

Wavelety

*Prípustné wavelety
(zaručená rekonštrukcia)*

Wavelety s nekonečnou regularitou

Vlastnosti: + funkcia mierky $\varphi(\tau)$ existuje
+ analýza je ortogonálna
+ symetrické $\psi(\tau)$, $\varphi(\tau)$
- $\psi(\tau)$ a $\varphi(\tau)$ nemajú kompaktný nosič
- rýchly algoritmus neexistuje

Použitie: SWT až DWT (s NIO filrami)

Príklady: Meyerove, sinc wavelety

Približne prípustné wavelety

Vlastnosti: + $\psi(\tau)$ vyjadrené v uzavretom tvare
+ možná symetria $\psi(\tau)$
- rekonštrukcia nie je zaručená
- $\psi(\tau)$ nemajú kompaktný nosič
- funkcia mierky $\varphi(\tau)$ neexistuje
- analýza nie je ortogonálna
- rýchly algoritmus neexistuje

Použitie: analýza spojitých signálov

Príklady: Gaussov a Morletov wavelet
, mexický klobúk

▲ Semiortogonálne spline wavelety
bez kompaktného nosiča

Wavelety s kompaktným nosičom pre $\psi(\tau)$, $\varphi(\tau)$ a rýchlym algoritmom výpočtu

Ortogonalné wavelety

Vlastnosti: + $\psi(\tau)$, $\varphi(\tau)$ majú istý počet
nulových momentov
+ KIO filtre pri implementácii WT
- možné iba asymetrické $\psi(\tau)$, $\varphi(\tau)$,
maximálne približne symetrické

Použitie: SWT až DWT rýchlym algoritmom

Príklady: Daubechies(Db), symlety, Coiflety,
Burt-Adelson, Battle-Lemarie
wavelety

Biortogonálny pár waveletov

Vlastnosti: + $\psi(\tau)$, $\varphi(\tau)$ a ich duály majú
istý počet nulových momentov
+ KIO filtre pri implementácii WT
+ možné iné vlastnosti analýzy a syntézy
+ možné symetrické $\psi(\tau)$, $\varphi(\tau)$
- strata ortogonalita
a vlastnosti postupnej aproximácie

Použitie: SWT až DWT rýchlym algoritmom

Príklady: Biortogonálne spline, Cohononen-
Daubechies-Feauveau (CDF)
a Desaulerious-Dubuc(DD) wavelety

Analýza vlastností funkcií mierky a waveletov v ortogonálnom prípade

Označenie:

$\varphi(t), \psi(t)$ - funkcia mierky a wavelet spĺňajúca relácie zmeny rozlíšenia

$h(n), g(n)$ - zjednodušené označenie koeficientov pre zmenu rozlíšenia $h_{mr}(n)$,
 $g_{mr}(n)$

$H(\omega), G(\omega)$ - DTFT koeficientov $h(n)$ a $g(n)$

Teorém 1 : Ak platí $\int \varphi(t)dt \neq 0$ potom $\sum_n h(n) = \sqrt{2}$. Pozn.: podmienka $\int \varphi(t)dt \neq 0$ je nutná aby MRA bola kompletná.

Teorém 2 : Ak celočíselné posuny $\varphi(t)$ sú navzájom ortonormálne, t.j. $\int \varphi(t)\varphi(t-k)dt = \delta(k)$ potom $\sum_n h(n)h(n-2k) = \delta(k)$.

Dôsledky:

$$\sum_n h(2n) = \sum_n h(2n+1) = \sqrt{2}/2$$

$$\sum_n |h(n)|^2 = 1$$

Teorém 3 : Ak $\varphi(t)$ má kompaktnú podporu na intervale $\langle 0, N-1 \rangle$ a $\varphi(t-k)$ sú lineárne nezávislé, potom $h(n)$ má kompaktnú podporu na $0 \leq n \leq N-1$, t.j. $h(n) = 0$ pre $n < 0$ a pre $n > N-1$, dĺžka sekvencie $h(n)$ je N .

Vlastnosti $\varphi(t), \psi(t)$	Vlastnosti $h(n), g(n)$	Vlastnosti $H(\omega), G(\omega)$	Poznámka
$\int \varphi(t) dt = 1$	$\sum_n h(n) = \sqrt{2}$	$H(0) = \sqrt{2}$	Teorém 1
$\int \varphi(t)\varphi(t-k) dt = \delta(k)$	$\sum_n h(n)h(n-2k) = \delta(k)$ ak $k=0$ platí $\sum_n h(n) ^2 = 1$	$ H(\omega) ^2 + H(\omega + \pi) ^2 = 2$	Teorém 2
$\sum_l \varphi(t-l) = \sum_l \varphi(l) = 1$	$\sum_n h(2n) = \sum_n h(2n+1)$	$H(\pi) = 0$	
$\int \psi(t) dt = 0$	$\sum_n g(n) = 0$	$G(0) = 0$	
$\int \varphi(t-n)\varphi(t-m) dt = 0$	$g(n) = \pm(-1)^n h(M-n)$	$ G(\omega) = H(\omega + M\pi) $	M je nepárne
	$\sum_n h(n)g(n-2k) = 0$	$ H(\omega) ^2 + G(\omega) ^2 = 2$	

Prehľad vlastností pri ortonormálnych WR a DWT

- Aby mohli byť splnené podmienky pre $h(n)$, treba aby N , dĺžka $h(n)$ bola párna.
- $h(n)$ a $g(n)$ sa navzájom jednoznačne určujú. Potom ...
- K danému ortogonálnemu waveletu existuje jediná funkcia mierky (a naopak).
- Ak $h(n)$ spĺňa uvedené podmienky, sú zaručené iba základné vlastnosti $\varphi(t)$ (integrovateľnosť, ortonormalita, ...) pričom $\varphi(t)$ môže mať extrémne neregulárny, prípadne fraktálový charakter.
- regularita waveletu a k nemu náležiackej funkcie mierky je rovnaká (wavelet je ich konečná lineárna kombinácia)
- Pri návrhu $h(n)$ s dĺžkou N , ostáva po splnení nutných $N/2+1$ podmienok ešte $N/2-1$ stupňov voľnosti. Tieto môžeme využiť aby $\varphi(t), \psi(t)$ resp. $h(n), g(n)$ mali požadované vlastnosti, ako napr. istú regularitu, aproximačné vlastnosti ...

Pozn.1: nutných $N/2+1$ podmienok je:

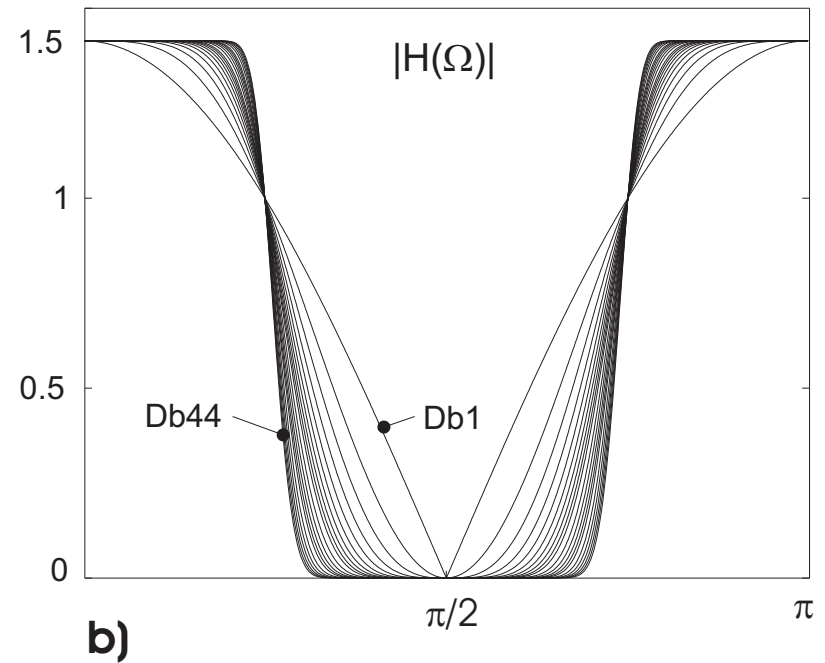
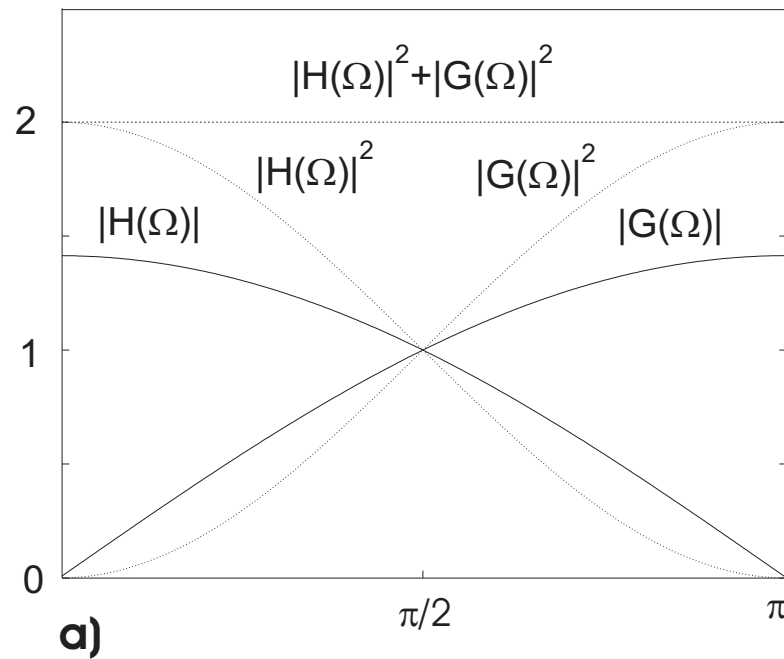
a) 1.podmienka: $\sum_n h(n) = \sqrt{2}$ kvôli existencii $\varphi(t)$

b) $N/2$ podmienok kvôli ortonormalite $\varphi(t)$:

$$\sum_n h(n)h(n-2k) = \delta(k) \quad k = 0, 1, \dots, N/2 - 1$$

Pozn.2: Nech $|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 2$. Označme $P(\omega) = |H(\omega)|^2$. Potom P je tzv.

Polpásmový filter t.j. v Z rovine platí : $P(z) + P(-z) = 2$



DTFT dilatačných koeficientov a ich vlastnosti: a) celková situácia pri Db1(Haarov) wavelete b) vplyv rádu waveletu na frekvenčné vlastnosti koeficientov mierky pri systéme Daubechieovej waveletov

Kaskádové algoritmy, generovanie $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ vo frekvenčnej a časovej oblasti.

Ako vypočítať $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ ak poznáme koeficienty pre zmenu mierky?

Vychádzajme z rovníc:

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n) \varphi(2t - n)$$

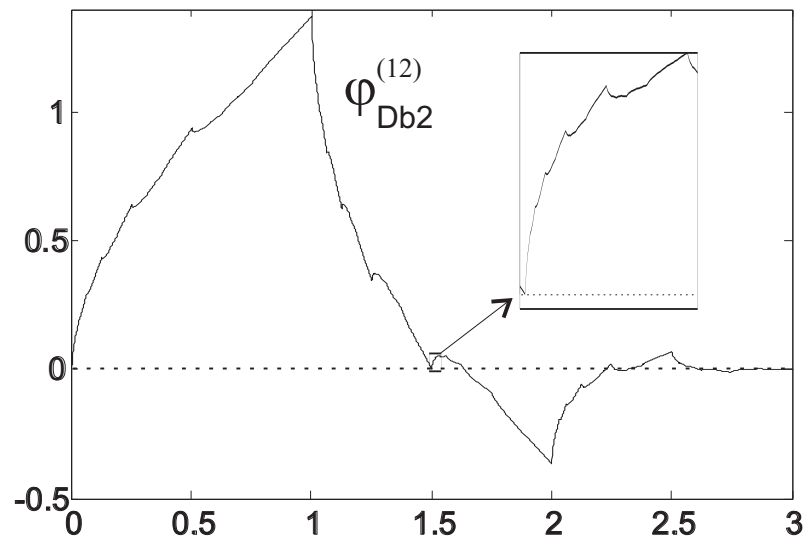
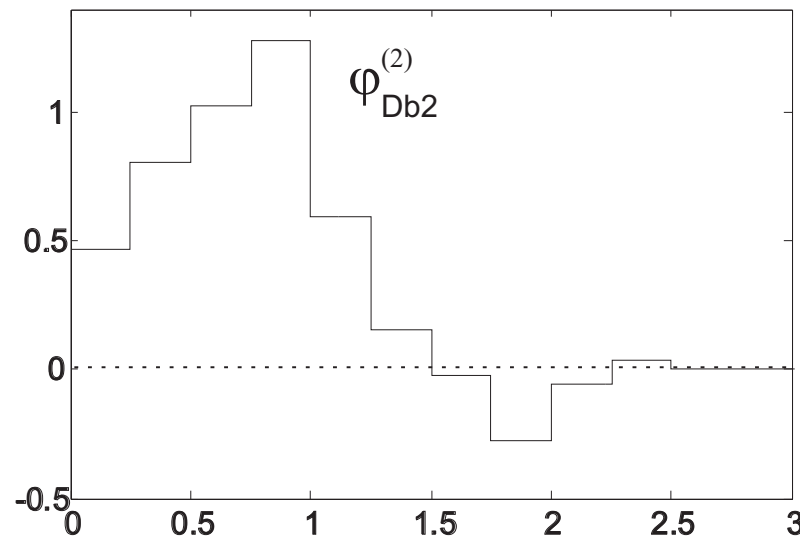
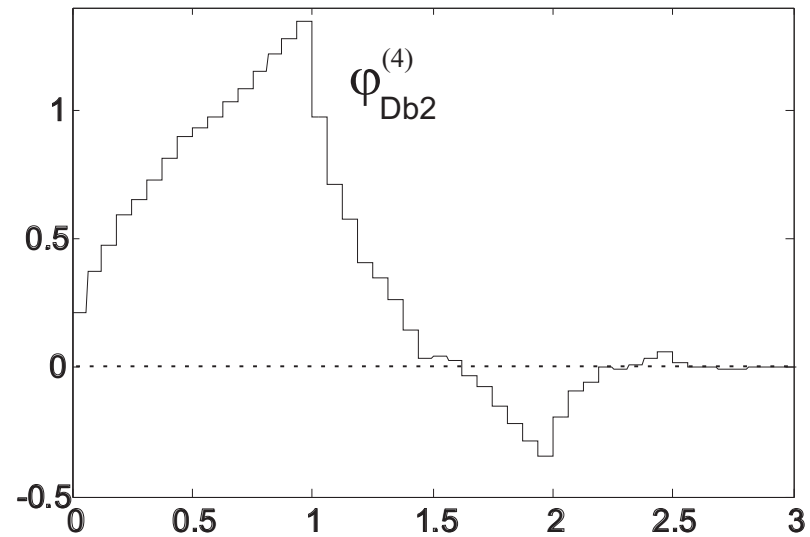
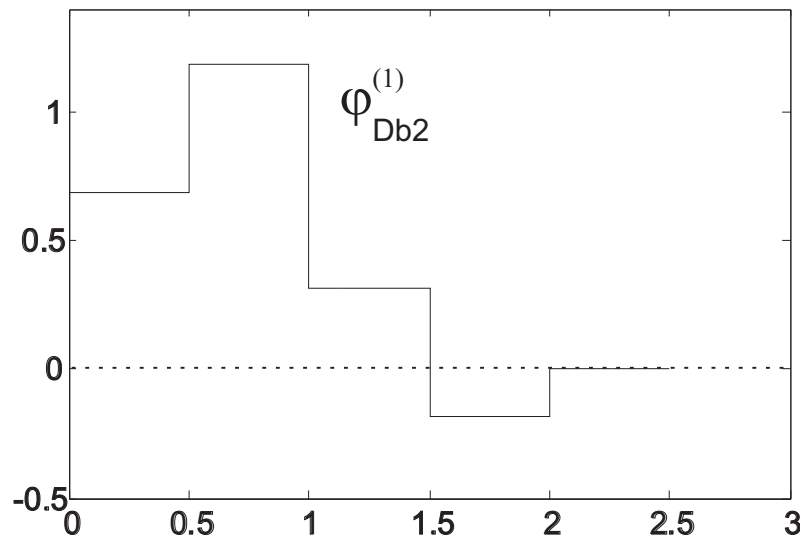
$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{mr}(n) \varphi(2t - n)$$

Tieto rovnice môžeme riešiť *iteračne*, pričom ak postup bude konvergovať k pevnému bodu, potom je pevný bod hľadaným riešením. Iterácie sú definované:

$$\varphi^{(k+1)}(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n) \varphi^{(k)}(2t - n)$$

$$\psi^{(k+1)}(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n) \psi^{(k)}(2t - n)$$

Uvedený iteračný postup sa nazýva aj *kaskádový algoritmus*.



Generovanie funkcie mierky Db2 waveletu kaskádovým algoritmom v čase. Výpočet
zobrazený po 1,2,4 a 12 iteráciách. Počiatočný signál bola "Box" funkcia. Vpravo dole je
zo zväčšeniny zrejмый fraktálový charakter. Porovnajte s tvarmi báзовých funkcií
priestorov V

Hľadáme teraz riešenie vo frekvenčnej oblasti.

Použitím Fourierovej transformácie dostaneme:

$$\varphi^{(k+1)}(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n) \varphi^{(k)}(2t - n) \quad \rightarrow \quad \Phi^{(k+1)}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} H_{mr}(\omega/2) \Phi^{(k)}(\omega/2)$$

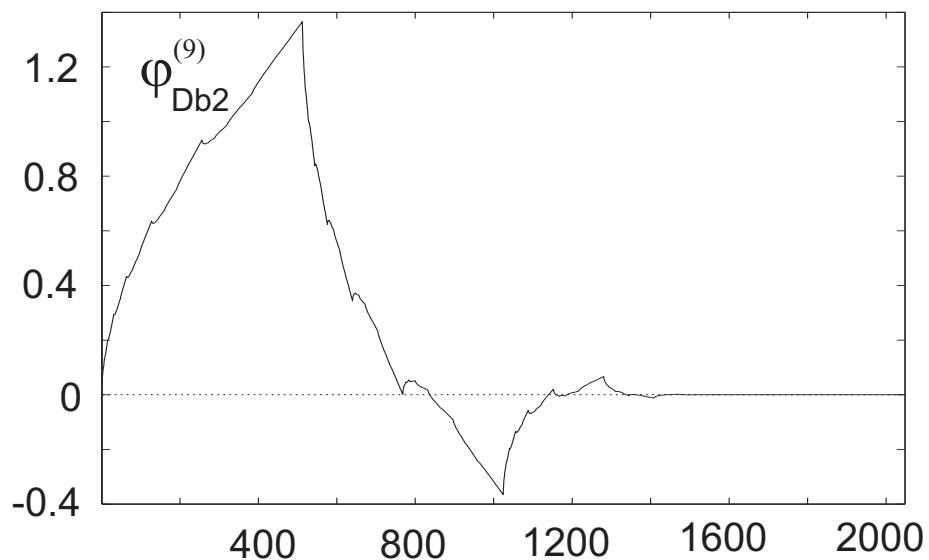
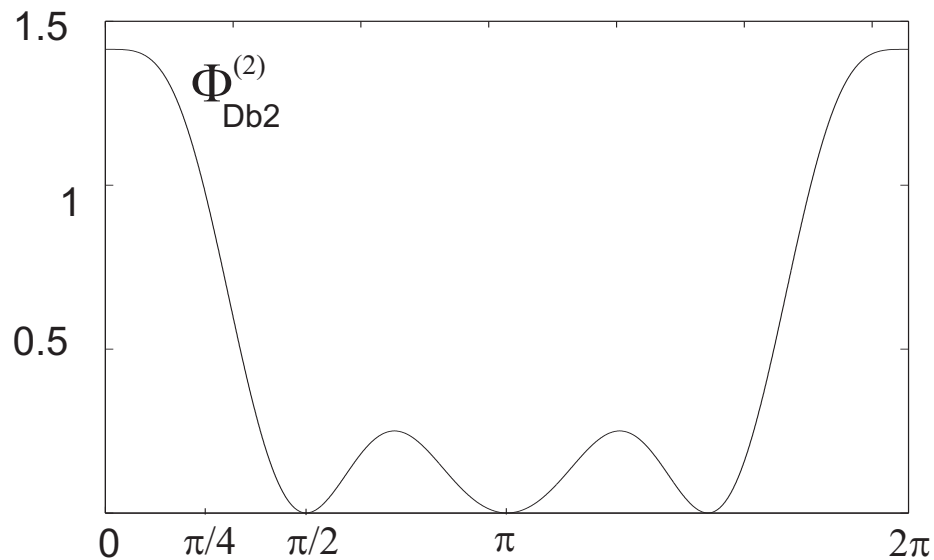
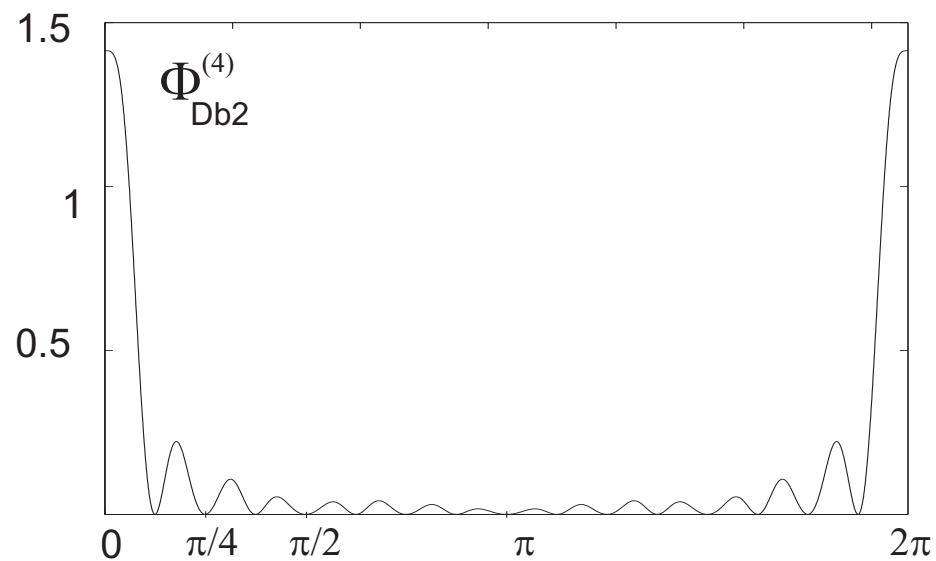
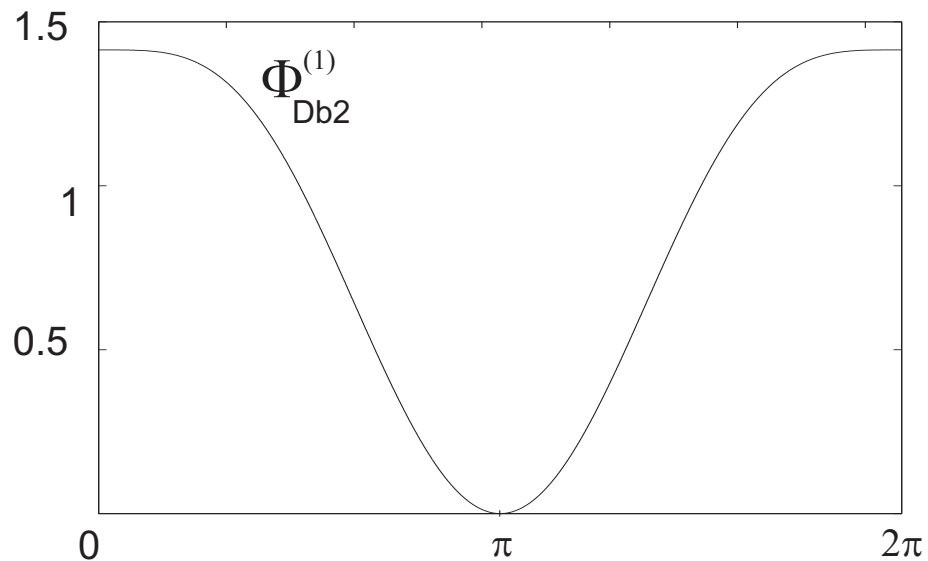
riešením tejto rovnice pre $k \rightarrow \infty$ dostávame

$$\Phi^{(\infty)}(\omega) = \Phi^{(\infty)}(0) \prod_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} H_{mr}(\omega/2^k) \right]$$

Ak táto limita existuje a je spojitá v $\omega = 0$ potom $\Phi(\omega) = \Phi^{(\infty)}(\omega)$. Analogicky:

$$\Psi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} G_{mr}(\omega/2) \prod_{k=2}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} H_{mr}(\omega/2^k) \right]$$

Výsledok oboch prípadoch nezávisí od tvaru $\varphi^{(0)}(t)$ ale iba od hodnoty $\Phi^{(k)}(0) = \int \varphi^{(k)}(t) dt = A_0 > 0$, ktorá je invariantná vzhľadom na iterácie.



Generovanie funkcie mierky Db2 waveletu kaskádovým algoritmom vo frekvencii.
 Zobrazená iterácia $n=1,2,4$ (vždy iba prvá perióda) Výsledná funkcia mierky je vypočítaná
 pre $n=9$ vzorkovaním periódy na 2048 vzoriek a následnou IDFT.

Momentové vlastnosti

k-te momenty $\varphi(t), \psi(t)$ sú definované:

$$m_{\varphi}(k) = \int t^k \varphi(t) dt \qquad m_{\psi}(k) = \int t^k \psi(t) dt$$

diskrétny k-te momenty $h(n), g(n)$ sú definované:

$$\mu_h(k) = \sum_n n^k h(n) \qquad \mu_g(k) = \sum_n n^k g(n)$$

z diskretných momentov μ_h, μ_g môžeme vypočítať *spojité momenty* pomocou:

$$m_{\varphi}(k) = \frac{1}{(2^k - 1)\sqrt{2}} \sum_{l=1}^k \binom{k}{l} \mu_h(l) m_{\varphi}(k-l) \qquad m_{\psi}(k) = \frac{1}{2^k \sqrt{2}} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \mu_g(l) m_{\varphi}(k-l)$$

na začiatku výpočtu si treba uvedomiť, že $m_{\varphi}(0) = 1$.

Počet nulových momentov $m_\psi(k)$ (okrem iného) dáva informáciu o plochosti $H(\omega)$ a hladkosti $\psi(t)$ ktoré rastú priamo úmerne. Okrem toho, čím viac máme waveletových momentov je nulových, tým lepšiu aproximáciu získame pri projekcii signálu $f(t) \in L^2(R)$ do V_m .

Čím väčší počet nulových momentov $m_\varphi(k)$ je dôležitý pri aproximácii signálu $f(t) \in L^2(R)$ vo V_m pomocou vzoriek $f(t)$ namiesto projekčných koeficientov. Takisto sa zlepšuje aj symetria $\varphi(t)$.

Príkladom waveletového systému, ktorého dizajn je založený na momentových vlastnostiach $\varphi(t), \psi(t)$ sú tzv. *Coiflets*. Je to ortonormálny systém v ktorom sa snažíme nulovať momenty waveletu a rovnako aj funkcie mierky:

$$m_\varphi(k) = 0, \quad m_\psi(k) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, L-1$$

K-regulárne filtre

FIR filter s impulzovou odpoveďou $h(n)$, ktorá spĺňa podmienky v Tab.1 sa nazýva *K-regulárny* vtedy ak platia nasledovné ekvivalentné tvrdenia:

1) $H(\omega)$ má *K-násobnú nulu* v $\omega = \pi$

2) prvých K-diskrétnych aj spojitých waveletových momentov je nulových, t.j.:

$$m_{\psi}(k) = 0, \mu_{\psi}(k) = 0, \text{ pre } k = 0, 1, \dots, (K - 1)$$

3) polynomické sekvencie stupňa $\leq (K - 1)$ môžu byť vyjadrené lineárnou kombináciou posunov $h(n)$.

4) polynómy stupňa $\leq (K - 1)$ môžu byť vyjadrené lineárnou kombináciou posunov $\varphi(t)$

Ak je $h(n)$ K -regulárny, potom Z transformáciu $h(n) : H(z) = \sum_n h(n)z^{-n}$ môžeme napísať v tvare:

$$H(z) = \left(\frac{1 + z^{-1}}{2} \right)^K L(z)$$

pričom $L(z)$ nemá žiadne póly v $z = e^{i\pi}$. Ak N je dĺžka filtra $h(n)$, potom polynóm $H(z)$ je stupňa $N-1$ a $L(z)$ stupňa $N-1-K$. Aby $L(z)$ zabezpečilo splnenie nutných $N/2$ podmienok pre ortogonalitu, musí byť aspoň stupňa $N/2-1$. Potom $K \leq N/2$.

Zároveň z podmienky existencie $\varphi(t)$ automaticky platí, že $h(n)$ je aspoň $K=1$ regulárne. Takže platí :

$$1 \leq K \leq N/2$$

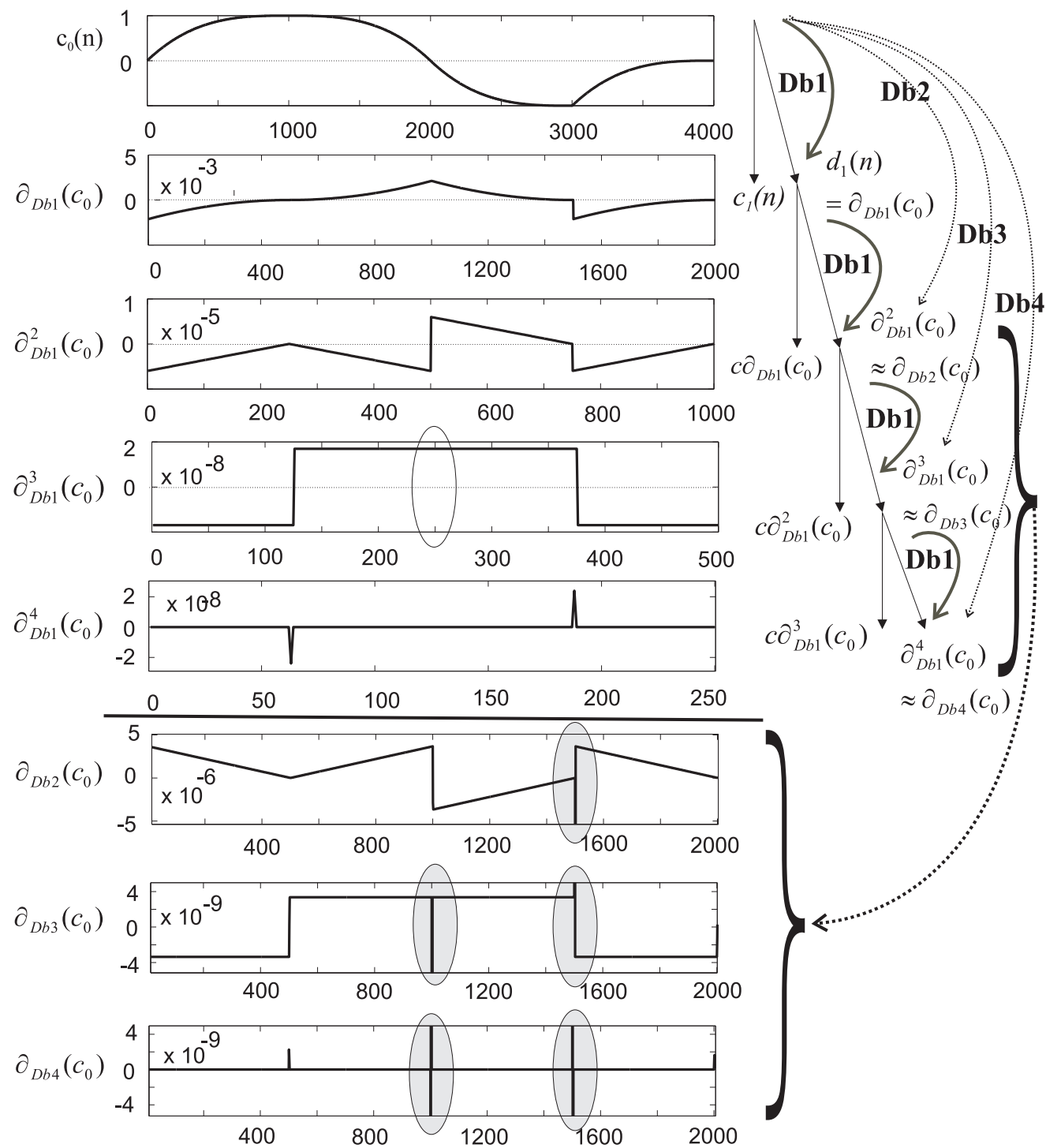
Wavelety ako diferenciálne operátory

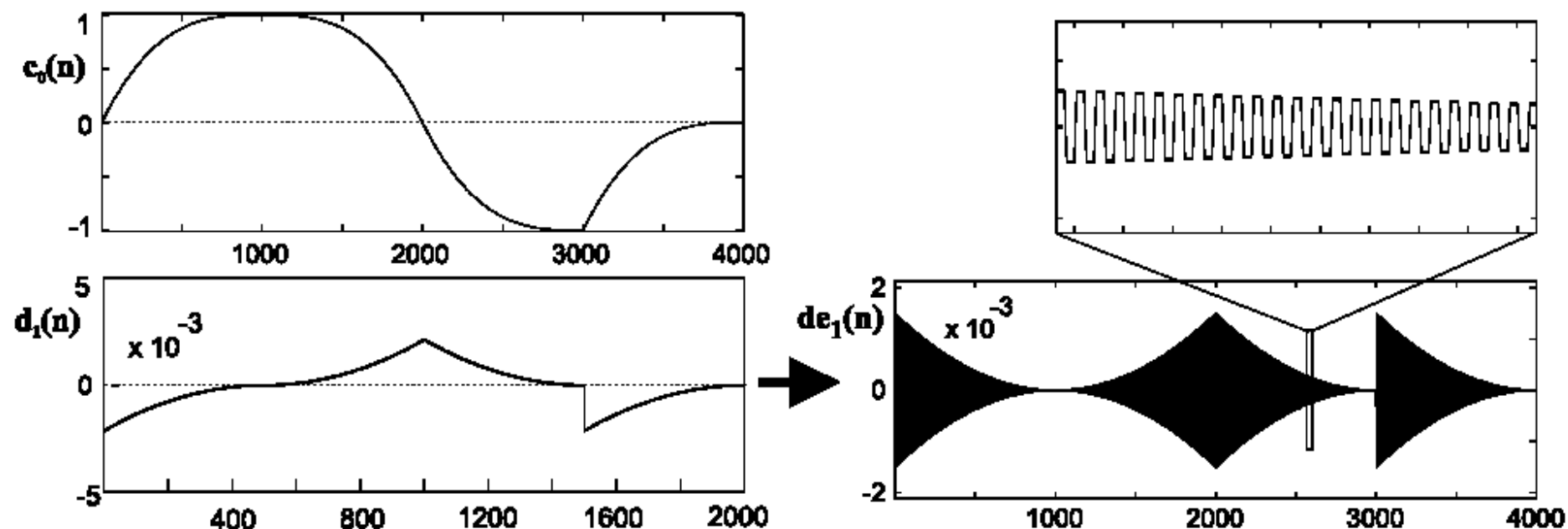
- Wavelety môžu slúžiť ako viacúrovňový derivátor (diferenciálny operátor)
- Nech $h(n)$ je K -regulárny filter, generujúci $\varphi(t)$ a $\psi(t)$. Potom waveletové koeficienty (spektrálne koeficienty po DWT) zodpovedajú K -tej derivácii vyhladenej verzie analyzovaného signálu:

$$\langle f(x), \psi(x-u) \rangle = \partial^K \{\gamma * f\}(u)$$

kde γ je vyhladzujúci operátor definovaný vo frekvencii ako

$$\Gamma(\omega) = \Psi^*(\omega)/(j\omega)^K$$





Obr. 2.6. Waveletové koeficienty signálu $c_0(n)$ na prvej úrovni rozkladu a ich detail (de_1), pri použití Db1 waveletu. Rozliatie detailu je dôsledkom nedostatočnej regularity Db1. (t. j. na obr. 2.5 by nemali rozliaty detail iba koeficienty $\partial_{Db4}(c_0) \approx \partial_{Db1}^n(c_0)$)