

Maticový tvar 2kanálovaj FB

Pre 2-pásmovú banku filtrov môžeme operácie decimácie (pri analýze) a interpolácie (pri syntéze) rozpísať ako:

$$\begin{aligned}c(n) &= \sum_k \tilde{h}(2n - k)x(k) & d(n) &= \sum_k \tilde{g}(2n - k)x(k) \\ \hat{x}(n) &= \sum_k h(n - 2k)c(k) + \sum_k g(n - 2k)d(k)\end{aligned}$$

Tieto vzťahy môžeme prepísať do maticového tvaru ako transformácie:

$$\bar{X} = T_a \bar{x} \quad \hat{\bar{x}} = T_s \bar{X}$$

, kde $\bar{x}$, $\bar{X}$, $\hat{\bar{x}}$ sú stĺpcové vektory vstupného, transformovaného, výstupného signálu a T_a , T_s sú transformačné matice pre analýzu, resp. pre syntézu. Predpokladajme konečnú dĺžku vstupného signálu a kruhovú konvolúciu vo FB. Potom $\bar{x}$, $\bar{X}$, $\hat{\bar{x}}$, T_a , T_s môžeme vyjadriť v tvare:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= (x(0), x(1), \dots, x(N-1))^T \\ \bar{X} &= (c(0), c(1), \dots, c(N/2-1), d(0), d(1), \dots, d(N/2-1))^T\end{aligned}$$

$$\mathbf{T}_a = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{H}} \\ \tilde{\mathbf{G}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{h}(0) & \tilde{h}(-1) & \dots & \dots & \dots & \tilde{h}(1) \\ \dots & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(0) & \tilde{h}(-1) & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(0) & \tilde{h}(-1) \\ \tilde{g}(0) & \tilde{g}(-1) & \dots & \dots & \dots & \tilde{g}(1) \\ \dots & \tilde{g}(1) & \tilde{g}(0) & \tilde{g}(-1) & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \tilde{g}(1) & \tilde{g}(0) & \tilde{g}(-1) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}_s = (\mathbf{H} \quad \mathbf{G}) = \begin{pmatrix} h(0) & \vdots & \dots & \vdots & g(0) & \vdots & \dots & \vdots \\ h(1) & h(-1) & \dots & \vdots & g(1) & g(-1) & \dots & \vdots \\ \vdots & h(0) & \dots & \vdots & \vdots & g(0) & \dots & \vdots \\ \vdots & h(1) & \dots & h(-1) & \vdots & g(1) & \dots & g(-1) \\ \vdots & \vdots & \dots & h(0) & \vdots & \vdots & \dots & g(0) \\ h(-1) & \vdots & \dots & h(1) & g(-1) & \vdots & \dots & g(1) \end{pmatrix}$$

Matice $\tilde{\mathbf{H}}, \tilde{\mathbf{G}}$ sú rozmerov $N \times N/2$. Ich riadky sú tvorené kruhovým posunom impulzových charakteristík príslušných filtrov. V maticiach $\mathbf{H}, \mathbf{G}$ sú kruhovým posunom impulzových charakteristík tvorené stĺpce, pričom matice sú rozmerov $N/2 \times N$.

Pri úplnej rekonštrukcii bez oneskorenia platí $\hat{x} = \bar{X}$. Potom platí

$$\mathbf{T}_a \mathbf{T}_s = \mathbf{I}_N = \mathbf{T}_s \mathbf{T}_a$$

Vyjadrame:

$$\mathbf{I}_N = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{N/2} & \mathbf{0}_{N/2} \\ \mathbf{0}_{N/2} & \mathbf{I}_{N/2} \end{pmatrix} = \mathbf{T}_a \mathbf{T}_s = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{H}} \\ \tilde{\mathbf{G}} \end{pmatrix} (\mathbf{H} \quad \mathbf{G}) = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{H} \\ \tilde{\mathbf{G}} \end{pmatrix} (\mathbf{H} \quad \mathbf{G}) = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{H} & \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{G} \\ \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{H} & \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{G} \end{pmatrix}$$

z čoho vyplýva:

$$\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{H} = \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{G} = \mathbf{I} \qquad \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{G} = \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{H} = \mathbf{0}$$

T.j. impulzové charakteristiky filtrov sú ortogonálne k párnym posunom svojich duálov a ortogonálne navzájom „nakríž“ = *vyjadrenie biortogonality*.

Naopak :

$$\mathbf{I}_N = \mathbf{T}_s \mathbf{T}_a$$

vyjadruje podmienky pre *elimináciu aliasingu* v časovej oblasti.

K spôsobu tvorenia matíc $\tilde{\mathbf{H}}, \tilde{\mathbf{G}}$ a $\mathbf{H}, \mathbf{G}$

I. $\tilde{\mathbf{H}}, \tilde{\mathbf{G}}$ sú *decimačné matice* - najprv je signál konvolvovaný, potom podvzorkovaný (ukážeme na príklade $\tilde{\mathbf{H}}$):

a) vyjadrením konvolúcie v maticovom tvare dostaneme

$$\tilde{\mathbf{H}}_{konv} = \begin{pmatrix} \tilde{h}(0) & \dots & \dots & \tilde{h}(3) & \tilde{h}(2) & \tilde{h}(1) \\ \tilde{h}(1) & \tilde{h}(0) & \dots & \dots & \tilde{h}(3) & \tilde{h}(2) \\ \tilde{h}(2) & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(0) & \dots & \dots & \tilde{h}(3) \\ \tilde{h}(3) & \tilde{h}(2) & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(0) & \dots & \dots \\ \dots & \tilde{h}(3) & \tilde{h}(2) & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(0) & \dots \\ \dots & \dots & \tilde{h}(3) & \tilde{h}(2) & \tilde{h}(1) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \tilde{h}(3) & \tilde{h}(2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

b) následným podvzorkovaním výstupu dostaneme

$$\bar{\mathbf{c}} = \left(\tilde{\mathbf{H}}_{konv} \bar{\mathbf{x}} \right) \downarrow 2 = \left(\tilde{\mathbf{H}}_{konv} \downarrow_{riadky} 2 \right) \bar{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{x}}$$

t.j. $\tilde{\mathbf{H}}$ vytvoríme odstránením každého druhého riadku $\tilde{\mathbf{H}}_{konv}$

II. $\mathbf{H}, \mathbf{G}$ sú *interpolačné matice*- signál je najprv nadvzorkovaný, potom konvolvovaný, pre DP vetvu potom:

$$\hat{\bar{x}}_c = (\mathbf{H}_{konv}) (\bar{c} \uparrow 2) = \left(\mathbf{H}_{konv} \downarrow_{stĺp} 2 \right) \bar{c} = \mathbf{H} \bar{c}$$

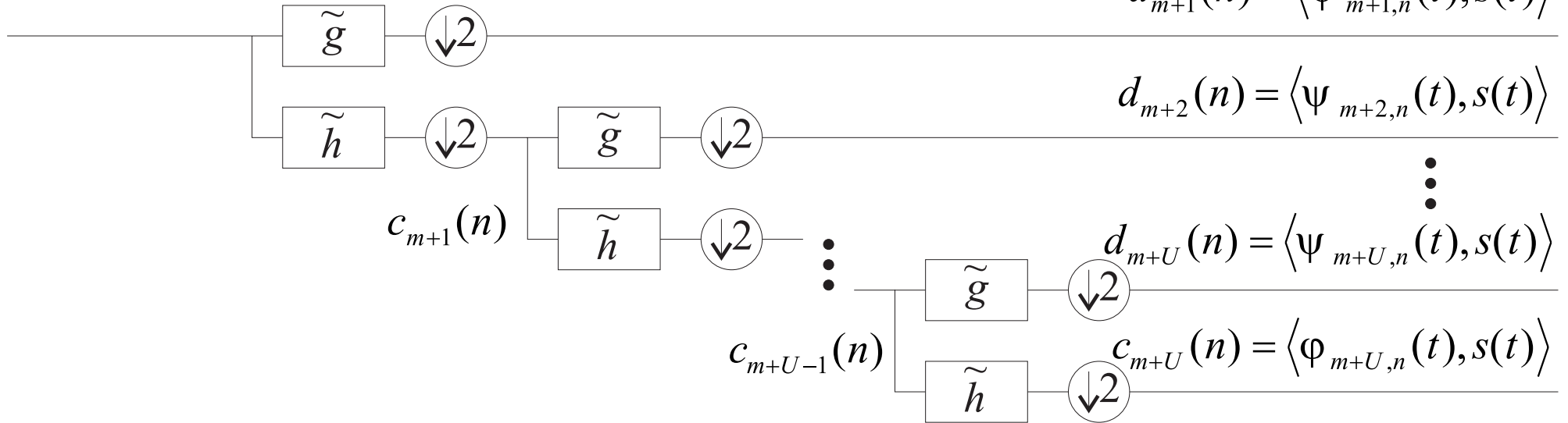
,kde

$$H_{konv} = \begin{pmatrix} h(0) & \dots & \dots & h(3) & h(2) & h(1) \\ h(1) & h(0) & \dots & \dots & h(3) & h(2) \\ h(2) & h(1) & h(0) & \dots & \dots & h(3) \\ h(3) & h(2) & h(1) & h(0) & \dots & \dots \\ \dots & h(3) & h(2) & h(1) & h(0) & \dots \\ \dots & \dots & h(3) & h(2) & h(1) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & h(3) & h(2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

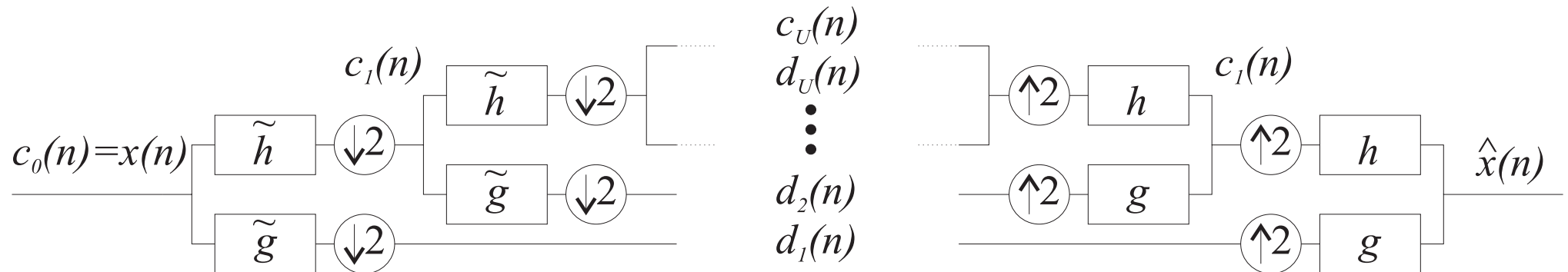
t.j. $\mathbf{H}$ vytvoríme odstránením každého druhého stĺpca $\mathbf{H}_{konv}$

Realizácia výpočtu WR pomocou bánk filtrov:

$$c_m(n) = \langle \varphi_{m,n}(t), s(t) \rangle$$



Realizácia výpočtu DWT a IDWT pomocou bánk filtrov:



Aký je rozdiel medzi BF s úplnou rekonštrukciou a BF ktoré realizujú wavelety?

→ Pri waveletoch je nutná aspoň jedna prenosovej funkcie DP filtra v $\Omega=\pi$ lebo potrebujeme Banku filtrov *iterovať*

→ Design kalsických Bánk filtrov je viac zameraný na rozdelenie subpásiem vo frekvenčnej oblasti, na selektivitu filtrov a na vznikajúci aliasing, pričom sa často ani nepožaduje úplná rekonštrukcia

Opakovanie - návrh biortogonálnych waveletov súektrálnou faktorizáciou

Uvažujme všeobecné riešenie faktorizácie $P(z)$ v tvare $P(z) = \tilde{H}(z)H(z)$.

Nulové body $P(z)$ označme z_i . Potom platia nasledovné pravidlá:

1. Aby $\tilde{H}(z)$ a $H(z)$ boli prenosové funkcie *reálnych filtrov*, z_i a z_i^* musíme použiť v pároch. Napr:

$$H(z) = (z - z_0)(z - z_0^*) = z^2 - z(z_0 + z_0^*) + z_0 z_0^* = z^2 - 2z \operatorname{Re}(z_0) + |z_0|^2$$

2. Aby $\tilde{H}(z)$ a $H(z)$ boli prenosové funkcie filtrov s *Lineárnou fázou*, z_i a $1/z_i$ musíme použiť v pároch. Napr:

$$H(z) = (z - z_0)(z - 1/z_0) = z^2 - z(z_0 + 1/z_0) + 1 = \textit{symetricke koeficienty}$$

3. Aby $\tilde{H}(z)$ a $H(z)$ mohli tvoriť *ortogonálne wavelety*, z_i a $1/z_i$ musíme použiť oddelene (magnitúdová charakteristika musí zostať rovnaká).

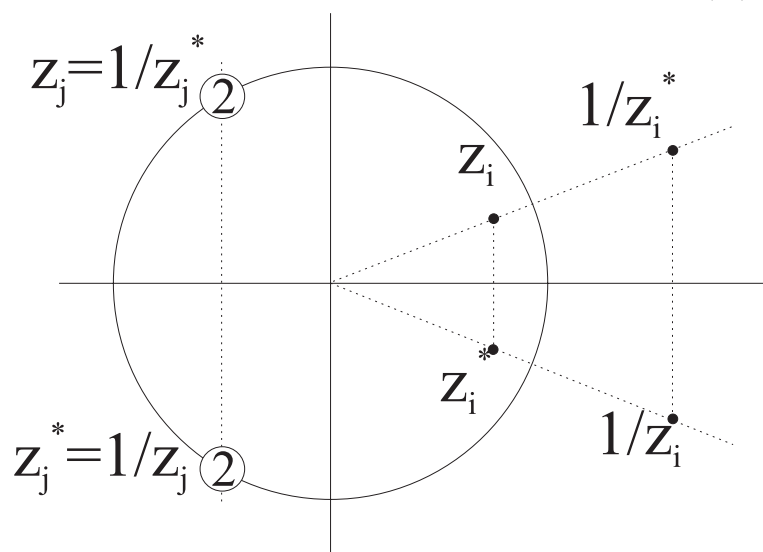
$$P(z) = \tilde{H}(z)H(z) = \alpha \prod_{i=1}^{N_1} \left((1 - z_{1_i} z^{-1}) (1 - z_{1_i}^* z) \right) \prod_{i=1}^{N_2} \left((1 - z_{2_i} z^{-1}) (1 - z_{2_i}^* z) \right)$$

Návrh Biortogonálnych waveletov

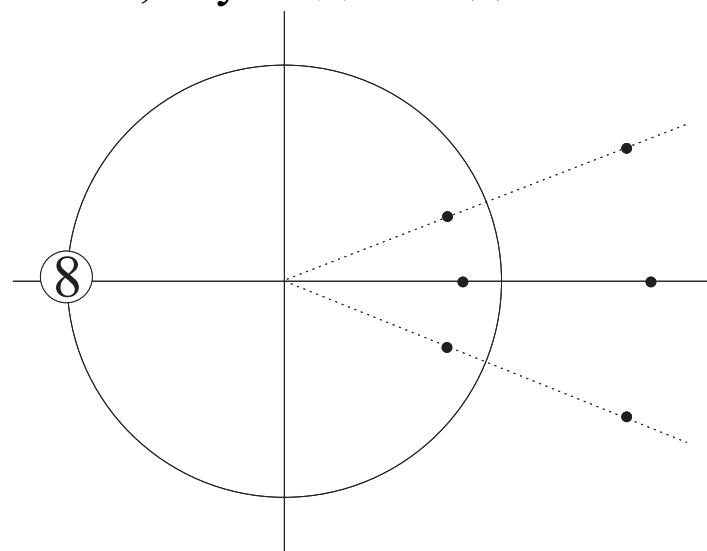
- Začneme navrhovať ortogonálny wavelet s K nulovými momentmi.
- Ak doplníme dvojnásobný počet núl a použijeme kompletný polynóm $Q(z)$, získavame polpásmový filter:

$$P(z) = 2 \left(\frac{1+z}{2} \right)^K \left(\frac{1+z^{-1}}{2} \right)^K Q(z)$$

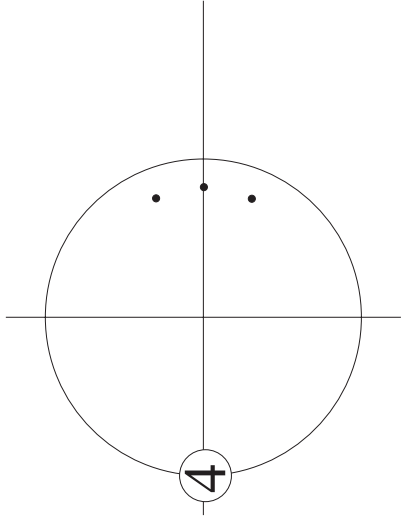
- Polpásmový filter faktorizujeme.
- Chceme takú faktorizáciu $P(z) = \tilde{H}(z)H(z)$, aby $H(z)$ a $\tilde{H}(z)$ mali lienárnu fázu.



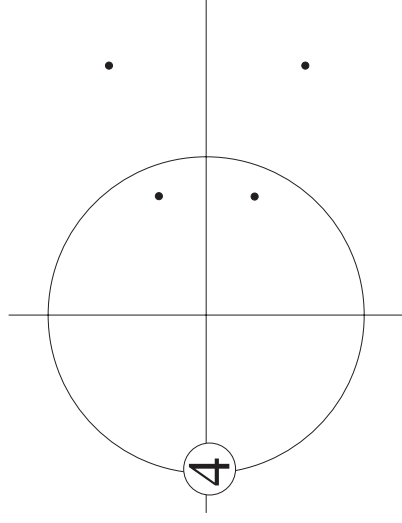
Všeobecné umiestnenie núl $P(z)$



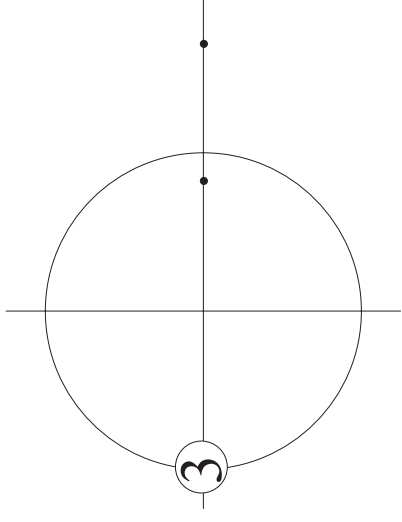
Umiestnenie núl pre maximálne hladký polpásmový filter so 14 nulami v $P(z)$



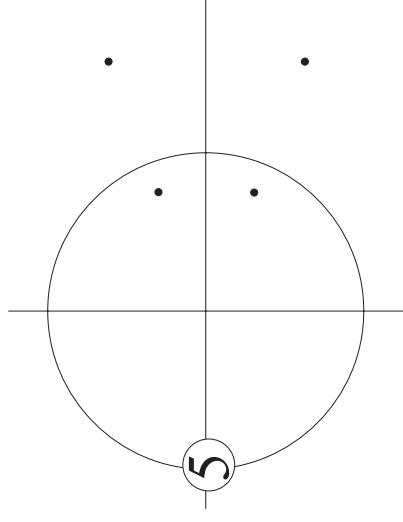
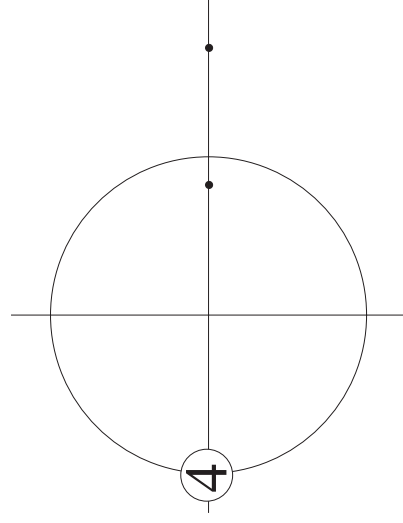
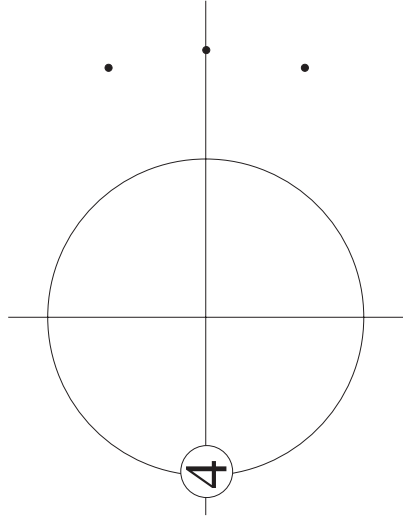
8/8 ortogonálne



9/7 symetrické



6/10 symetrické



Príklady faktorizácie $P(z)$ maximálne hladkého filtra so 14 nulami

Príklad: Pre Db2 dostávame návrhom pre K=2 nulových momentov:

$$Q(z) = -\frac{1}{2}z + 2 - \frac{1}{2}z^{-1} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \left[1 - \frac{(2 - \sqrt{3})}{z} \right] \left[1 - \frac{z}{(2 + \sqrt{3})} \right]$$

Potom
$$P(z) = 2 \left(\frac{1+z}{2} \right)^2 \left(\frac{1+z^{-1}}{2} \right)^2 Q(z).$$

Naozaj je to polpásmový filter ???

Musí platiť napr. $P(z) = P(z^{-1})$ $P(z) + P(-z) = 2$

Ak chceme utvoriť Biortogonálny wavelet, môžeme vzhľadom na umiestnenie koreňov manipulovať iba s koreňmi v $z=-1$. Takže $Q(z)$ nebolo treba faktorizovať. Môžeme vytvoriť verzie:

1) Rbio1.3:
$$H(z) = \sqrt{2} \left(\frac{1+z}{2} \right)^1 \quad \tilde{H}(z) = \sqrt{2} \left(\frac{1+z}{2} \right)^1 \left(\frac{1+z^{-1}}{2} \right)^2 Q(z)$$

$$h(n) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad \tilde{h}(n) = \frac{\sqrt{2}}{2} (-1/8, 1/8, 1, 1, 1/8, -1/8)$$

2) Rbio2.2:
$$H(z) = \sqrt{2} \left(\frac{1+z}{2} \right)^2 \left(\frac{1+z^{-1}}{2} \right) \quad \tilde{H}(z) = \sqrt{2} \left(\frac{1+z^{-1}}{2} \right)^2 Q(z)$$

3) Rbio3.1(Kvadratický B-Spline):

$$H(z) = \sqrt{2} \left(\frac{1+z}{2} \right)^2 \left(\frac{1+z^{-1}}{2} \right) \quad \tilde{H}(z) = \sqrt{2} \left(\frac{1+z}{2} \right)^1 Q(z)$$