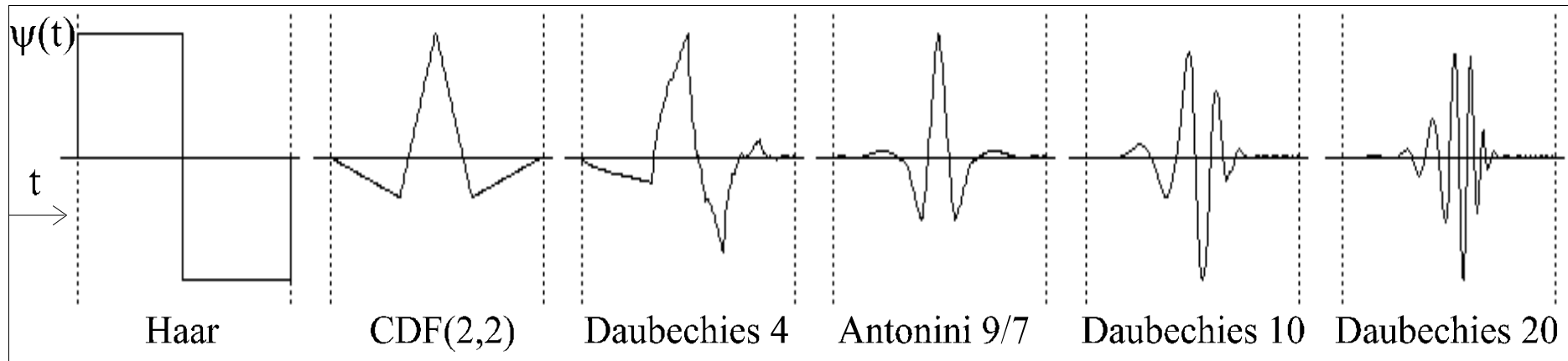


Wavelet, čo to je?

(fr. *ondelette* = vlnka, angl. *wavelet*)

→ predstavte si ho ako vlnový balík
(= v praxi je to čosi medzi **Dirakovým impulzom** a **vlnou**)



Waveletová transformácia (WT)

- funkcie, pomocou ktorých signál transformujeme a potom spätne skladáme sú „**vlnky**“
- vysoko efektívny prostriedok analýze a spracovaní signálov. Oproti **DFT** a **DCT** špecifická v tom, že umožňuje oveľa lepšie v **spektre** signálu zachytiť jeho **časovo-frekvenčné** vlastnosti.

Reprezentácia signálov

- poznáte reprezentáciu signálov **v čase, vo frekvencii** (FT)
- wavelety umožňujú flexibilnú a cielenú reprezentáciu *niekde medzi*.

Histórické korene

- Prvý "wavelet" skonštruoval I.Haar v r. 1910 pri konštrukcii alternatívneho ortonormálneho systému k Fourierovmu
- teórie Littlewood-Paleyho, **harmonická analýza**, atomická dekompozícia a **teória rámcov**
- Objavenie tesných vzťahov medzi **bankami filtrov** a waveletovými bázami. - S.Mallat, 1985

Aplikácie waveletov

- Analýza signálov (spojitých, disktrétnych, fyzikálne veličiny, zvuk, obraz, ...)
- Filtrácia (napr. kôli odstraňovaniu šumu, ...)
- Kompresia (obraz, zvuk, video)
- Počítačová grafika (interpolácie, aproximácie, vyhladzovanie, modelovanie ...)
- Spotrebná elektronika
- ...

Implementácie

PC

DSP

FPGA

Telekomunikácie

WT & audio signály

efektívny prostriedok pri časovo-frekvenčnej analýze a to formou SWT (spojitej waveletovej transformácie)

watermarking (označovanie) audiosignálov

potláčanie šumu v signále

škálovateľné riešenia na internetovú telefóniu

waveletová syntéza zvuku

WT & obraz & video

JPEG 2000 pre kompresiu a prenos statického obrazu

watermarking statického obrazu a videa

Kompresia videa (zatiaľ neštandardizované)

Oblasti, v ktorých sa budeme pohybovať a ktoré sa budú prelínať

- A) Lineárna algebra ➔ [vektory, priestory, transformácie, matice]
 - Hilbertove priestory ➔ [priestory funkcií, hierarchie priestorov]
 - Signály v čase a frekvencii

- B) Fourierova analýza (spojitá, diskretná) ➔ [rôzne druhy FT, STFT]
 - Signály v čase a frekvencii

- C) Diskrétné signály a Z transformácia
 - Impulzové charakteristiky
 - Filtre a banky filtrov

- D) Diskrétné transformácie v maticovom tvare
 - Ich spojenie a realizácia bankami filtrov

Demo MATLABU

A) Hilbertove priestory a rozklady signálov

(Skripta: dodatky, str.117)

Definícia 6.1: *Vektorový priestor* E nad komplexnými C alebo reálnymi číslami R je množina vektorov E spolu s operáciou sčítania a skalárneho násobenia, pre ktoré $(E, +, \cdot)$ je *lineárny priestor* nad poľom C alebo R .

Definícia 6.2: *Podpriestor vektorového priestoru* E je taká podmnožina $M \subset E$, pre ktorú platí:

- 1) $\forall x, y \in M; x + y \in M$
- 2) $\forall x \in M$ a pre $\alpha \in C$ alebo $\alpha \in R$ platí, že $\alpha x \in M$

Definícia 6.3: *Lineárny obal* $L(M)$ množiny $M \subset E$ s prvkami x_i je *podpriestorom* E a platí

$$L(M) = \left\{ \sum_i \alpha_i x_i; \alpha_i \in C \text{ alebo } R, x_i \in M \right\}$$

Definícia 6.4: *Bázou* vektorového priestoru E nazývame neprázdnu podmnožinu $B \subset E$ práve vtedy, ak $L(B) = E$ a B je množina lineárne nezávislých vektorov.

Definícia 6.5: *Hilbertov priestor* E je vektorový priestor E , ktorý je *úplný* a na ktorom je definovaný *skalárny súčin* ktorý označujeme $\langle \cdot, \cdot \rangle$

Definícia 6.6: *Velkosť vektora* x (označujeme $\|x\|$) je v Hilbertových priestoroch daná skalárnym súčinom $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Definícia 6.7: Nech E je Hilbertov priestor, potom

- a) prvky $x, y \in E$ sú *ortogonálne* ($x \perp y$) ak $\langle x, y \rangle = 0$
- b) Prvok x je *ortogonálny* na $M \subset E$, ak $\forall y \in M$ platí $x \perp y$
- c) Podpriestory $M_1, M_2 \subset E$ sa nazývajú *ortogonálne* ak $\forall x \in M_1, \forall y \in M_2$ platí $x \perp y$

Definícia 6.8: Nech M_i sú podpriestory Hilbertovho priestoru E . Ak každý vektor $x \in E$ môžeme jednoznačne vyjadriť v tvare $x = x_1 + x_2 + \dots + x_k$ pričom $x_i \in M_i$, potom E je *priamou sumou* *podpriestorov* M_i . Píšeme $E = M_1 \oplus M_1 \oplus \dots \oplus M_k$

Definícia 6.9: Nech M je podpriestor Hilbertovho priestoru E . Potom *ortogonálny doplnok* k M v E je množina $M^\perp = \{x \in E; x \perp M\}$.

Veta 1.1: Nech podpriestor $M \subset E$ je uzavretý. Potom pre daný vektor $z \in E$ existuje $x \in M$ a $y \in M^\perp$ také, že $z = x + y$. T.j. platí: $E = M \oplus M^\perp$.

Separabilné Hilbertove priestory

Komplexné / reálne priestory

Komplexný priestor C^n je množina všetkých n -tíc $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ s **konečnými hodnotami** x_i na množine C . *Skalárny súčin* je definovaný ako:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i^* \quad x, y \in C^n$$

Analogická definícia platí aj pre R^n . Kvôli jednoznačnosti budeme používať aj klasickú notáciu $\bar{x} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T$.

Priestor $l^2(Z)$

Vektormi x v priestore $l^2(Z)$ sú sekvencie $x(n) \in C$, $n \in Z$, s konečnou energiou $\|x\| < \infty$. Zvyčajne reprezentujú signály diskkrétne v čase. *Skalárny súčin* je definovaný ako:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) y(n)^* \quad x, y \in l_2(Z)$$

Priestor $L^2(R)$

Vektormi x v priestore $L^2(R)$ sú funkcie $x(t) \in C$, $t \in R$, ktoré sú po štvorcoch integrovateľné, t.j. $\|x\| < \infty$. *Skalárny súčin* je definovaný ako:

$$\langle x, y \rangle = \int_{t \in R} x(t) y(t)^* dt \quad x, y \in L_2(R)$$

Pozn.: Analogicky pre funkcie n premenných môžeme definovať priestory $L_2(R^n)$

Ortonormálne bázy

Množina $B = \{b_i\}$ je *ortonormálny systém* v priestore E , ak

$$\forall b_i, b_j \in B; \quad \langle b_i, b_j \rangle = \delta(i - j)$$

$B = \{b_i\}$ je bázou priestoru E , ak všetky $y \in E$ môžeme vyjadriť

$$y = \sum_k \alpha_k b_k$$

kde α_k sú *spektrálne koeficienty*

$$\alpha_k = \langle b_k, y \rangle.$$

Pre takýto systém platí *Parsevalova rovnosť*

$$\|y\|^2 = \sum_i |\langle b_i, y \rangle|^2 \quad \forall y \in E$$

Analogické tvrdenia platia aj pre *ortogonálne systémy*, vo vzťahoch je iba pridaná normalizačná konštanta.

Biortogonálne bázy

Nech množiny $B = \{b_i\}$ a $\tilde{B} = \{\tilde{b}_i\}$ sú bázami priestoru E . Tieto bázy sú navzájom *duálne* resp. *biortogonálne*, ak:

a) ich bázové vektory sú *navzájom ortogonálne*, t. j. *biortogonálne*:

$$\forall i, j \in Z; \quad \langle b_i, \tilde{b}_j \rangle = \delta(i - j)$$

b) existujú kladné konečné konštanty $C, D, \tilde{C}, \tilde{D}$, že pre $\forall x \in E$ platí:

$$C\|x\|^2 \leq \sum_k |\langle b_k, x \rangle|^2 \leq D\|x\|^2 \quad \tilde{C}\|x\|^2 \leq \sum_k |\langle \tilde{b}_k, x \rangle|^2 \leq \tilde{D}\|x\|^2$$

Potom signál $x \in E$ môžeme vyjadriť ako

$$x = \sum_k \langle b_k, x \rangle \tilde{b}_k = \sum_k \langle \tilde{b}_k, x \rangle b_k$$

Parsevalova rovnosť má tvar:

$$\|y\|^2 = \sum_k \langle b_k, y \rangle^* \langle \tilde{b}_k, y \rangle \quad \forall y \in E$$

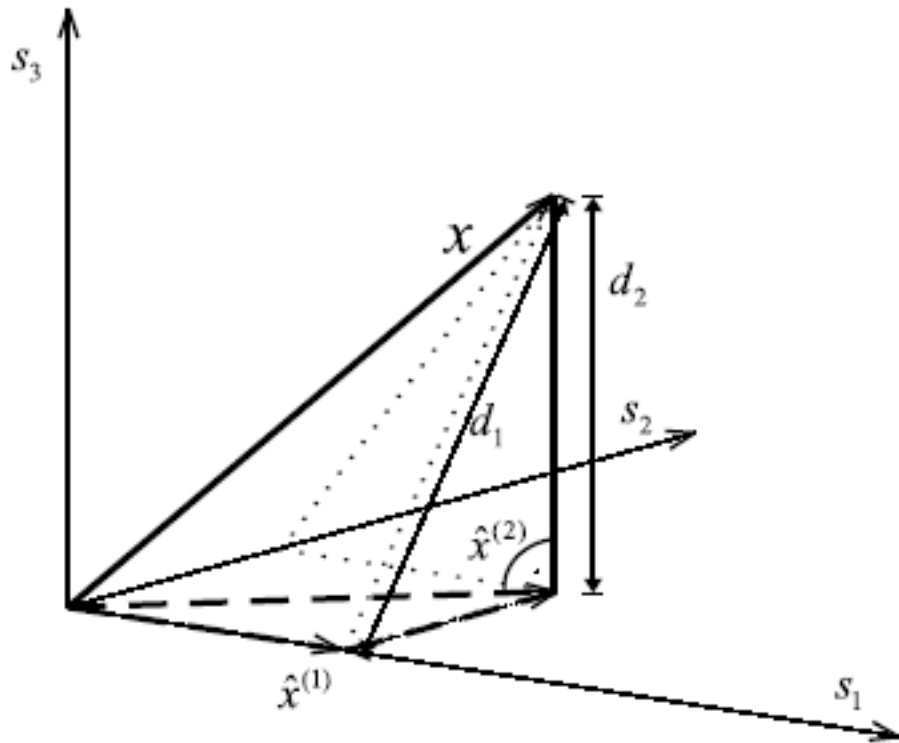
Ortogonalná projekcia a aproximácia signálu

Definícia: *Ortogonalná projekcia(priemet)* vektora x do vektora s je zložka vektora x v smere vektora s nazývaná x_s s veľkosťou:

$$\|x_s\| = \langle x, s \rangle / \|s\|^2 \quad s = x_{s_1} s .$$

Skalár x_{s_1} nazývame *súradnicou vektora x vo vektore s* .

Aproximujme $x \in E$ v uzavretom podpriestore S_k s bázou $S_k = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$.



Projekcia vektora $x \in R^3$ do podpriestoru $S_2 \subset R^3$ daného ako $L(\{s_1, s_2\})$.

Označme ortogonálnu projekciu $x \in E$ do S_k ako $\hat{x}^{(k)}$.

Platí $(x - \hat{x}) \perp S_k$ a zároveň

$$\|x - \hat{x}\| = \min \|x - s\| \quad \forall s \notin S_k$$

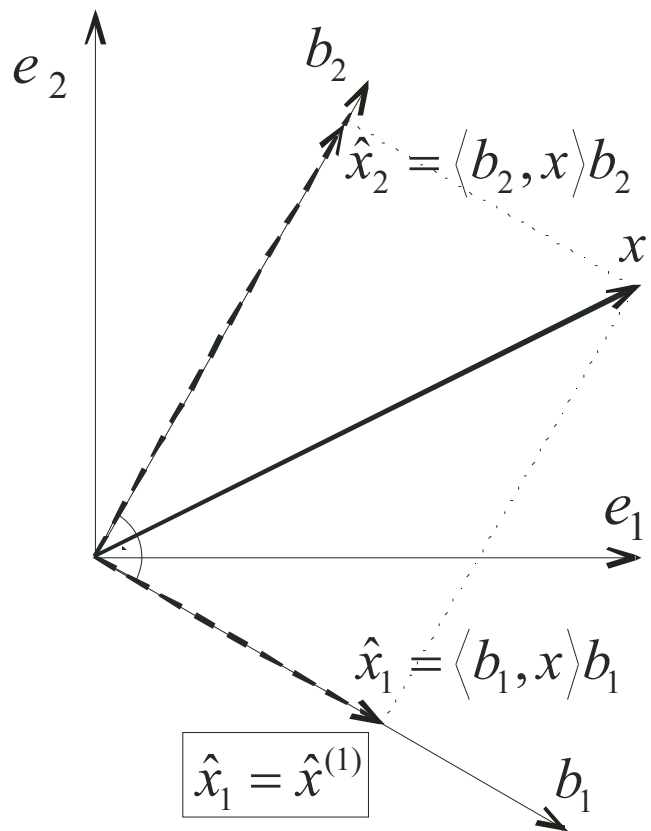
T.j. aproximácia ortogonálnou projekciou je najlepšia v zmysle *najmenších štvorcov*.

Postupná aproximácia:

- A) Nech S_k je *ortonormálna* báza S_k . Označme ortogonálnu projekciu $x \in E$ do S ako $\hat{x}^{(k)} = \sum_i \langle s_i, x \rangle s_i$. Keďže s_i sú vzájomne ortogonálne (stačí aby báza S_k bola ortogonálna), zachováva sa vlastnosť najlepšej aproximácie v zmysle najmenších štvorcov. *Platí vlastnosť postupnej aproximácie*, t.j.:

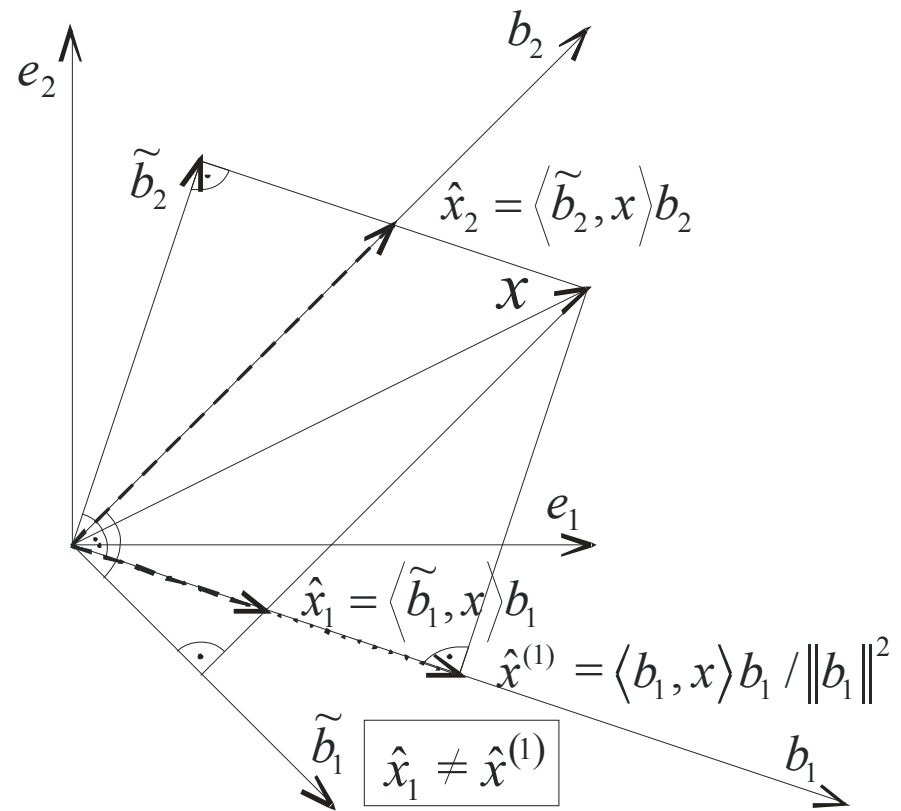
$$\hat{s}^{(k+1)} = \hat{s}^{(k)} + \langle s_{k+1}, x \rangle s_{k+1} .$$

- B) Keď S_k , báza S_k nie je ortogonálna, *neplatí vlastnosť postupnej aproximácie*, t.j. aproximáciu v S_{k-1} nemôžeme priamo použiť, je nutné celú aproximáciu prepočítať znovu.



a) Ortonormálna báza B

$$B = \{b_1, b_2\} = \left\{ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0.5 \right), \left(0.5, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\}$$



b) B je neortogonálna

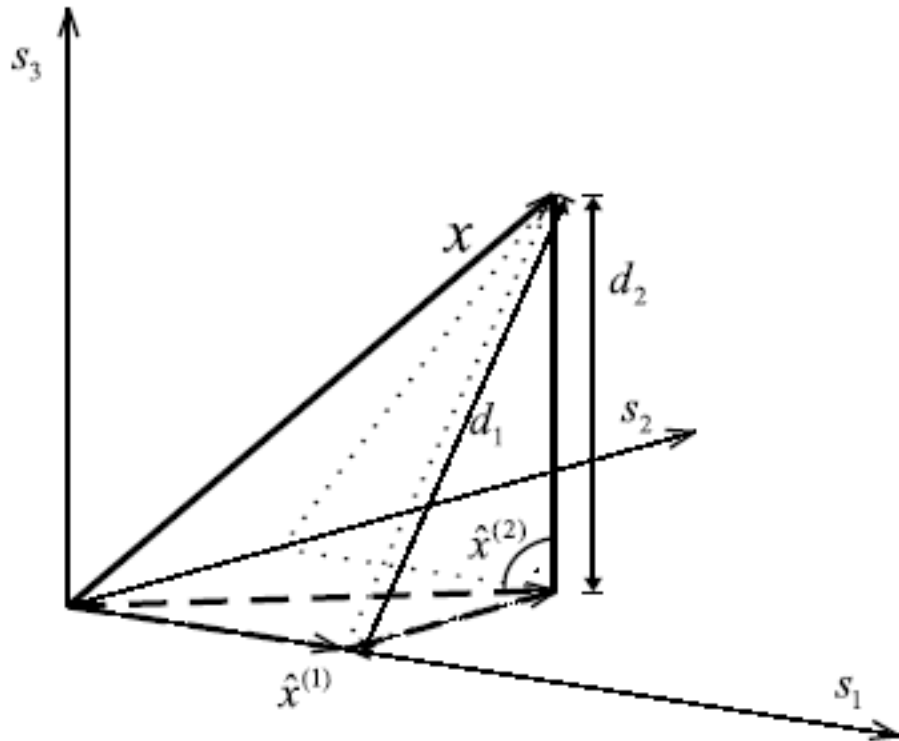
$$B = \{b_1, b_2\} = \{(1.5, -0.5), (1, 1)\}$$

$$\tilde{B} = \{\tilde{b}_1, \tilde{b}_2\} = \{(0.5, -0.5), (0.25, 0.75)\}$$

Príklad reprezentácie signálu v $x = \{1, 0.5\}$ v $E = \mathbb{R}^2$ v báze B : a) B je ortonormálna b) B je neortogonálna

Príklad Postupnej aproximácie v troch rozmeroch:

Aproximujme $x \in E$ v uzavretom podpriestore S_k s bázou $S_k = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$.



Projekcia vektora $x \in R^3$ do podpriestoru $S_2 \subset R^3$ daného ako $L(\{s_1, s_2\})$.

Označme ortogonálnu projekciu $x \in E$ do S_k ako $\hat{x}^{(k)}$.

Gram-Schmidtov Ortogonalizačný proces

Nech $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ je neortogonálnou bázou nejakého Hilbertovho priestoru V . Potom ortogonálnu bázu $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ tohoto priestoru skonštruujeme nasledovne:

$$b_1 = a_1$$

$$b_2 = a_2 - a_{2_{a_1}}$$

$$b_3 = a_3 - a_{3_{a_1}} - a_{3_{a_2}}$$

...

Zmena súradníc pri prechode k inej báze v C^n .

Nech $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ a $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ sú bázy Hilbertovho priestoru C^n . Prepísaním do maticovej notácie dostaneme *štvorcové matice* hodnosti n :

$$\mathbf{A} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n) \quad \mathbf{B} = (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_n)$$

kde, $\bar{a}_i = a_i^T$ a $\bar{b}_i = b_i^T$ sú stĺpcové vektory.

Veta: Každý vektor z bázy B môžeme jednoznačne vyjadriť ako lineárnu kombináciu vektorov bázy A , t.j. platí $B = AP_{AB}$.

Definícia: Maticu P_{AB} nazývame *maticou prechodu* od bázy A k báze B . Analogicky označme P_{BA} maticu prechodu od B k A . Potom platí:

$$P_{BA} = P_{AB}^{-1}.$$

Veta: Nech $\bar{x} \in C^n$ má v báze A súradnice $\bar{x}(A) = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ a v B súradnice $\bar{x}(B) = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$. Potom platí:

$$\bar{x}(B) = P_{AB}^{-1} \bar{x}(A) = P_{BA} \bar{x}(A).$$

V praxi sú naše vstupné vektory reprezentáciou diskretných signálov v **čase**. Potom:

$$A = I_n \quad P_{AB} = I_n^{-1} B = B$$

, kde I_n je jednotková matica hodnosti n .

Doprednou transformáciou signálu $x(n) = x(I) = \bar{x} \in C^n$ potom budeme rozumieť zmenu vektora $\bar{x}$ na vektor $\bar{y} = \bar{x}(B)$. Označme $T = P_{IB}^{-1} = B^{-1}$:

$$\bar{y} = T\bar{x}$$

, kde

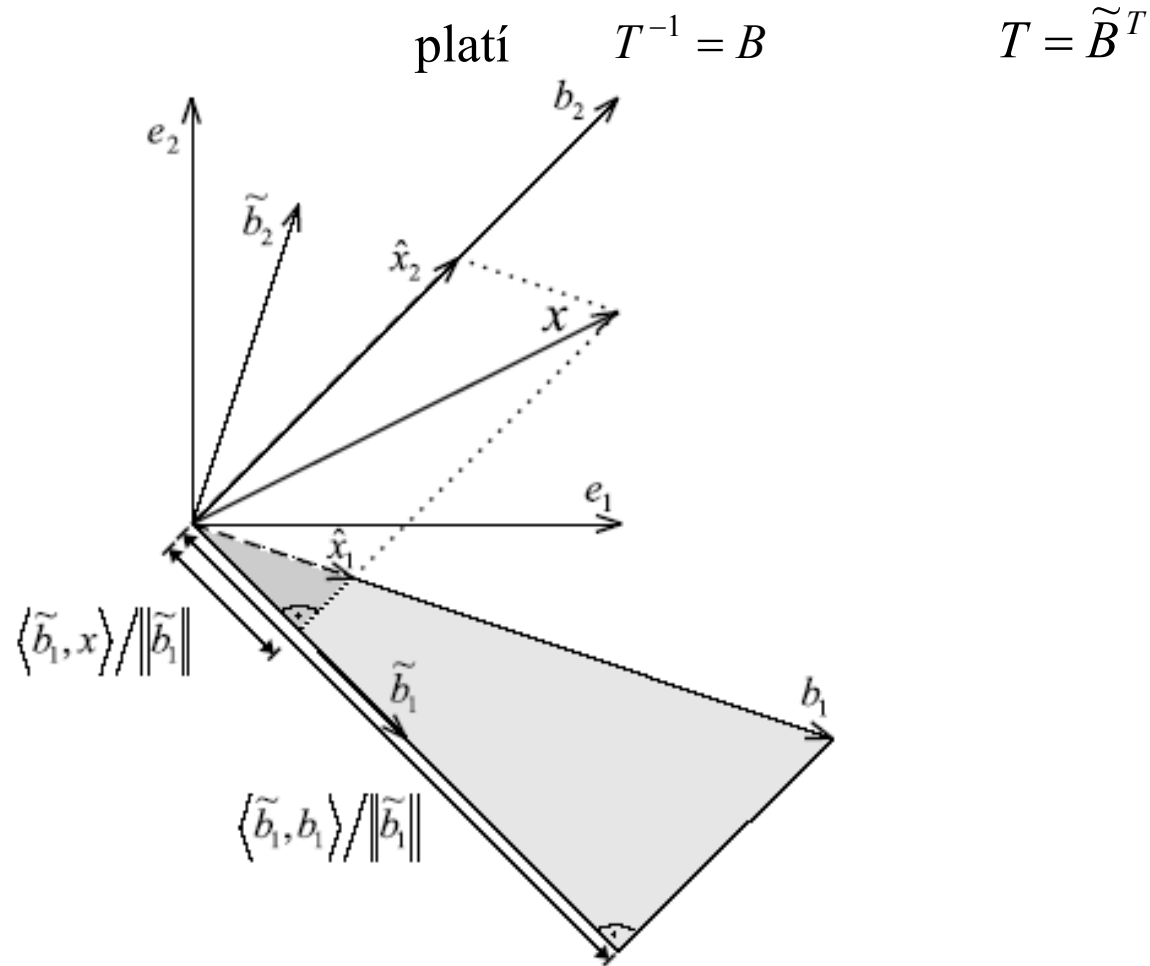
- T je *transformačná matica*
- vektor $\bar{y}$ predstavuje *spektrum*
- jeho zložky y_i sú *spektrálne koeficienty*,

Signál $\bar{x}$ rekonštruujeme *spätnou transformáciou*:

$$\bar{x} = T^{-1}\bar{y} = B\bar{y} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \bar{b}_1 y_1 + \bar{b}_2 y_2 + \dots + \bar{b}_n y_n$$

A) Pre ortonormálne bázy $B = \{b_i\}$, platí $T^{-1} = B$ $T = B^{-1} = B^{*T}$

B) Všeobecný prípad: riadky matice $T = B^{-1}$ predstavujú báзовé vektory tzv. duálnej bázy $\tilde{B} = \{\tilde{b}_i\}$ „duálnej“ k $B = \{b_i\}$



➔ Súradnice vektora $\bar{x}$ vo vektorovom priestore s bázou $B = \{b_i\}$, získame jeho ortogonálnou projekciou do vektorov bázy $\tilde{B} = \{\tilde{b}_i\}$ duálnej k báze B .

Interpretácia:

Všeobecný prípad („biortogonálny“)

$T = B^{-1}$ - pri transformácii vykonávame skalárne súčiny vstupného vektora s jednotlivými riadkami matice T , t.j. bazovými vektormi, "novej", duálnej bázy $\tilde{B} = \{\tilde{b}_i\}$. Keďže jej vektory sú v riadkoch matice T , platí $T = \tilde{B}^T$. T.j. platí:

$$B^{-1} = \tilde{B}^T$$

Ortonormálny prípad:

$T = B^{-1} = B^{*T}$ - pri transformácii vykonávame skalárne súčiny vstupného vektora s jednotlivými riadkami matice T , t.j. bazovými vektormi bázy B , ktoré sa transponovali a skonjugovali. V ortonormálnom prípade $\tilde{B} = B^*$.

Teda platí:

Súradnice vektora $\bar{x}$ vo vektorovom priestore s bázou $B = \{b_i\}$, získame jeho ortogonálnou projekciou do vektorov bázy $\tilde{B} = \{\tilde{b}_i\}$ duálnej k báze B

Analýza všeobecného – „biortogonálneho“ prípadu

Vektor x z bázy $B = \{b_i\}$ rekonštruujeme ako

$$x = \hat{x}_1 + \hat{x}_2 = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2, \quad \text{kde } x(B) = (\alpha_1, \alpha_2)$$

- Ako získať $\hat{x}_1, \hat{x}_2$?
- Pomôže nám ortogonálna projekcia do $B = \{b_i\}$?
- Počítajme $\hat{x}_1$. Zvoľme ľubovoľné $\tilde{b}_1$, o ktorom si myslíme že projekcia doňho nám pomôže
- Vidíme, že $\langle \tilde{b}_1, b_2 \rangle = 0$

- Vieme, že $\hat{x}_1 = \alpha_1 b_1 = \|\hat{x}_1\| \cdot \frac{b_1}{\|b_1\|}$

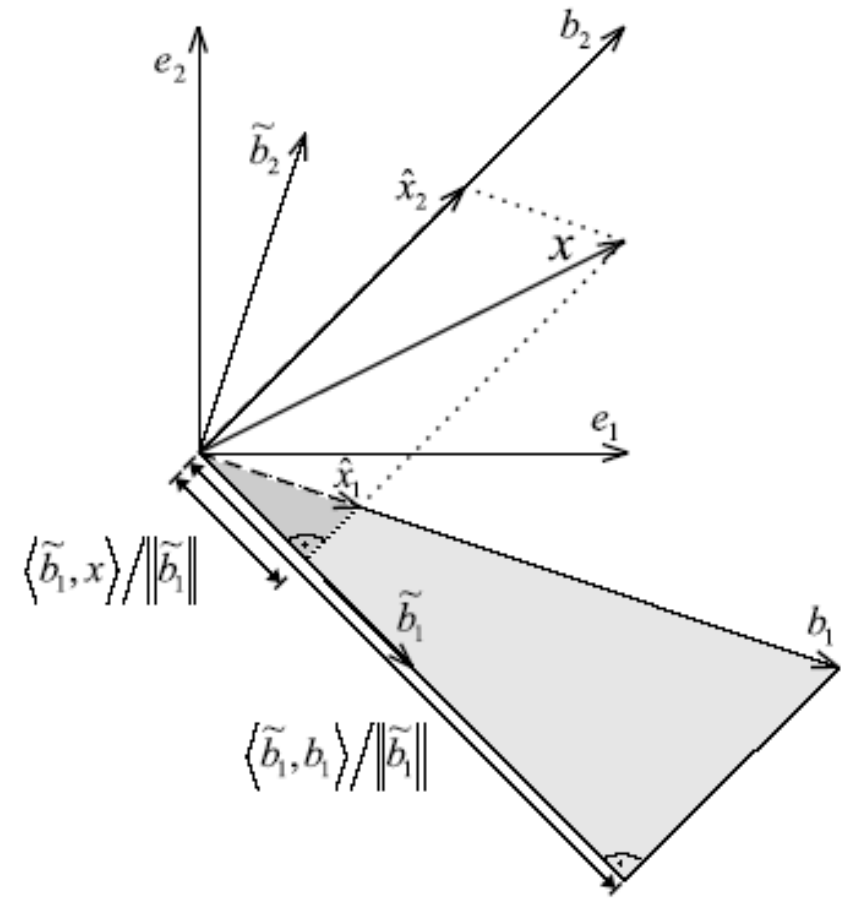
- Do $\tilde{b}_1$ spravme projekciu x a aj b_1 . Zpodobnosti znázornených trojuholníkov dostávame:

$$\frac{\langle \tilde{b}_1, \hat{x}_1 \rangle / \|\tilde{b}_1\|}{\|\hat{x}_1\|} = \frac{\langle \tilde{b}_1, b_1 \rangle / \|\tilde{b}_1\|}{\|b_1\|} \Rightarrow \|\hat{x}_1\| = \frac{\langle \tilde{b}_1, \hat{x}_1 \rangle \|b_1\|}{\langle \tilde{b}_1, b_1 \rangle} \Rightarrow \hat{x}_1 = \frac{\langle \tilde{b}_1, \hat{x}_1 \rangle b_1}{\langle \tilde{b}_1, b_1 \rangle} \Rightarrow \hat{x}_1 = \langle \tilde{b}_1, \hat{x}_1 \rangle b_1$$

Vidíme, že potrebujeme také $\tilde{B} = \{\tilde{b}_i\}$, pre ktoré $\langle \tilde{b}_1, b_2 \rangle = 0$ a $\langle \tilde{b}_1, b_1 \rangle = 1$, t.j. $\tilde{b}_1$ má vhodnú veľkosť.

Analogicky pri výpočte $\hat{x}_2$ dostaneme $\langle \tilde{b}_1, b_2 \rangle = 0$ a $\langle \tilde{b}_1, b_1 \rangle = 1$

T.j. platí $\forall i, j \in Z ; \langle b_i, \tilde{b}_j \rangle = \delta(i - j)$, čo je podmienka biortogonality.



Základné pojmy

- Pod pojmom „*signál*“ rozumieme vektor v niektorom z *Hilbertových priestorov*.
- Signál zvyčajne predstavuje priebeh nejakej meniacej sa veličiny v *časovej oblasti*.
- *Transformáciou* signálu sa dostávame do tzv. *transformačnej oblasti*, kde je reprezentovaný tzv. *spektrum*.
- *Spektrum* je tvorené *spektrálnymi koeficientami* signálu.
- Najznámejšou transformačnou oblasťou je *Fourierovská*, kde je signál reprezentovaný *frekvenčným* spektrom.
- *Fourierova transformácia* rozkladá signál iba na frekvenčné zložky. Neposkytuje však informáciu, *kedy* signál vykazuje dané frekvenčné charakteristiky (jej bázové funkcie rovnomerne pokrývajú celú časovú os)
- Ak funkcie, pomocou ktorých sme transformovali sú lineárne závislé, potom netvoria *bázu*, ale všeobecnejšiu množinu *expanzných funkcií*.
- Nadbytočnosť reprezentácie signálu získanej pomocou množiny expanzných funkcií môžeme odstrániť výberom vhodných spektrálnych koeficientov, tzv. *kritickým vzorkovaním* spektra.