostávame do tzv. *transformačnej oblasti*, kde je reprezentovaný tzv. *spektrom*.
- *Spektrum* je tvorené *spektrálnymi koeficientami* signálu.
- Najznámejšou transformačnou oblasťou je *Fourierovská*, kde je signál reprezentovaný *frekvenčným* spektrom.
- *Fourierova transformácia* rozkladá signál iba na frekvenčné zložky. Neposkytuje však informáciu, *kedy* signál vykazuje dané frekvenčné charakteristiky (jej bázoové funkcie rovnomerne pokrývajú celú časovú os)
- Ak funkcie, pomocou ktorých sme transformovali sú lineárne závislé, potom netvoria *bázu*, ale všeobecnejšiu množinu *expanzných funkcií*.
- Nadbytočnosť reprezentácie signálu získanej pomocou množiny expanzných funkcií môžeme odstrániť výberom vhodných spektrálnych koeficientov, tzv. *kritickým vzorkovaním* spektra.