Vlastnosti SWT

Linearita:

Vyplýva priamo z linearity skalárneho súčinu

Posun v čase:

$$g(t) = f(t - b_0) \Rightarrow SWT_g(a,b) = SWT_f(a, b - b_0)$$

Zmena mierky:

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} f\left(\frac{t}{s}\right) \Rightarrow SWT_g(a,b) = SWT_f\left(\frac{a}{s}, \frac{b}{s}\right)$$

Základné charakteristiky waveletov

1) *Existencia nosiča* na intervale vypovedá o tom, že funkcia (wavelet) má nenulové funkčné hodnoty len na danom intervale. Ak sú mimo neho funkčné hodnoty presne nulové, ovoríme, že na danom intervale $\langle a,b \rangle$ *má kompaktný nosič*. Ak sú „približne" nenulové, t.j. zanedbateľne malé hovoríme, že má *efektívny nosič*

2)*Počet nulových momentov*. *K-ty moment* $\psi(t)$ definujeme ako $m(k)=\int t^k \psi(t)dt$. Platí, že ak $\psi(t)$ je K krát *diferencovateľná* a pre $t \to \pm\infty$ klesá dostatočne rýchlo, potom prvých *K-1* momentov bude nulových. Potom ak $f(t)$ je na nejakom intervale polynómom max. *K-1* stupňa, pre wavelety $\psi_{a,b}(t)$ podporované v tomto intervale budú príslušné waveletové koeficienty $SWT_f(a,b)$ nulové.

3)*Regularita* (Daubechies 1988) poskytuje *mieru hladkosti funkcie* $f(t)$. Je to také maximálne číslo r pre ktoré platí $|F(\omega)| \leq c/\left(1+|\omega|^{r+1}\right)$, $\omega \in R$. Potom $f(t)$ je *r-1* krát spojite diferencovateľná, *r-tá* derivácia môže byť nespojitá.

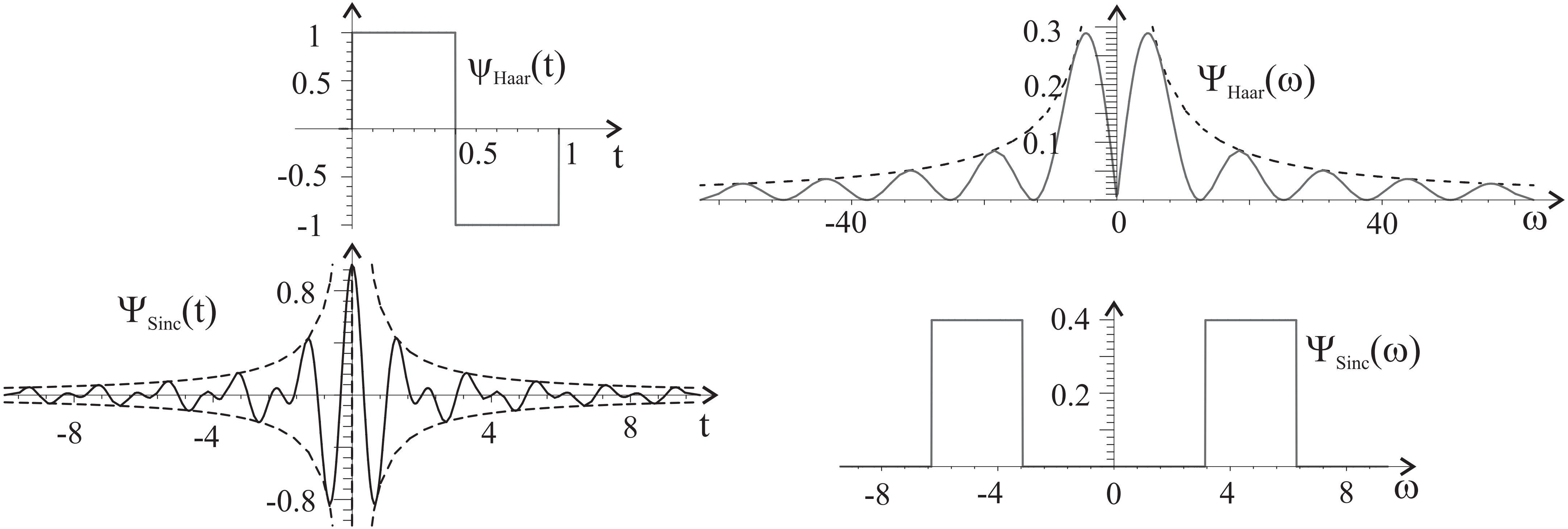
Príklady waveletov

Haarov wavelet: $\psi(t) = \begin{cases} 1 & pre\ 0 < t < 0.5 \\ -1 & pre\ 0.5 < t < -1 \\ 0 & in\acute{a}\check{c} \end{cases}$.

Sinc wavelet: $\psi(t) = 2\varphi(2t) - \varphi(t)$, kde $\varphi(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$

Morletov wavelet: $\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-j\omega_0 t} e^{-t^2/2}$.

Wavelet	Počet nulových momentov	Regularita r	Charakter resp. podpora v čase	Charakter resp. podpora vo frekvencii
Haar	1	0	<0,1>	$1/\omega$
Sinc	∞	∞	1/t	$< \pi, 2\pi >$
Daubechies N	N	$\alpha(N)$	< 0, 2N-1>	$1/\omega^{\alpha(N)}$



Časové a frekvenčné priebehy triviálneho Haarovho a Sinc waveletu.

Waveletové rady a rámce

Redundancia SWT (oba parametre a, b sú spojité) sa dá znížiť, prípadne odstrániť *vzorkovaním a*, *b*. Potom hovoríme o *waveletových rámcoch (Wavelet Frames – WF) resp. waveletových radoch (WR)*.

Pri voľbe vzorkovania sú dôležité otázky kompletnosti, redundancie a minimálnosti výslednej množiny funkcií.

Štandardná voľba *typu* vzorkovacej mriežky

- $a = a_0^m$.
- $b = nb_0 a_0^m$ (volíme tak, aby bola pomocou σ_{ab_t} pri danej mierke a “pokrytá” celá časová os)

T.j.

Parameter **m** určuje *úroveň rozlíšenia*
Parameter **n** určuje *posun v čase*

Pre $\psi(t)$ (a analogicky pre $\tilde{\psi}(t)$) dostávame množinu funkcií:

$$\psi_{mn}(t) = a_0^{-\frac{m}{2}} \psi\left(a_0^{-m} t - nb_0\right), \quad m, n \in Z$$

Každdú $f(t) \in L^2(R)$ potom môžeme vyjadriť superpozíciou vo *waveletových rámcoch(Wavelet Frames – WF)*:

$$f(t) = \sum_m \sum_n d_{m,n} \widetilde{\psi}_{m,n}(t) \qquad d_{m,n} = \left\langle f(t), \psi_{m,n}(t) \right\rangle \qquad m, n \in Z$$

Koeficienty $d_{m,n}$ nazývame waveletové koeficienty.

Rekonštrukcia je možná, ak

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{m,n} \left| \left\langle f, \psi_{m,n} \right\rangle \right|^2 \leq B\|f\|^2; \qquad \forall f(t) \in L^2(R)$$

Možností na voľbu $\{\widetilde{\psi}_{m,n}\}$ je viacero. Štandardná voľba je tzv. *duálny rámec*:

$$B^{-1}\|f\|^2 \leq \sum_{m,n} \left| \left\langle f, \widetilde{\psi}_{m,n} \right\rangle \right|^2 \leq A^{-1}\|f\|^2 \quad \forall f(t) \in L^2(R)$$

Najbežnejšia sa redundancia reprezentácie vo waveletových rámcoch odstraňuje voľbou vzorkovacej mriežky :

$$a_0 = 2, b_0 = 1$$

Platí :

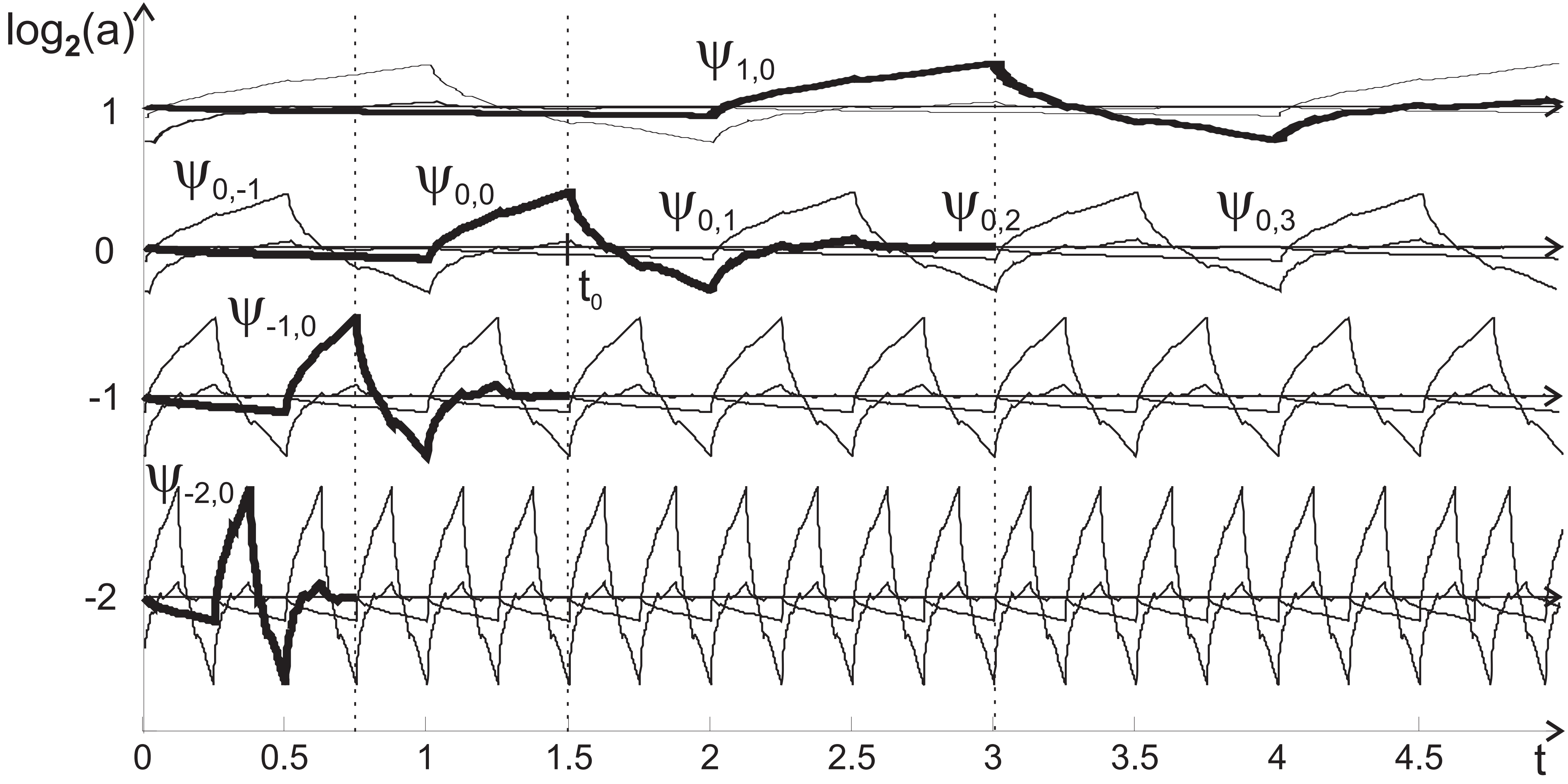
$$\psi_{m,n}(t) = 2^{-\frac{m}{2}} \psi\left(2^{-m} t - n\right)$$

funkciu $\psi_{m,n}(t)$ potom nazývame *dyadický wavelet* a vzťahmi (WF):

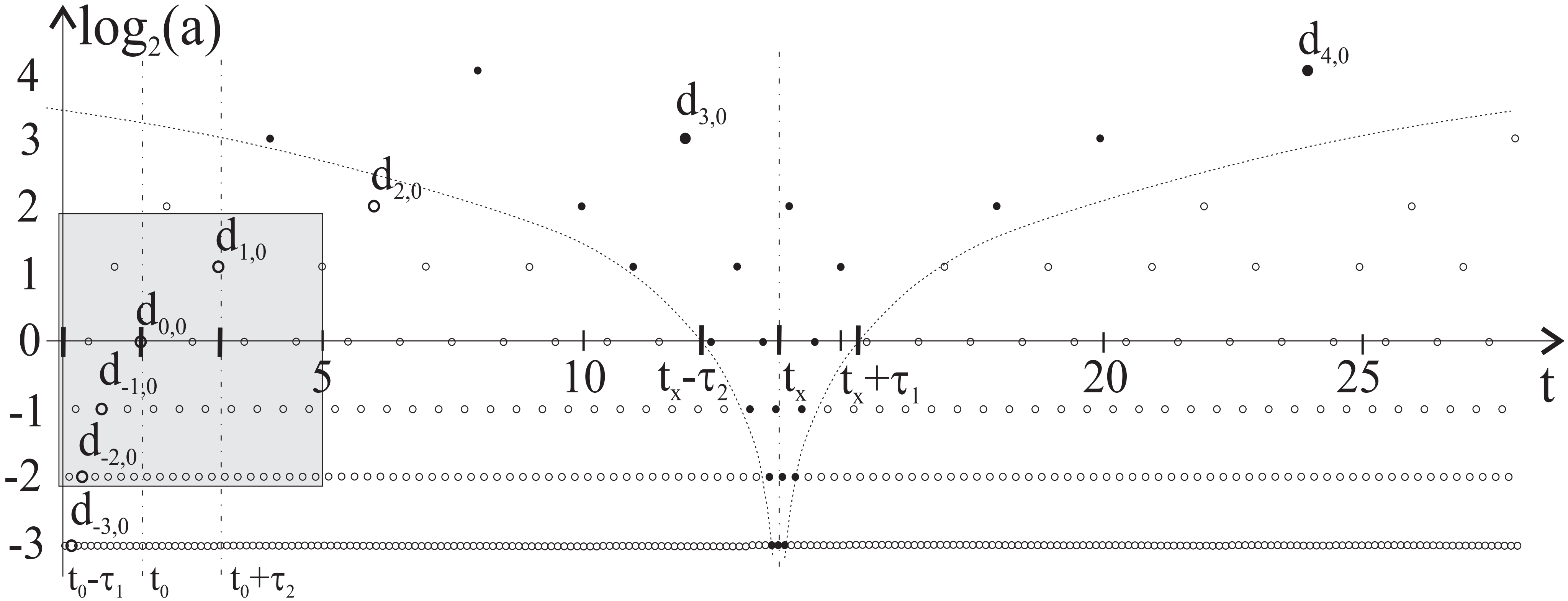
$$f(t) = \sum_m \sum_n d_{m,n} \widetilde{\psi}_{m,n}(t) \qquad d_{m,n} = \left\langle f(t), \psi_{m,n}(t) \right\rangle \qquad m, n \in Z$$

sú definované *waveletové rady (WR)*.

Triadické wavelety? M-adiclké wavelety?

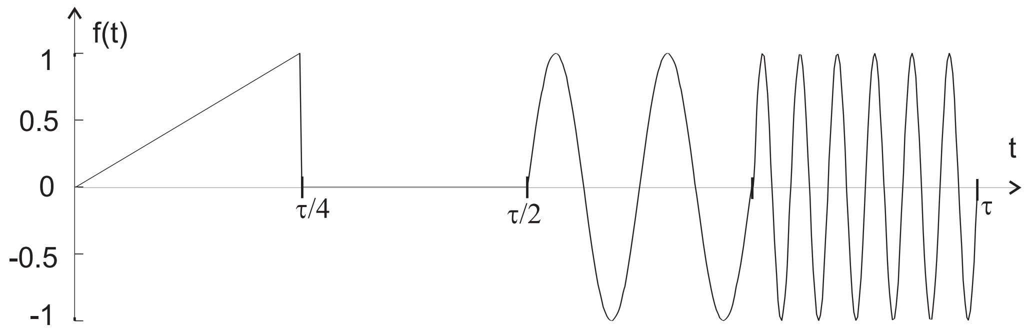


Poloha bázových funkcií (odvodených od Db2) v TS rovine pri dyadických waveletových radoch

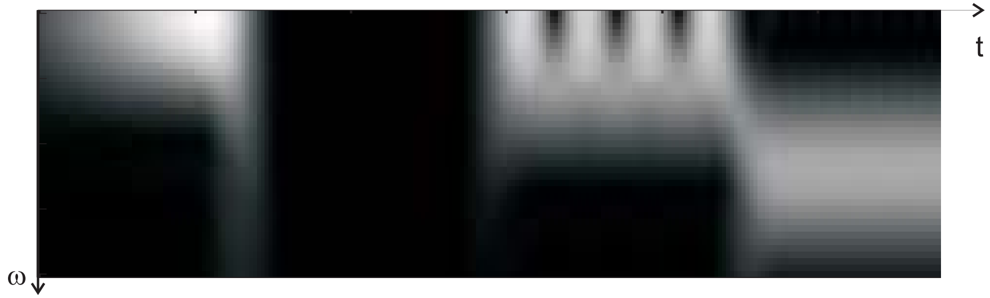


Príklad zobrazenia koeficientov $d_{m,n}$ v TS rovine. Koeficienty $d_{m,0}$ sú zvýraznené. V strede je znázornená sféra vplyvu signálu v čase t_x na koeficienty $d_{m,n}$ pri $\psi_{m,n}(t)$ s kompaktným nosičom na intervale $\langle t_0-\tau_1, t_0+\tau_2\rangle$.

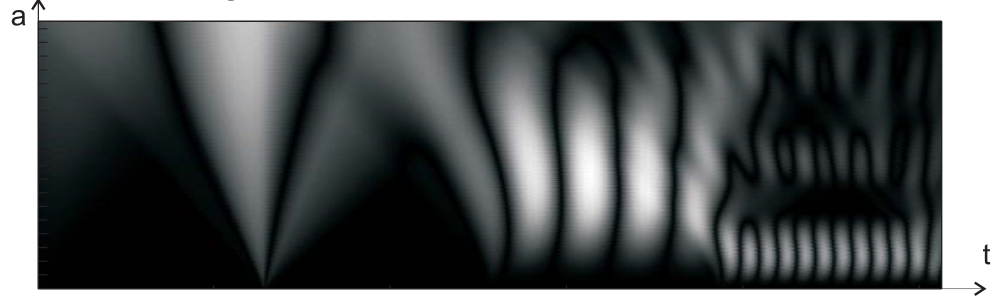
Oblasť TS roviny použitá v predchádzajúcom obrázku je sivo zvýraznená.



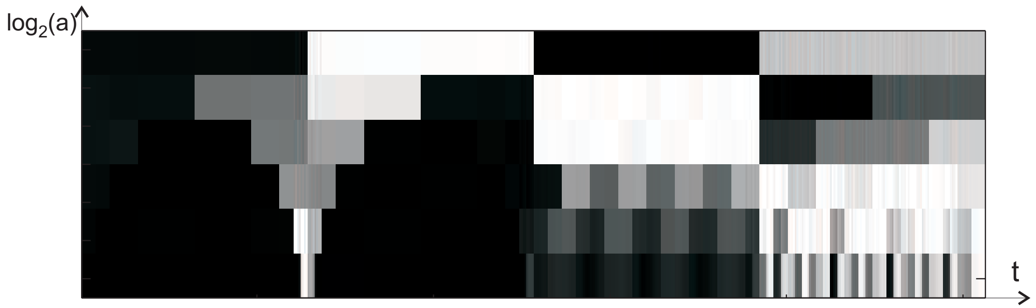
a) vstupný signál



b) spektrogram ($STFT_f$, Hanningovo okno, veľkosť okna 50, prekryv 48)



c) škálogram (SWT_f, ako $\psi(t)$ použitý Db2)



d) diskrétny škálogram (WR_f, ako $\psi(t)$ použitý Db2)

Ortogonalita, biortogonalita a semiortogonalita

Pre ortonormálne wavelety platí $\tilde{\psi} \equiv \psi^*$ a

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m} \rangle = \delta(j-l)\delta(k-m) \qquad j,k,l,m \in Z$$

čo charakterizuje ortogonalitu v rovnakých úrovniach rozlíšenia a aj medzi rôznymi úrovňami.

Pár $(\psi, \tilde{\psi})$ spĺňa podmienku *biortogonality* (hovoríme o *biortogonálnych waveletoch*), ak množiny $\{\psi_{m,n}\}$ a $\{\tilde{\psi}_{m,n}\}$ sú duálne bázy, spĺňajúce prodmienku biortogonality:

$$\langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{l,m} \rangle = \delta(j-l)\delta(k-m) \qquad j,k,l,m \in Z$$

Wavelet $\psi \in L^2(R)$ $j,k,l,m \in Z$ sa nazýva *semiortogonálny* (nazývaný aj pre-wavelet), ak platí:

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m} \rangle = \delta(j-l) \qquad j,k,l,m \in Z$$

t.j. je zachovaná ortogonalita len medzi rôznymi úrovňami rozlíšenia.

Prechod k analýze viacúrovňovým rozlíšením
(**M**ulti**R**esolution **A**nalysys - MRA)

Označme :

$$W_m = L\left(\left\{\psi_{m,n}\right\}, n \in Z\right)$$
$$\widetilde{W}_m = L\left(\left\{\widetilde{\psi}_{m,n}\right\}, n \in Z\right)$$

$L^2(R)$ potom môžeme vyjadriť ako priamu sumu podpriestorov W_m resp. $\widetilde{W}_m$:

$$L^2(R) = \ldots \oplus W_1 \oplus W_0 \oplus W_{-1} \oplus \ldots$$
$$L^2(R) = \ldots \oplus \widetilde{W}_1 \oplus \widetilde{W}_0 \oplus \widetilde{W}_{-1} \oplus \ldots$$

Ako odstrániť nekonečné sumy pri reprezentácii resp. aproximácii signálu ???