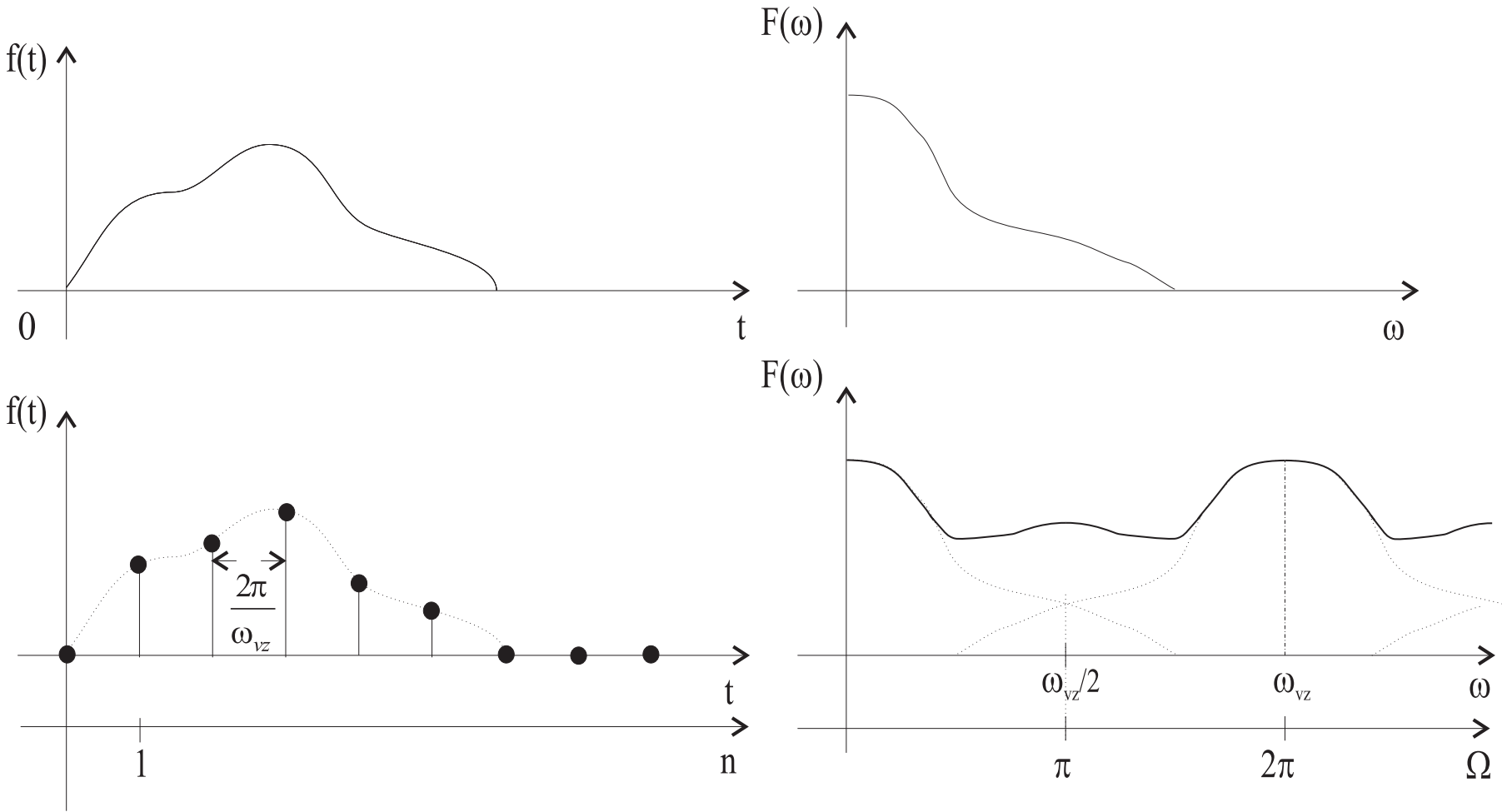


FT a DTFT signálu



$$\Omega = 2\pi\omega / \omega_{vz}$$

6.2 Z-transformácia a diskkrétne systémy

Definícia 6.1 *Nech postupnosť $x(n) \in l^2(\mathbb{Z})$ predstavuje diskrétny signál. Jeho Z-transformácia je definovaná ako*

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}, \quad (6.1)$$

kde z je komplexná premenná.

Z-transformáciou každému bodu komplexnej roviny „ z “, pre ktorý vzťah 6.1 konverguje, priradíme komplexné číslo — funkčnú hodnotu $X(z)$. Niektoré základné vlastnosti Z-transformácie sú uvedené v tabuľke 6.2.

Parametrizáciou premennej z pomocou $z = e^{j\Omega}$ vyberáme iba hodnoty ležiace na jednotkovej kružnici a dostávame **frekvenčnú charakteristiku** $X(\Omega)$ postupnosti $x(n)$. Parameter Ω sa nazýva **pomerová uhlová frekvencia**. Uvedený prechod od $x(n)$ k $X(\Omega)$ je ekvivalentný výpočtu DTFT signálu $x(n)$, pozri tabuľku 6.1.

Ak $x(n)$ predstavuje odpoveď diskrétneho systému na Kroneckerov impulz $u(n)$, potom $X(z)$ je prenosová funkcia systému. V tomto texte sa stretneme iba so systémami s konečnou impulzovou odpoveďou (KIO). Príkladom takýchto systémov sú **KIO filtre**. Vyjadrením frekvenčnej charakteristiky prenosovej funkcie v tvare

$$X(\Omega) = |X(\Omega)|e^{j\phi(\Omega)} = M(\Omega)e^{j\phi(\Omega)} \quad (6.2)$$

Časová oblasť	z -rovina	poznámka
$x(n)$	$X(z)$	$\alpha, \beta \in \mathcal{R}$
$\alpha x(n) + \beta y(n)$	$\alpha X(z) + \beta Y(z)$	
$x(n - k)$	$z^{-k} X(z)$	
$x(n) \star y(n)$	$X(z)Y(z)$	
$\alpha^n x(n)$	$X(z/\alpha)$	
$x(-n)$	$X(z^{-1})$	
$(-1)^n x(n)$	$X(-z)$	

Tabuľka 6.2. Vybrané vlastnosti Z -transformácie

dostávame $M(\Omega)$ — **magnitúdovú** a $\phi(\Omega)$ — **fázovú frekvenčnú charakteristiku** systému. Tie sú jednoznačne určené polohou, počtom a rádom **núl** prenosovej funkcie (KIO systémy majú póly iba v $z = 0$). Pre úplnosť uveďme, že pod formuláciou „funkcia má (niekde) *nulu* resp. **pól**“ rozumieme, že tam má *nulovú* resp. *nekonečnú* funkčnú hodnotu. Podmienky na dosiahnutie linearity fázovej charakteristiky sú zhrnuté napr. v [7]. Detailný popis problematiky Z -transformácie a diskretných systémov je napr. v [7], [21], [22].

Z transformácia:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}, \quad x(n) \in l^2(z)$$

prenosová funkcia:

$$X(z)$$

Frekvenčná charakteristika prenosovej funkcie:

$$X(\Omega), \quad z = e^{j\Omega}$$

Pomerová uhlová frekvencia:

$$\Omega$$

$$X(\Omega) = |X(\Omega)|e^{j\phi(\Omega)} = M(\Omega)e^{j\phi(\Omega)}$$

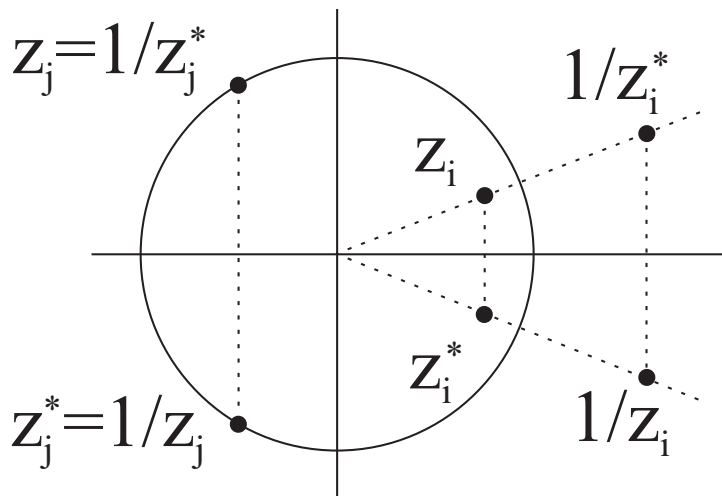
Magnitúdová frekvenčná charakteristika:

$$M(\Omega)$$

Fázová frekvenčná charakteristika:

$$\phi(\Omega)$$

Prenosová funkcia - nuly



$$X(z) = \prod_l (z - z_l)^{k_l}$$

k_l = nula koľkého rádu je v z_l

Prenosová funkcia s reálnymi koeficientami

Ak $X(z)$ má nuly v z_i a aj v z_i^* , potom má reálne koeficienty

Príklad: kedy má nasledovná funkcia reálne koeficienty?

$$X(z) = (z - a)(z - b) = z^2 - z(a + b) + ab$$

Lineárna fázová charakteristika frekvenčných charakteristík

Ak $X(z)$ má nuly v z_i a aj v $1/z_i$, potom má lineárnu fázovú frekvenčnú charakteristiku

Príklad: kedy má nasledovná funkcia lineárnu fázovú charakteristiku?

$$X(z) = (z - a)(z - b) = z^2 - z(a + b) + ab = z \left(z - (a + b) + z^{-1}ab \right)$$

$$X(\Omega) = e^{j\Omega} \left[-(a + b) + (e^{j\Omega} + e^{-j\Omega}ab) \right] \stackrel{ab=1}{=} e^{j\Omega} \left[-(a + b) + 2 \cos(\Omega) \right]$$

Nekauzálny signály

Doteraz: KIO filtre kauzálny a impulzové charakteristiky $h(n)$ pre $n \in N$

Zovšeobecnenie:

Ak $n \in Z$, prvok pri $n=0$ budeme označovať bodkou: Napr: $x(n) = \{1, \dot{3}, 1\}$

<i>Časová oblasť</i>	<i>Z-rovina</i>	<i>Frekvenčné char.</i>
$x(n)$	$X(z)$	$X(\Omega)$
$x(n-k)$	$z^{-k} X(z)$	$e^{-j\Omega k} X(\Omega)$
$x(n) * y(n) = \sum_k x(n-k)y(k)$	$X(z)Y(z)$	$X(\Omega)Y(\Omega)$
$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$X^*(\Omega) = X(-\Omega) \quad ak \quad x(n) \in R$
$(-1)^n x(n)$	$X(-z)$	$X(\Omega + \pi)$
$\langle x(k), x(k-n) \rangle$	$X_*(z^{-1})X(z)$	$X^*(\Omega)X(\Omega)$
$x(Mn)$	$X(z^{1/M})$	$X(\Omega/M)$
$x(n/M)$	$X(z^M)$	$X(M\Omega)$

Je jasné napr. nasledovné:

- Čo je viacnásobná „nula“ ?
- Aká je situácia na jednotkovej kružnici? (omega, vplyv núl, pólov, ...)
- Rukolapný súvis medzi násobením a konvolúciou?
- Súvis medzi DP a HP charakteristikou v 4. riadku tabuľky?
- **Ako si predstaviť $X(\Omega)$ v komplexnej rovine? (skladanie točiacich sa vektorov)**

Autokorelácia a jej frekvenčné charakteristiky.

Autokoreláciou sekvencie $h(n)$ budeme nazývať sekvenciu:

$$p(n) = \langle h(k), h(k-n) \rangle$$

Použitím DTFT dostávame:

$$P(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(n) e^{-i\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) h^*(k-n) e^{-i\Omega n} = H^*(\Omega) H(\Omega) = |H(\Omega)|^2$$

$P(\Omega)$ je reálna nezáporná funkcia

Platí:

$$|H^*(\Omega)| = |H(\Omega)|$$

$$H(\Omega) H(\Omega) \neq |H(\Omega)|^2$$

$$|H(\Omega)^2| \neq |H(\Omega)|^2$$

Autokorelácia a „z“ rovina

Vyjadrením $P(\Omega) = H^*(\Omega)H(\Omega)$ v Z-rovine dostaneme:

$$P(z) = H_*(z^{-1})H(z)$$

, kde označenie * znamená konjugáciu koeficientov, nie celej funkcie. Vidíme, že ak z_k je nula $P(z)$ potom nula je aj $1/z_k^*$, t.j. nuly sa vyskytujú iba v pároch. Navyše ak $h(n)$ je reálne, potom $P(z)$ má nuly aj v z_k^* a $1/z_k$.

Platí:

$$P(z) = \alpha \prod_{i=1}^{N_1} \left((1 - z_{1_i} z^{-1})(1 - z_{1_i}^* z) \right) \prod_{i=1}^{N_2} \left((1 - z_{2_i} z^{-1})(1 - z_{2_i}^* z) \right)$$

, kde N_1 je počet párov núl na jednotkovej kružnici (platí $|z_{1_i}| = 1$, pár je vlastne dvojnásobný koreň) a N_2 je počet párov núl mimo jednotkovej kružnice (platí $|z_{2_i}| < 1$).