

Maticový tvar 2kanálovaj FB

Pre 2-pásmovú banku filtrov môžeme operácie decimácie (pri analýze) a interpolácie (pri syntéze) rozpísať ako:

$$\begin{aligned}c(n) &= \sum_k \tilde{h}(2n - k)x(k) & d(n) &= \sum_k \tilde{g}(2n - k)x(k) \\ \hat{x}(n) &= \sum_k h(n - 2k)c(k) + \sum_k g(n - 2k)d(k)\end{aligned}$$

Tieto vzťahy môžeme prepísať do maticového tvaru ako transformácie:

$$\bar{X} = T_a \bar{x} \quad \hat{x} = T_s \bar{X}$$

, kde $\bar{x}$, $\bar{X}$, $\hat{x}$ sú stĺpcové vektory vstupného, transformovaného, výstupného signálu a T_a , T_s sú transformačné matice pre analýzu, resp. pre syntézu. Predpokladajme konečnú dĺžku vstupného signálu a kruhovú konvolúciu vo FB. Potom $\bar{x}$, $\bar{X}$, $\hat{x}$, T_a , T_s môžeme vyjadriť v tvare:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= (x(0), x(1), \dots, x(N-1))^T \\ \bar{X} &= (c(0), c(1), \dots, c(N/2-1), d(0), d(1), \dots, d(N/2-1))^T\end{aligned}$$

$$\mathbf{T}_a = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{H}} \\ \tilde{\mathbf{G}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{h}(0) & \tilde{h}(-1) & \dots & \dots & \dots & \tilde{h}(1) \\ \dots & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(0) & \tilde{h}(-1) & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(0) & \tilde{h}(-1) \\ \tilde{g}(0) & \tilde{g}(-1) & \dots & \dots & \dots & \tilde{g}(1) \\ \dots & \tilde{g}(1) & \tilde{g}(0) & \tilde{g}(-1) & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \tilde{g}(1) & \tilde{g}(0) & \tilde{g}(-1) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}_s = (\mathbf{H} \quad \mathbf{G}) = \begin{pmatrix} h(0) & \vdots & \dots & \vdots & g(0) & \vdots & \dots & \vdots \\ h(1) & h(-1) & \dots & \vdots & g(1) & g(-1) & \dots & \vdots \\ \vdots & h(0) & \dots & \vdots & \vdots & g(0) & \dots & \vdots \\ \vdots & h(1) & \dots & h(-1) & \vdots & g(1) & \dots & g(-1) \\ \vdots & \vdots & \dots & h(0) & \vdots & \vdots & \dots & g(0) \\ h(-1) & \vdots & \dots & h(1) & g(-1) & \vdots & \dots & g(1) \end{pmatrix}$$

Matice $\tilde{\mathbf{H}}, \tilde{\mathbf{G}}$ sú rozmerov $N \times N/2$. Ich riadky sú tvorené kruhovým posunom impulzových charakteristík príslušných filtrov. V maticiach $\mathbf{H}, \mathbf{G}$ sú kruhovým posunom impulzových charakteristík tvorené stĺpce, pričom matice sú rozmerov $N/2 \times N$.

Pri úplnej rekonštrukcii bez oneskorenia platí $\hat{\bar{x}} = \bar{X}$. Potom platí

$$\mathbf{T}_a \mathbf{T}_s = \mathbf{I}_N = \mathbf{T}_s \mathbf{T}_a$$

Vyjadrame:

$$\mathbf{I}_N = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{N/2} & \mathbf{0}_{N/2} \\ \mathbf{0}_{N/2} & \mathbf{I}_{N/2} \end{pmatrix} = \mathbf{T}_a \mathbf{T}_s = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{H}} \\ \tilde{\mathbf{G}} \end{pmatrix} (\mathbf{H} \quad \mathbf{G}) = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{H} \\ \tilde{\mathbf{G}} \end{pmatrix} (\mathbf{H} \quad \mathbf{G}) = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{H} & \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{G} \\ \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{H} & \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{G} \end{pmatrix}$$

z čoho vyplýva:

$$\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{H} = \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{G} = \mathbf{I} \quad \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{G} = \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{H} = \mathbf{0}$$

T.j. impulzové charakteristiky filtrov sú ortogonálne k párnym posunom svojich duálov a ortogonálne navzájom „nakříž“ = *vyjadrenie biortogonality*.

Naopak :

$$\mathbf{I}_N = \mathbf{T}_s \mathbf{T}_a$$

vyjadruje podmienky pre *elimináciu aliasingu* v časovej oblasti.

K spôsobu tvorenia matíc $\tilde{\mathbf{H}}, \tilde{\mathbf{G}}$ a $\mathbf{H}, \mathbf{G}$

I. $\tilde{\mathbf{H}}, \tilde{\mathbf{G}}$ sú *decimačné matice* - najprv je signál konvolvovaný, potom podvzorkovaný (ukážeme na príklade $\tilde{\mathbf{H}}$):

a) vyjadrením konvolúcie v maticovom tvare dostaneme

$$\tilde{H}_{konv} = \begin{pmatrix} \tilde{h}(0) & \dots & \dots & \tilde{h}(3) & \tilde{h}(2) & \tilde{h}(1) \\ \tilde{h}(1) & \tilde{h}(0) & \dots & \dots & \tilde{h}(3) & \tilde{h}(2) \\ \tilde{h}(2) & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(0) & \dots & \dots & \tilde{h}(3) \\ \tilde{h}(3) & \tilde{h}(2) & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(0) & \dots & \dots \\ \dots & \tilde{h}(3) & \tilde{h}(2) & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(0) & \dots \\ \dots & \dots & \tilde{h}(3) & \tilde{h}(2) & \tilde{h}(1) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \tilde{h}(3) & \tilde{h}(2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

b) následným podvzorkovaním výstupu dostaneme

$$\bar{c} = (\tilde{\mathbf{H}}_{konv} \bar{x}) \downarrow 2 = \left(\tilde{\mathbf{H}}_{konv} \downarrow_{\text{riadky}} 2 \right) \bar{x} = \tilde{\mathbf{H}} \bar{x}$$

t.j. $\tilde{\mathbf{H}}$ vytvoríme odstránením každého druhého riadku $\tilde{\mathbf{H}}_{konv}$

II. $\mathbf{H}, \mathbf{G}$ sú *interpoláčné matice*- signál je najprv nadvzorkovaný, potom konvolvovaný, pre DP vetvu potom:

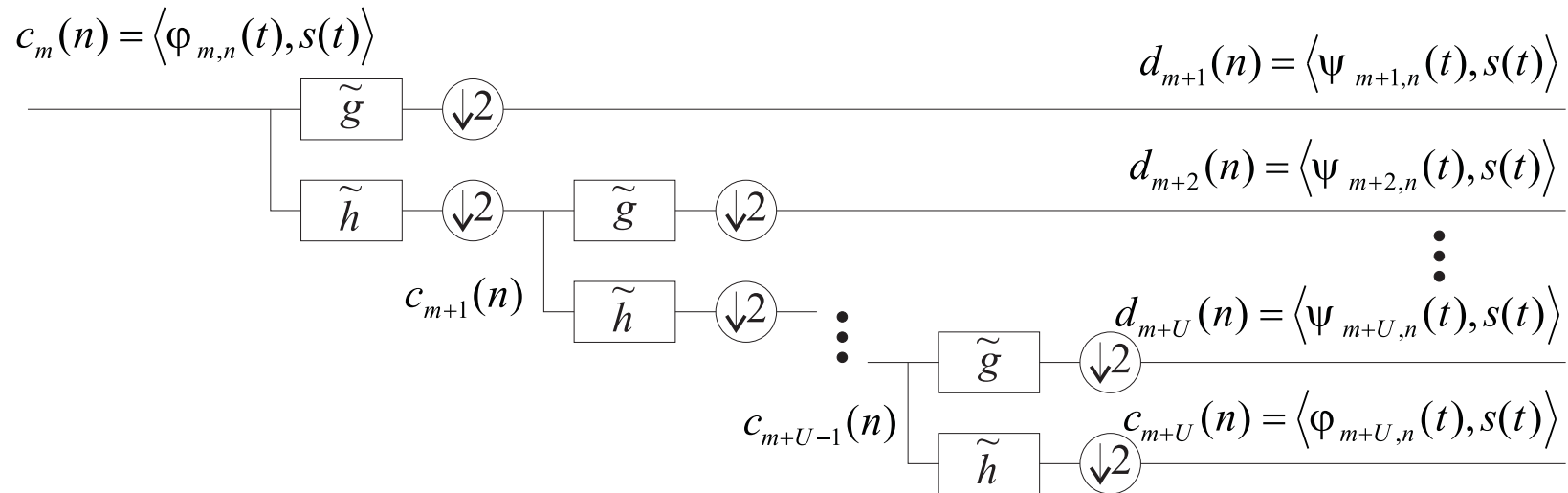
$$\hat{\bar{x}}_c = (\mathbf{H}_{konv})(\bar{c} \uparrow 2) = \left(\mathbf{H}_{konv} \downarrow_{stĺp} 2 \right) \bar{c} = \mathbf{H} \bar{c}$$

,kde

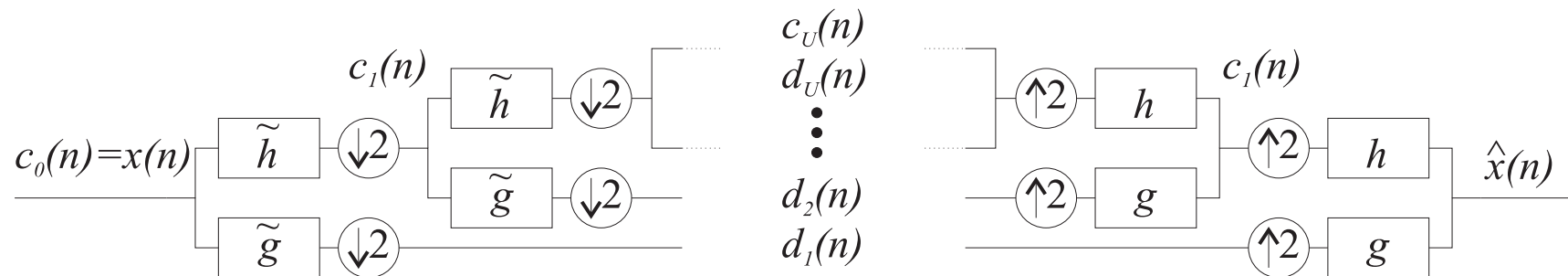
$$H_{konv} = \begin{pmatrix} h(0) & \dots & \dots & h(3) & h(2) & h(1) \\ h(1) & h(0) & \dots & \dots & h(3) & h(2) \\ h(2) & h(1) & h(0) & \dots & \dots & h(3) \\ h(3) & h(2) & h(1) & h(0) & \dots & \dots \\ \dots & h(3) & h(2) & h(1) & h(0) & \dots \\ \dots & \dots & h(3) & h(2) & h(1) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & h(3) & h(2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

t.j. $\mathbf{H}$ vytvoríme odstránením každého druhého stĺpca $\mathbf{H}_{konv}$

Realizácia výpočtu WR pomocou bánk filtrov:



Realizácia výpočtu DWT a IDWT pomocou bánk filtrov:



Aký je rozdiel medzi BF s úplnou rekonštrukciou a BF ktoré realizujú wavelety?

→ Pri waveletoch je nutná aspoň jedna prenosovej funkcie DP filtra v $\Omega=\pi$ lebo potrebujeme Banku filtrov *iterovať*

→ Design kalsických Bánk filtrov je viac zameraný na rozdelenie subpásiem vo frekvenčnej oblasti, na selektivitu filtrov a na vznikajúci aliasing, pričom sa často ani nepožaduje úplná rekonštrukcia

Návrh biortogonálnych waveletov spektrálnou faktorizáciou

Uvažujme všeobecné riešenie faktorizácie $P(z)$ v tvare $P(z) = \tilde{H}(z)H(z)$.

Nulové body $P(z)$ označme z_i . Potom platia nasledovné pravidlá (**Opakovanie!**):

1. Aby $\tilde{H}(z)$ a $H(z)$ boli prenosové funkcie *reálnych filtrov*, z_i a z_i^* musíme použiť v pároch. Napr:

$$H(z) = (z - z_0)(z - z_0^*) = z^2 - z(z_0 + z_0^*) + z_0 z_0^* = z^2 - 2z \operatorname{Re}(z_0) + |z_0|^2$$

2. Aby $\tilde{H}(z)$ a $H(z)$ boli prenosové funkcie filtrov s *Lineárnou fázou*, z_i a $1/z_i$ musíme použiť v pároch. Napr:

$$H(z) = (z - z_0)(z - 1/z_0) = z^2 - z(z_0 + 1/z_0) + 1 = \text{symetricke koeficienty}$$

3. Aby $\tilde{H}(z)$ a $H(z)$ mohli tvoriť *ortogonálne wavelety*, z_i a $1/z_i$ musíme použiť oddelene (magnitúdová charakteristika musí zostať rovnaká).

$$P(z) = \tilde{H}(z)H(z) = \alpha \prod_{i=1}^{N_1} \left((1 - z_{1_i} z^{-1}) (1 - z_{1_i}^* z) \right) \prod_{i=1}^{N_2} \left((1 - z_{2_i} z^{-1}) (1 - z_{2_i}^* z) \right)$$

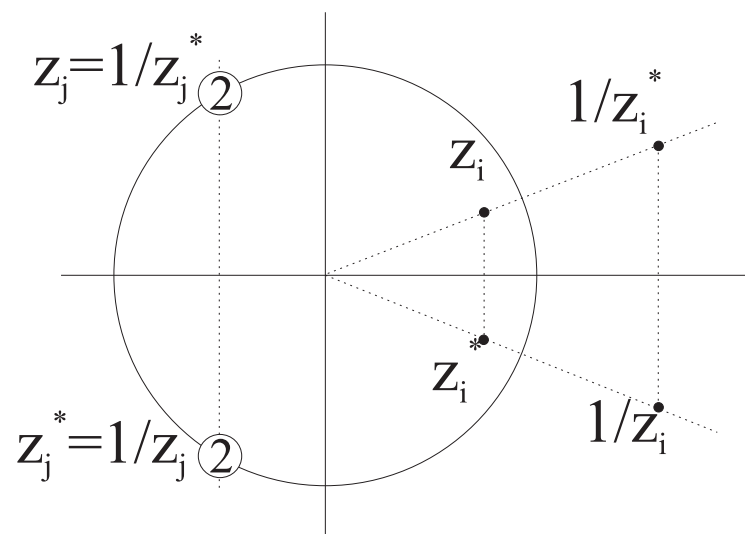
Návrh Biortogonálnych waveletov

- Začneme navrhovať ortogonálny wavelet s K nulovými momentmi.
- Ak doplníme dvojnásobný počet núl a použijeme kompletný polynóm $Q(z)$ - *symetrická pozitívna funkcia na jednotkovej kružnici*, získavame polpásmový filter:

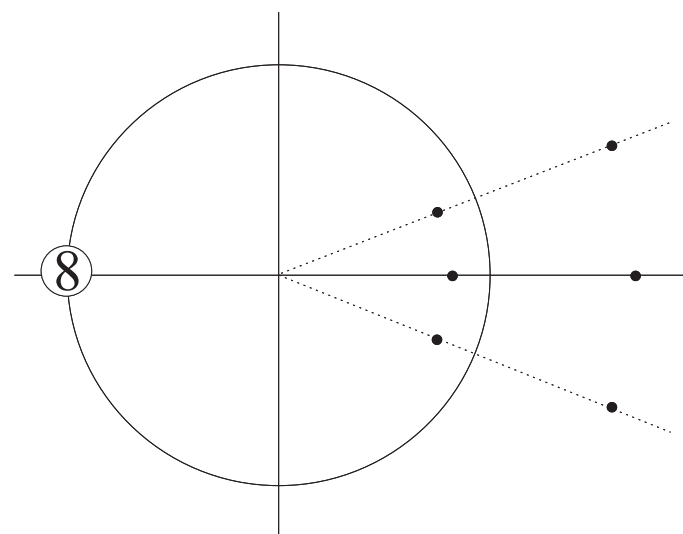
$$P(z) = 2 \left(\frac{1+z}{2} \right)^K \left(\frac{1+z^{-1}}{2} \right)^K Q(z)$$

- Polpásmový filter faktorizujeme.

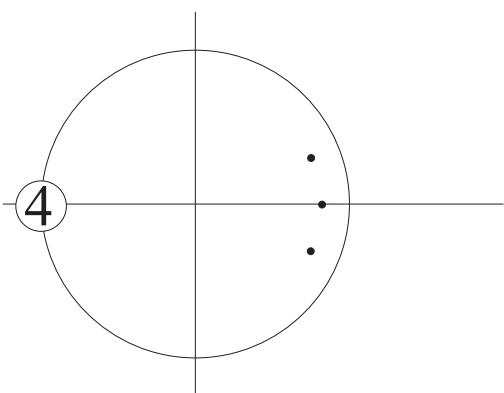
Chceme takú faktorizáciu $P(z) = \tilde{H}(z)H(z)$, aby $H(z)$ a $\tilde{H}(z)$ mali lienárnu fázu.



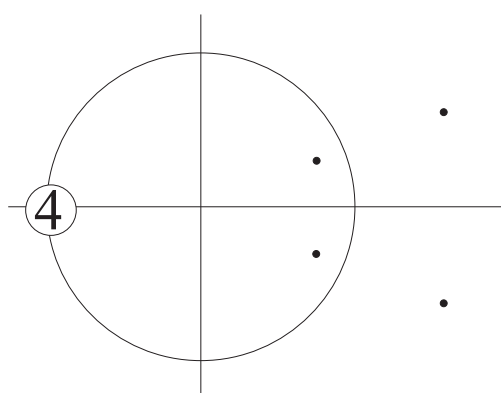
Všeobecné umiestnenie núl $P(z)$



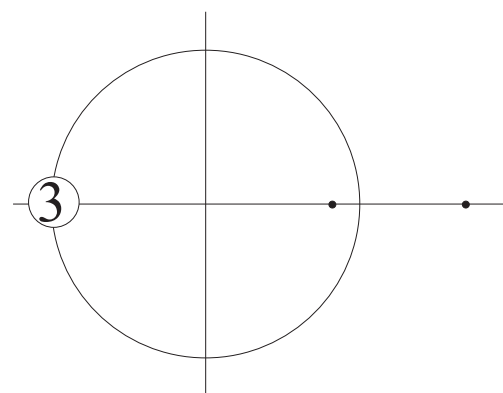
Umiestnenie núl pre maximálne hladký
polpásmový filter so 14 nulami v $P(z)$



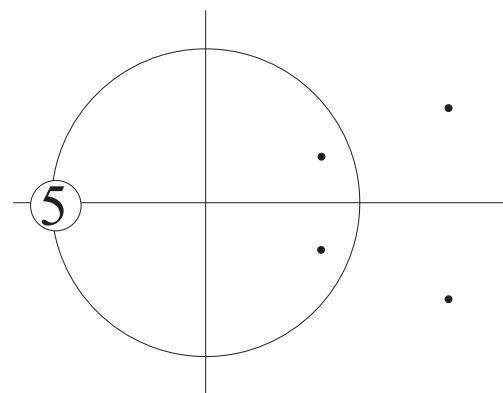
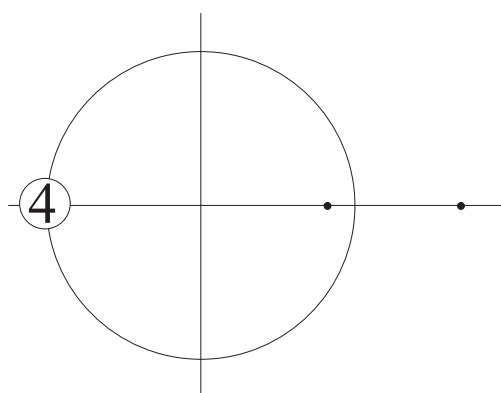
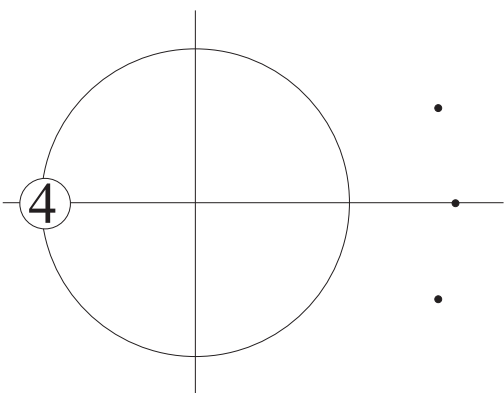
8/8 ortogonálne



9/7 symetrické



6/10 symetrické



Príklady faktorizácie $P(z)$ maximálne hladkého filtra so 14 nulami

Príklad: Pre Db2 dostávame návrhom pre $K=2$ nulových momentov:

$$Q(z) = -\frac{1}{2}z + 2 - \frac{1}{2}z^{-1} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \left[1 - \frac{(2 - \sqrt{3})}{z} \right] \left[1 - \frac{z}{(2 + \sqrt{3})} \right]$$

Potom
$$P(z) = 2 \left(\frac{1+z}{2} \right)^2 \left(\frac{1+z^{-1}}{2} \right)^2 Q(z).$$

Naozaj je to polpásmový filter?

Musí platiť napr. $P(z) = P(z^{-1})$ $P(z) + P(-z) = 2$

Ak chceme utvoriť Biortogonálny wavelet, môžeme vzhľadom na umiestnenie koreňov pri Db2 manipulovať iba s koreňmi v $z=-1$. Takže $Q(z)$ nie je treba faktorizovať .

Môžeme vytvoriť verzie:

1) Rbio1.3: $H(z) = \sqrt{2} \left(\frac{1+z}{2} \right)^1$

$$\tilde{H}(z) = \sqrt{2} \left(\frac{1+z}{2} \right)^1 \left(\frac{1+z^{-1}}{2} \right)^2 Q(z)$$

$$h(n) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\tilde{h}(n) = \frac{\sqrt{2}}{2} (-1/8, 1/8, 1, 1, 1/8, -1/8)$$

2) Rbio2.2: $H(z) = \sqrt{2} \left(\frac{1+z}{2} \right)^2 \left(\frac{1+z^{-1}}{2} \right)$ $\tilde{H}(z) = \sqrt{2} \left(\frac{1+z^{-1}}{2} \right)^2 Q(z)$

3) Rbio3.1(Kvadratický B-Spline):

$$H(z) = \sqrt{2} \left(\frac{1+z}{2} \right)^2 \left(\frac{1+z^{-1}}{2} \right) \quad \tilde{H}(z) = \sqrt{2} \left(\frac{1+z}{2} \right)^1 Q(z)$$

Návrh biortogonálnych waveletov pomocou vedomostí o tvare autokorelačnej funkcie

Príklad: Pomocou vedomostí o tvare autokorelačnej funkcie zostrojte ortogonálne, maximálne hladké filtre s dĺžkou 4.

Riešenie:

Z vlastností maximálne hladkých filtrov vyplýva, že $P(z)$ pre $N=4$ má tvar:

$$P(z) = (1 + z^{-1})^2 (1 + z)^2 Q(z) = H(z) H(z^{-1})$$

, kde $Q(z)$ je symetrická pozitívna funkcia na jednotkovej kružnici. Keďže $P(z) + P(-z) = 2$, všetky koeficienty pri párnych mocninách z okrem z^0 v $P(z)$ musia byť nulové. Pre $N=4$ je z^{-3} najvyššia mocnina v $H(z)$ a teda $Q(z)$ bude v tvare :

$$Q(z) = (az + b + az^{-1})$$

Ako najst' $Q(z)$? Koľko je možností?

Pomocou $P(z) = (1 + z^{-1})^2 (1 + z)^2 (az + b + az^{-1})$ vytvoríme sústavu rovníc pre koeficienty pri párnych mocninách $P(z)$:

$$\begin{array}{llll} z^0 : & 6a + 6b = 1 & \rightarrow & \\ z^2 : & 4a + b = 0 & \rightarrow & a = -\frac{1}{16} \quad b = \frac{1}{4} \end{array}$$

Následne:

$$Q(z) = (az + b + az^{-1}) \rightarrow Q(z) = \left(-\frac{1}{16}z + \frac{1}{4} - \frac{1}{16}z^{-1} \right)$$

A nakoniec ...

vytvoríme $P(z)$, ktoré môžeme faktorizovať

$$P(z) = (1 + z^{-1})^2 (1 + z)^2 Q(z) = H(z)H(z^{-1})$$

Napr. ortogonálnou faktorizáciu $P(z)$ dostaneme výsledok:

$$H(z) = \left(\frac{1}{4\sqrt{2}} \right) \left[(1 + \sqrt{3}) + (1 + \sqrt{3})z^{-1} + (3 - \sqrt{3})z^{-2} + (1 - \sqrt{3})z^{-3} \right]$$

Banka filtrov a rozklad signálov

Zmena reprezentácie signálu je zväčša uskutočnená transformáciou.

Najbežnejší spôsobom rozkladu - *diskrétna lineárna transformácia (DLT)*

Najznámejšie prevedenia sú:

- *blokové transformácie (BT)* - pracujú so signálom v dávkach resp. po blokoch neodstraňujú medziblokovú koreláciu a navyše vzniká rušivý "blokový efekt"
- *prekryvné transformácie (Lapped transforms)*
- *transformácie pracujúce na princípe viacúrovňového rozlíšenia signálu.*

Každá DLT je ekvivalentná rozkladu v M-pásmovej BF, v ktorej časovo reverzné impulzné odpovede jednotlivých filtrov pre analýzu a syntézu odpovedajú jednotlivým báзовým vektorom DLT.



Implementácia Blokových transformácií (BT) bankami filtrov

Rozdelíme vstupný signál $x(n)$ na neprekrývajúce sa bloky $\{x_b(n)\}$ veľkosti M (b je číslo bloku). Transformáciu $x_b(n)$ pomocou transformačnej matice $\tilde{\mathbf{F}}$ veľkosti $M \times M$ na bloky $X_b(n)$ zapíšeme v maticovom tvare ako:

$$\bar{X}_b = \tilde{\mathbf{F}} \bar{x}_b$$

, kde $\bar{x}_b = (x_b(0), x_b(1), \dots, x_b(M-1))^T$, $\bar{X}_b = (X_b(0), X_b(1), \dots, X_b(M-1))^T$. Riadkové vektory matice $\tilde{\mathbf{F}}$ označme $\tilde{f}_r$: $\tilde{f}_r = (\tilde{f}_r(0), \tilde{f}_r(1), \dots, \tilde{f}_r(M-1))$, kde $r = 0, 1, \dots, M-1$ je číslo riadku. Transformáciu môžeme implementovať nasledovnou M -pásmovou bankou filtrov, kde sú impulzové charakteristiky jednotlivých filtrov časovo otočené riadky transformačnej matice:

Platí:

$$y_r(n) = \tilde{f}_r(M-1-n) * x(n)$$

$$X_b(r) = y_r(M(b-1))$$

