

Opakovanie:

Veta2: K danému kauzálnemu FIR filteru $\tilde{H}(z)$ existuje komplementárny filter $\tilde{G}(z)$ vtedy a len vtedy, ak polyfázové komponenty $\tilde{H}(z)$ sú nesúdeliteľné.

Dôkaz2: Nutná a postačujúca podmienka na úplnú rekonštrukciu FB je aby determinant ich polyfázovej matice $\tilde{\mathbf{F}}_p(z)$ bol **mononóm**. Nesúdeliteľnosť $\tilde{H}_e(z)$ a $\tilde{H}_o(z)$ je nutná, ináč by sa ich spoločný faktor vyskytoval v determinante. Postačujúclosť vyplýva s Euklidovho algoritmu:

Ak máme nesúdeliteľné polynómy $a(z)$ a $b(z)$, potom $a(z)p(z) + b(z)q(z) = c(z)$ má jednoznačné riešenie. Voľbou $c(z) = z^{-k}$ získané riešenie $\{p(z), q(z)\}$ predstavuje polyfázové komponenty $\tilde{G}(z)$.

Príklad: Uvažujme filter $\tilde{H}(z) = (1 + z^{-1})^4 = 1 + 4z^{-1} + 6z^{-2} + 4z^{-3} + z^{-4}$. Zistite, či k nemu existuje komplementárny filter a ak áno nájdite ho pri $\det(\tilde{\mathbf{F}}_p(z)) = z^{-1}$.

Riešenie: na základe príkladu pri NSD vieme že polyfázové komponenty $\tilde{H}(z)$ sú nesúdeliteľné.

Aby sme našli komplementárny filter hľadáme riešenie rovnice

$\det(\tilde{\mathbf{F}}_p(z)) = \tilde{H}_e(z)\tilde{G}_o(z) - \tilde{H}_o(z)\tilde{G}_e(z) = z^{-1}$ pre $\tilde{H}_e(z) = 1 + 6z^{-1} + z^{-2}$ a $\tilde{H}_o(z) = 4 + 4z^{-1}$ v tvare

$\tilde{G}_o(z) = a$ $\tilde{G}_e(z) = b(1 + z^{-1})$. Riešením sústavy rovníc je $a = 1/4$, $b = 1/16$, t.j. $\tilde{G}(z) = (1 + 4z^{-1} + z^{-2})/16$.

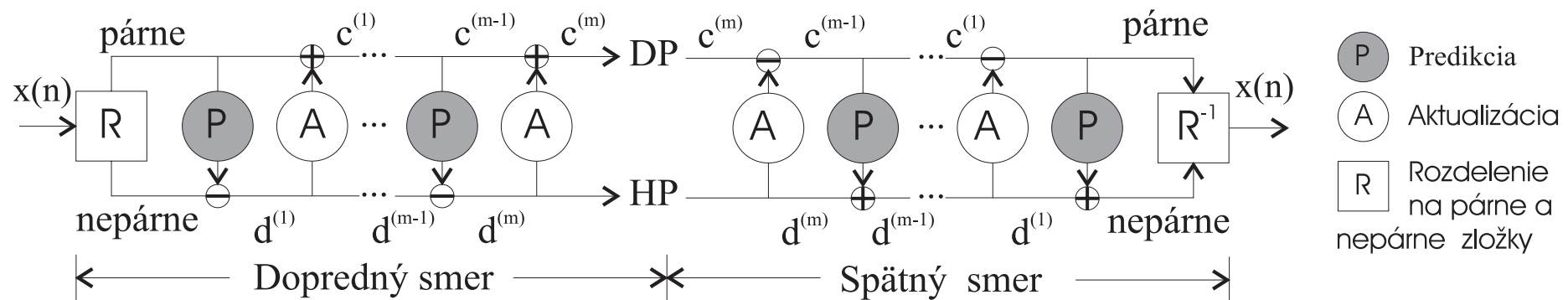
Lifting schéma

- Lifting schéma umožňuje jednoducho zlepšiť špecifické vlastností danej WT – odtiaľ názov „*lifting*“
- Jednoducho opisuje závislosti medzi párami filtrov, ktoré zdieľajú ten istý HP, resp. DP filter. Takto môžeme začať z triviálneho prípadu "lenivého" waveletu a postupne vybudovať pár filtrov s požadovanými vlastnosťami, t.j. postupujeme podľa tzv. *Lifting schémy*
- Umožňuje efektívne realizovať klasické WT s nasledovnými výhodami:
 - urýchlenie implementácie WT (napr. v 1D prípade až dvojnásobne)
 - možnosť vykonať výpočty bez použitia prídavnej pamäte (t.j. "in-place")
 - jednoduchý dizajn vlastných WT (naviac so zaručenou invertovateľnosťou)
- Umožňuje jednoducho rozširovať klasickú WT, zaujímavé sú napr.
 - konštrukcia nelineárnych WT (napr. adaptívnych, celočíselných)
 - použitie WT pre nerovnomerne navzorkované signály
 - konštrukcia WT na intervaloch, krivkách, povrchoch

Konštrukcia lifting schémy je založená na koncepte polyfázového rozkladu bánk filtrov:

- každú FB, môžeme rozložiť (faktorizovať jej filtre) na jednoducho invertovateľnú postupnosť krokov
- Tieto kroky tvoria v algoritme priečkovú štruktúru, ktorú môžeme interpretovať ako postupnosť *predikcií* a *aktualizácií* dvoch množín v obraze až po ich vzájomnú dekoreláciu

Principiálne môžeme waveletovú transformáciu implementovanú lifting schémou prekresliť podľa nasledovného obrázku. Sú vyznačené základné bloky lifting schémy: *rozdelenie*, *predikcia* a *aktualizácia*:



- cieľom predikcie je získanie čo najmenších hodnôt v HP časti po doprednej transformácii.
- aktualizáciou sa snažíme zachovať v DP časti čo najviac vlastností pôvodného obrazu, čo sa stáva dôležitým najmä pri rekurzii v DP časti (aby bola predikcia aj naďalej účinná)

Príklad A: Lenivý wavelet

Aké vlastnosti má naše spektrum?

Vstupný signál je jednoducho podvzorkovaný, takže máme najhorší možný aliasing. Charakter oboch zložiek signálu je rovnaký.

Príklad B: Haarov wavelet

V DP časti chceme dostať priemer susedných koeficientov, v HP časti zase rozdiel. Ak je teda funkcia po častiach konštantná dostávame v HP časti nulové koeficienty.

1) Signál si rozdelíme na párne a nepárne časti:

$$c^{(0)}(n) = x(2n) \quad d^{(0)}(n) = x(2n+1)$$

2) Aktualizujeme priemer (nenormovaný):

$$c^{(1)}(n) = c^{(0)}(n) + d^{(0)}(n)$$

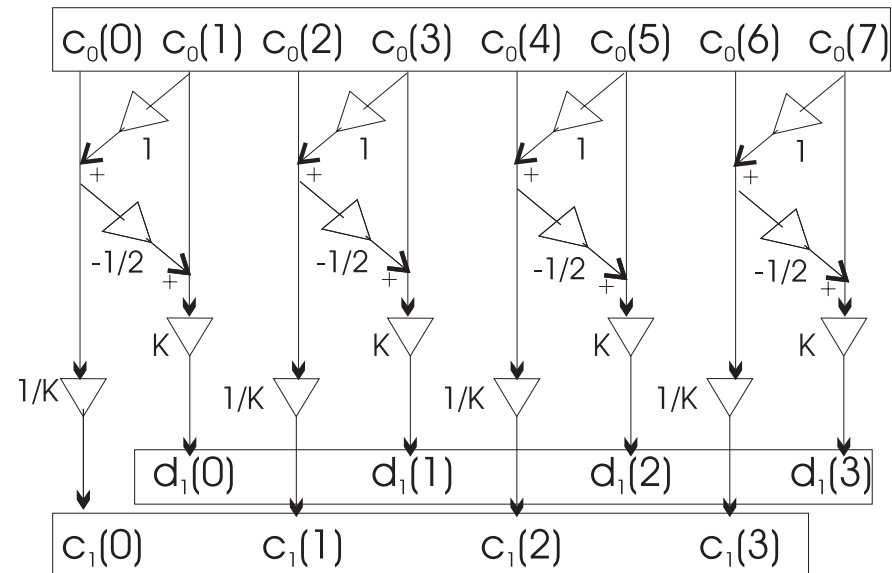
3) Predikujeme HP časť:

$$d^{(1)}(n) = d^{(0)}(n) - 0.5c^{(0)}(n)$$

4) Normalizujeme ($K = \sqrt{2}$):

$$d(n) = Kd^{(1)}(n) = \frac{\sqrt{2}}{2}(x(2n) - x(2n+1))$$

$$c(n) = \frac{1}{K}c^{(1)}(n) = \frac{\sqrt{2}}{2}(x(2n) + x(2n+1))$$



Príklad C: CDF 2,2 wavelet

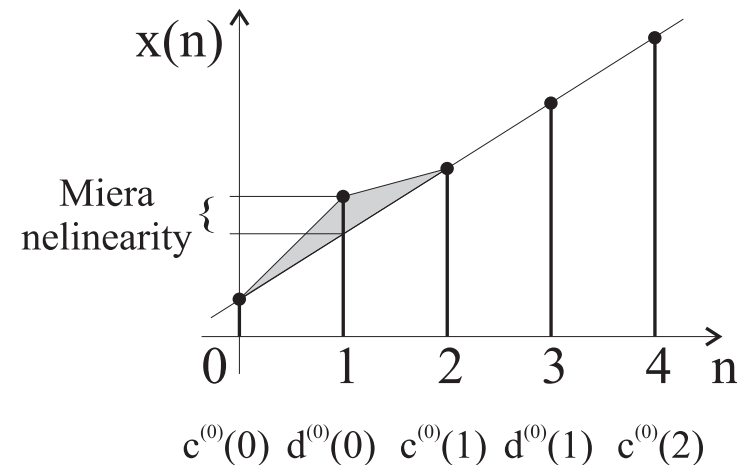
Čo ak chceme reprodukovať po častiach lineárne funkcie?

1) Najprv si rozdelíme signál na párne a nepárne časti:

$$c^{(0)}(n) = x(2n) \quad d^{(0)}(n) = x(2n+1)$$

2) Waveletové koeficienty nám vtedy určujú mieru, ako sa náš signál líši od lineárneho:

$$d^{(1)}(n) = d^{(0)}(n) - \frac{1}{2} [c^{(0)}(n) + c^{(0)}(n+1)]$$



3) V DP časti chceme zachovať aspoň priemer, t.j. jednosmernú zložku signálu. Hľadáme riešenie v tvare:

$$c^{(1)}(n) = c^{(0)}(n) + A [d^{(1)}(n) + d^{(1)}(n-1)]$$

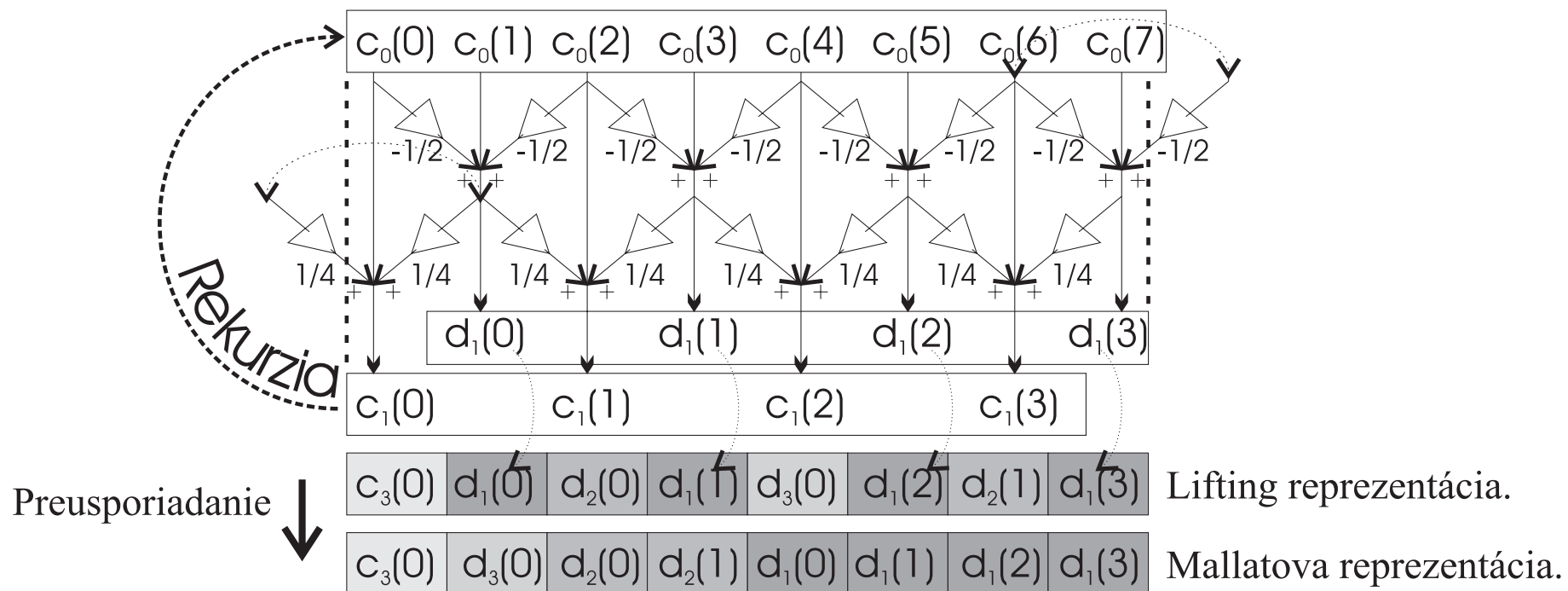
Ak uvážime, že koeficientov $c(n)$ je polovičný počet ako $x(n)$, musí platiť:

$$\sum_n c^{(1)}(n) = \frac{1}{2} \sum_n x(n)$$

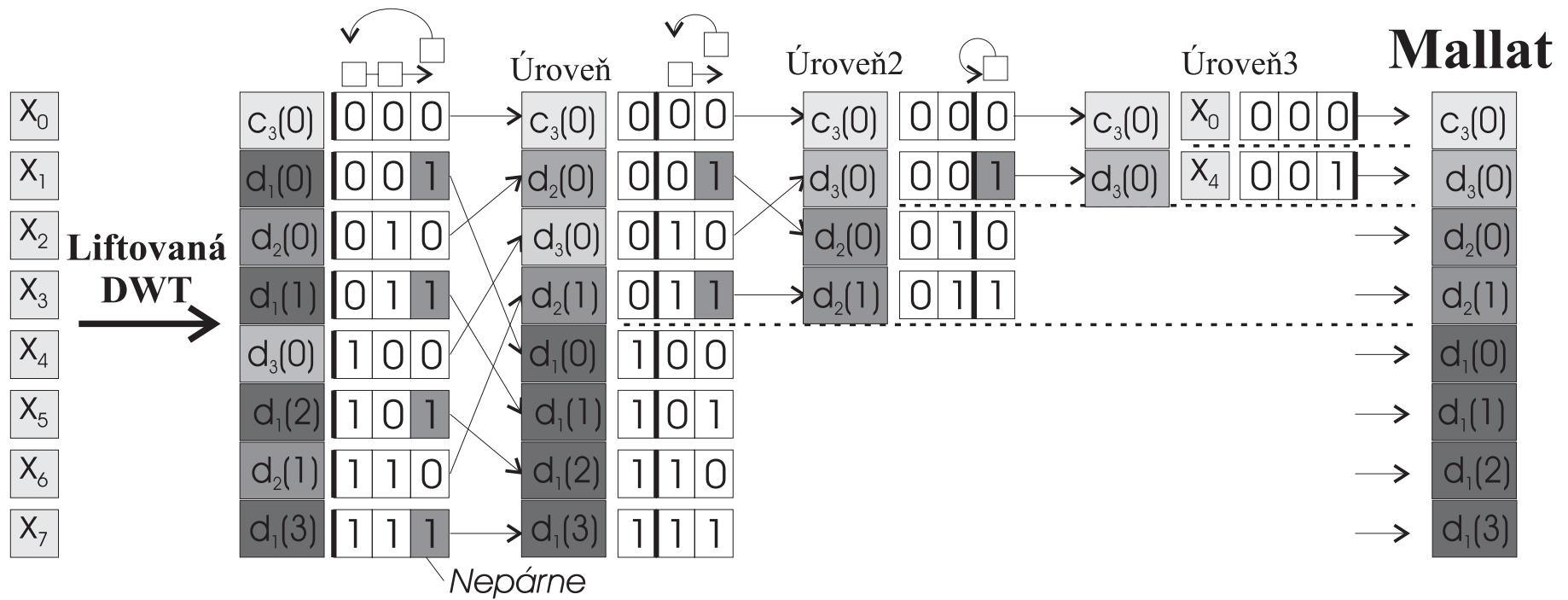
dostaneme hodnotu $A=1/4$.

3) Dostali sme CDF 2,2 filter s $\tilde{h}(n) = \left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}\right)$

Reprezentácia signálu po liftingu (príklad CDF 2,2 wavelet)



Ako preusporiadať koeficienty z Liftingovej reprezentácie do Mallatovej(klasickej)?



O prediktoroch

- Vlastnosti výslednej transformácie sú určené vlastnosťami a spôsobom aplikácie prediktorov
- Teoreticky môžeme použiť ľubovoľné prediktory. Priečková štruktúra nám zaručuje biortogonalitu a tým aj úplnú rekonštrukciu. Môžeme použiť nelineárne prediktory, napr. adaptívne alebo celočíselné. Celočíselné prediktory dostaneme napr. jednoduchým zaokrúhlením hodnoty (nelineárna operácia).

Koncept prediktorov predstavuje silný vzťah medzi *transformačným* a *prediktívnym* kódovaním, kde sa snažíme predpovedať (aproximovať) signál a kódovať iba prípadnú diferenciu od originálneho signálu

Lifting schéma takto principiálne umožňuje dvojaký prístup k dekorelácii dát:

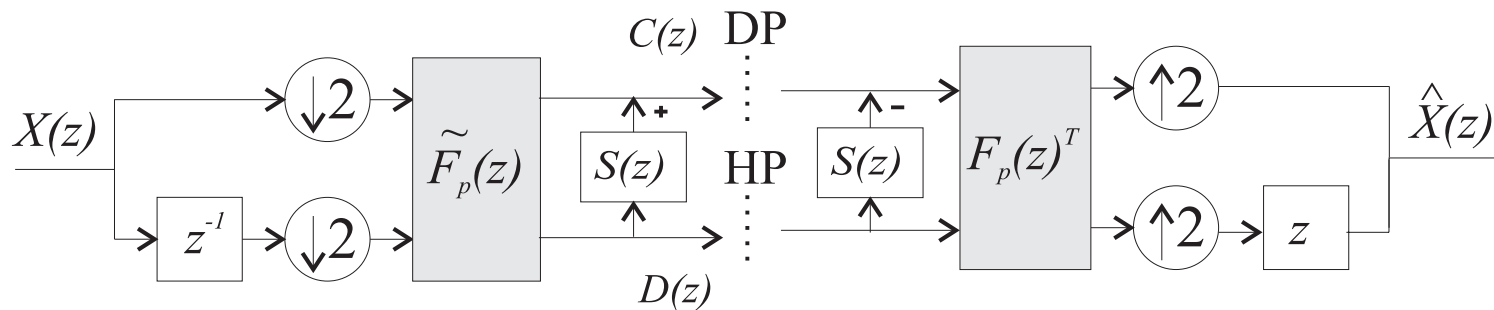
- a) použiť transformačný princíp (t.j. WT) a celý postup faktorizovať na kroky liftingu
- b) využiť priamo predikčný princíp a snažiť sa dáta dekorelovať priamo dizajnom sústavy prediktorov použitých v lifting schéme

Kroky liftingu a polyfázové matice

Nech $\tilde{H}(z)$ a $\tilde{G}(z)$ v FB sú komplementárne, t.j. $\det(\tilde{\mathbf{F}}_p(z)) = z^{-l}$. Potom platí:

- každý nový FIR filter $\tilde{H}^{new}(z)$ resp. $G^{new}(z)$ komplementárny k $\tilde{G}(z)$ resp. $H(z)$ môžeme vyjadriť tzv. **liftingom** z pôvodného filtra ($\det(\tilde{\mathbf{F}}_p(z)) = z^{-l}$ sa zachová, lebo $|AB| = |A||B|$) ako

$$\begin{aligned}\tilde{H}^{new}(z) &= \tilde{H}(z) + S(z^2)\tilde{G}(z) & G^{new}(z) &= G(z) - S(z^{-2})H(z) \\ \tilde{\mathbf{F}}_p^{new}(z) &= \begin{pmatrix} 1 & S(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_p & \mathbf{F}_p^{new}(z) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -S(z^{-1}) & 1 \end{pmatrix} \mathbf{F}_p\end{aligned}$$



Pozámky:

$$1) \text{ Uvedomme si, že } [S(z^2)\tilde{G}(z)]_e = \tilde{G}_e(z)S(z), [S(z^2)\tilde{G}(z)]_o = \tilde{G}_o(z)S(z)$$

$$2) \mathbf{P}(z) = \mathbf{F}_p^T(z)\tilde{\mathbf{F}}_p(z) = \mathbf{F}_p^T \begin{pmatrix} 1 & -S(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & S(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_p = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -S(z^{-1}) & 1 \end{pmatrix} \mathbf{F}_p \right)^T \begin{pmatrix} 1 & S(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_p$$

3) Uvedomme si, že liftingom zmodifikujeme $\tilde{H}(z)$ avšak pri rekonštrukcii to odpovedá modifikácii $G(z)$

4) Uvedomme si, že analýzu a syntézu môžeme zameniť keďže sú vzájomne inverzné.

- každý nový FIR filter $\tilde{G}^{new}(z)$ resp. $H^{new}(z)$ komplementárny k $\tilde{H}(z)$ resp. $G(z)$ môžeme vyjadriť tzv. **duálnym liftingom** z pôvodného filtra ako

$$\tilde{G}^{new}(z) = \tilde{G}(z) + T(z^2)\tilde{H}(z) \quad H^{new}(z) = H(z) - T(z^{-2})G(z)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_p^{new}(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T(z) & 1 \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_p \quad \mathbf{F}_p^{new}(z) = \begin{pmatrix} 1 & -T(z^{-1}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{F}_p$$

, kde

$$S(z) = \sum_n s(n)z^{-n} \quad T(z) = \sum_n t(n)z^{-n}$$

sú prenosovými funkciami FIR filtrov a môžu byť interpretované ako *prediktory*.

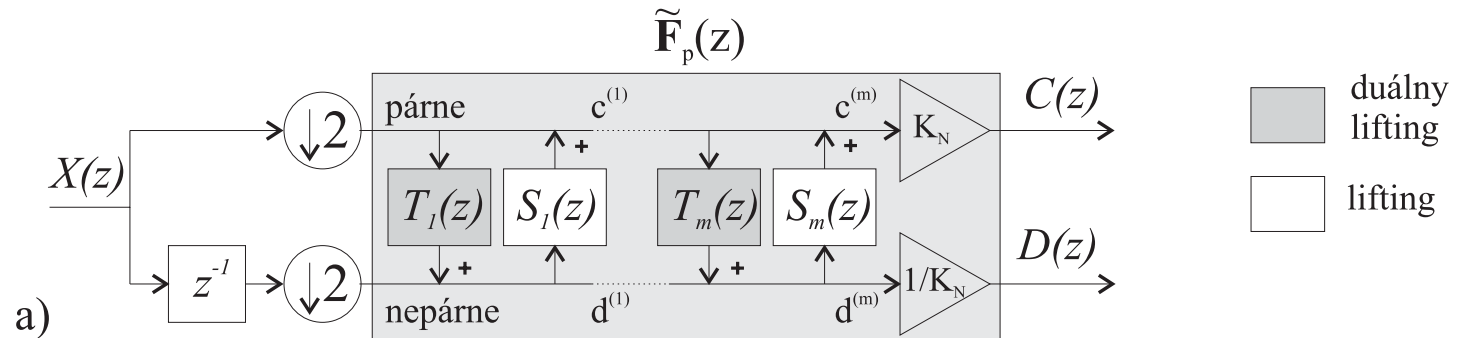
Vidíme, že determinanty $\tilde{\mathbf{F}}_p$ a $\mathbf{F}_p$ po liftingu resp. duálnom filtringu zostávajú konštantné.

Striedaním krokov liftingu a duálneho liftingu začínajúc s "lenivým" waveletom, pre ktorý platí $\tilde{\mathbf{F}}_p(z) = \mathbf{I}$, t.j.

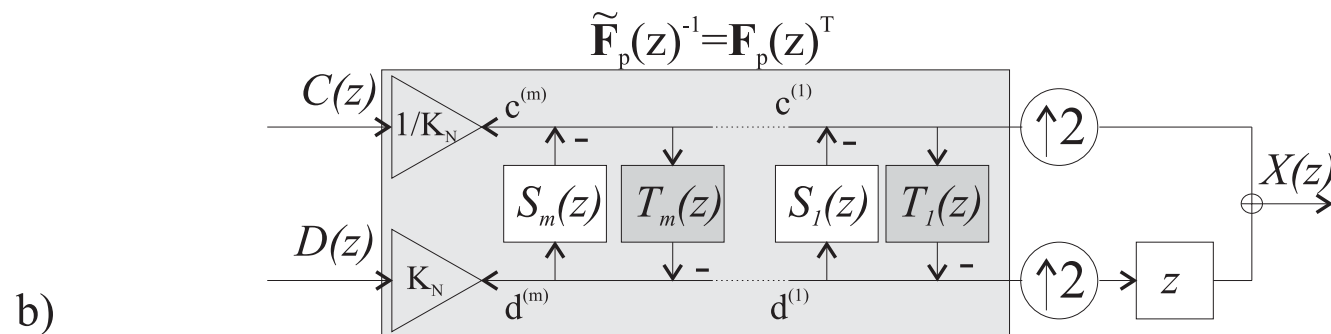
$$\begin{pmatrix} C(z) \\ D(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_e(z) \\ z^{-1} X_o(z) \end{pmatrix}$$

môžeme postupne konštruovať wavelet s lepšími a lepšími vlastnosťami:

Rozklad



Rekonštrukcia



Každá polyfázová matica reprezentujúca FB s FIR filtrami a úplnou rekonštrukciou môže byť zapísaná v tvare:

Analýza

$$\mathbf{F}_p(z) = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 1/K \end{pmatrix} \prod_{i=m}^1 \left\{ \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & S_i(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}^{\text{lifting}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T_i(z) & 1 \end{pmatrix}}_{\text{duálny lifting}} \right\}$$

Rekonštrukcia

$$\mathbf{F}_p^{-1}(z) = \prod_{i=1}^m \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -T_i(z) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -S_i(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 1/K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}$$

Opačný smer: Máme maticu $\mathbf{F}_p(z)$ a chceme získať kroky liftingu.

Rozklad danej matice $\mathbf{F}_p(z)$ na *dolné a horné trojuholníkové matice* dostaneme tzv. *faktorizáciu*, čo je postup analogický euklidovému algoritmu na hľadanie najväčšieho spoločného deliteľa (NSD) polynómov (v našom prípade prenosových funkcií filtrov v z rovine).

- Pre polynómy NSD nie je jedinečný.
- Pri faktorizácii *odštiepujeme* striedavo $T_i(z)$ (duálny lifting) a $S_i(z)$ (lifting) ktoré nám efektívne znižujú Laurentove dĺžky polyfázových komponentov
- Striedaním týchto dvoch krokov sa snažíme dopracovať k *diagonálnej matici*.

$$\tilde{\mathbf{F}}_p(z) = \begin{pmatrix} \tilde{H}_e(z) & \tilde{H}_o(z) \\ \tilde{G}_e(z) & \tilde{G}_o(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{H}_e^{new}(z) & \tilde{H}_o(z) \\ \tilde{G}_e^{new}(z) & \tilde{G}_o(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T_i(z) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{H}_e(z) - \tilde{H}_o(z)T_i(z) & \tilde{H}_o(z) \\ \tilde{G}_e(z) - \tilde{G}_o(z)T_i(z) & \tilde{G}_o(z) \end{pmatrix}$$

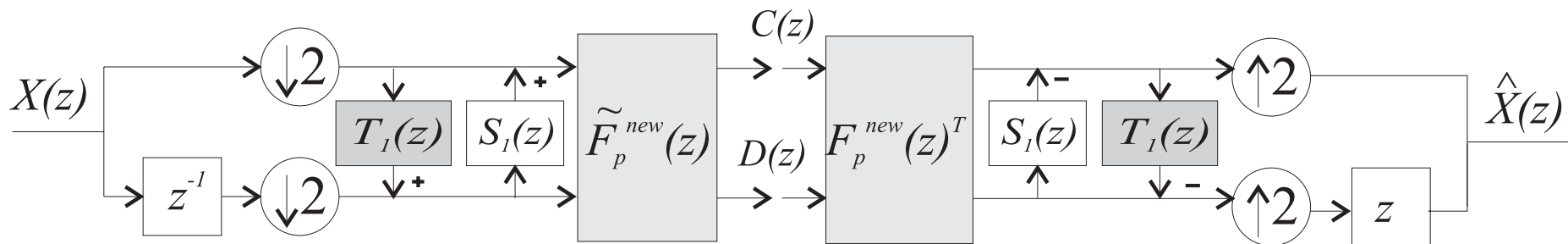
$$\begin{pmatrix} \tilde{H}_e(z) & \tilde{H}_o^{new}(z) \\ \tilde{G}_e(z) & \tilde{G}_o^{new}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & S_i(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{H}_e(z) & \tilde{H}_o(z) - \tilde{H}_e(z)S_i(z) \\ \tilde{G}_e(z) & \tilde{G}_o(z) - \tilde{G}_e(z)S_i(z) \end{pmatrix}$$

Otázka: Prečo sú odštiepené matice na konci vzťahu?

Pri odštiepovaní $T_i(z)$ volíme $T_i(z) = \tilde{H}_e(z) / \tilde{H}_o(z)$ alebo $T_i(z) = \tilde{G}_e(z) / \tilde{G}_o(z)$, t.j. podľa toho či chceme cielene minimalizovať $\tilde{H}_e^{new}(z)$ alebo $\tilde{G}_e^{new}(z)$.

Pri odštiepovaní $S_i(z)$ volíme $S_i(z) = \tilde{H}_o(z) / \tilde{H}_e(z)$ alebo $S_i(z) = \tilde{G}_o(z) / \tilde{G}_e(z)$, t.j. podľa toho či chceme cielene minimalizovať $\tilde{H}_o^{new}(z)$ alebo $\tilde{G}_o^{new}(z)$.

Odštiepovanie z polyfázovej matice, odštiepené prvé $T_i(z)$ a $S_i(z)$:



Ako teda nájsť faktorizáciu na kroky liftingu ?

Ak chceme pár komplementárnych filtrov $H(z)$, $G(z)$ faktorizovať, musia byť $H_e(z)$ a $H_o(z)$ nesúdeliteľné, lebo kvôli ich spoločnému faktoru by determinant polyfázovej matice nebol mononóm. Použitím Euklidovho algoritmu dostaneme rozklad:

$$\begin{pmatrix} H_e(z) \\ H_o(z) \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^n \begin{pmatrix} Q_i(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K \\ 0 \end{pmatrix}$$

, kde vhodnou voľbou kvocientov môžeme vďaka nejednoznačnosti delenia dostať $A_n(z) = \text{konštanta} = K$.

Ak máme daný filter $H(z)$, vždy môžeme k nemu nájsť komplementárny filter (označme ho $G_0(z)$) voľbou:

$$\mathbf{F}_{p0}^T(z) = \begin{pmatrix} H_e(z) & G_{0e}(z) \\ H_o(z) & G_{0o}(z) \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^n \begin{pmatrix} Q_i(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 1/K \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n/2} \begin{pmatrix} 1 & Q_{2i-1}(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Q_{2i}(z) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 1/K \end{pmatrix}$$

a ľubovoľný $G(z)$ komplementárny k $H(z)$ môžeme obdržať z $G_0(z)$ jedným liftingom, napr.:

$$\mathbf{F}_p(z) = \mathbf{F}_{p0}(z) \begin{pmatrix} 1 & s(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pozn1: Na precvičenie dokázať, že $\begin{pmatrix} Q_a(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_b(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & Q_a(z) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Q_b(z) & 0 \end{pmatrix}$

Kombináciou uvedených vzťahov dostávame tvrdenie:

Pre dané komplementárne filtre $H(z)$, $G(z)$ vždy existujú Laurentove polynómy $S_i(z)$, $T_i(z)$ a taká konštanta K , že platí:

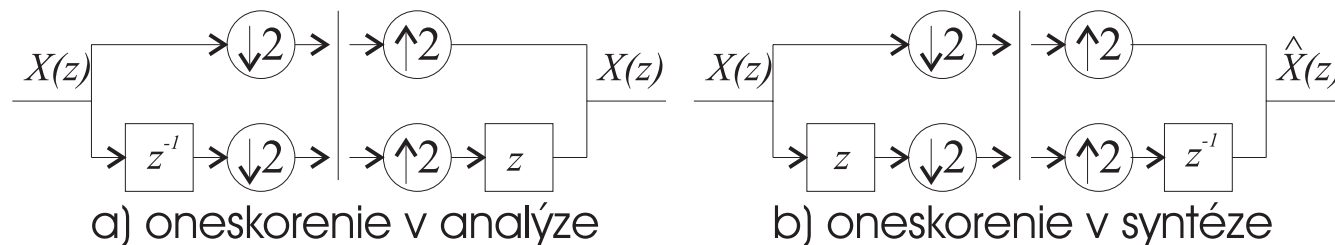
$$\begin{pmatrix} H_e(z) & G_e(z) \\ H_o(z) & G_o(z) \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^n \begin{pmatrix} 1 & S_i(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T_i(z) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 1/K \end{pmatrix}$$

resp. z vlastností transponovania súčinu

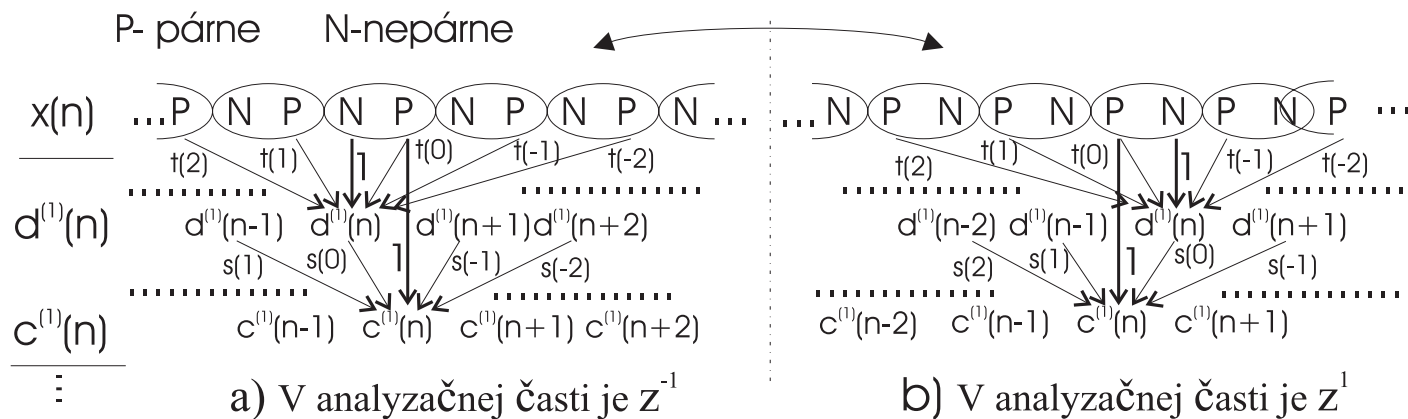
$$\begin{pmatrix} H_e(z) & H_o(z) \\ G_e(z) & G_o(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 1/K \end{pmatrix} \prod_{i=1}^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ S_i(z) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & T_i(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Máme kroky liftingu vypočítané, ako aplikovať pri výpočte naše $T_i(z)$ a $S_i(z)$?

Akým spôsobom sme rozložili filtre na polyfázové komponenty?



Prvý krok predikcie a následného potvrdenia pri liftingu môžeme potom znázorniť:



Odpovedajúci matematický zápis:

Predikcia:
$$d^{(j+1)}(n) = d^{(j)}(n) + \sum_{\forall k} t(k) c^{(j)}(n-k)$$

Potvrdenie:
$$c^{(j+1)}(n) = c^{(j)}(n) + \sum_{\forall k} s(k) d^{(j)}(n-k)$$

Príklad1: Nájdite faktorizáciu filtrov:

$$\tilde{h}(z) = -\frac{1}{8}z^{-2} + \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}z - \frac{1}{8}z^2$$

$$\tilde{g}(z) = \frac{1}{4}z^{-2} - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}$$

Riešenie1: Vstupný signál je v tvare:

$$x(z) = x_e(z^2) + z^{-1}x_o(z^2)$$

Filtre sú v tvare:

$$\tilde{h}(z) = \underbrace{\left\{ -\frac{1}{8}z^{-2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{8}z^2 \right\}}_{\tilde{h}_e(z^2)} + z^{-1} \underbrace{\left\{ \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z^2 \right\}}_{\tilde{h}_o(z^2)}$$

$$\tilde{g}(z) = \underbrace{\left\{ \frac{1}{4}z^{-2} + \frac{1}{4} \right\}}_{\tilde{g}_e(z^2)} + z^{-1} \underbrace{\left\{ -\frac{1}{2} \right\}}_{\tilde{g}_o(z^2)}$$

t.j.:

$$\begin{aligned} \tilde{h}_e(z) &= -\frac{1}{8}z^{-1} + \frac{3}{4} - \frac{1}{8}z & \tilde{h}_o(z) &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z \\ \tilde{g}_e(z) &= \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{1}{4} & \tilde{g}_o(z) &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Polyfázová matica $\tilde{\mathbf{F}}_p$ z nich vytvorená je:

$$\tilde{\mathbf{P}}(z) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8}z^{-1} + \frac{3}{4} - \frac{1}{8}z & \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z \\ \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Jej determinant je mononóm:

$$\left(-\frac{1}{8}z^{-1} + \frac{3}{4} - \frac{1}{8}z\right)\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}z\right)\left(\frac{1}{4}z^{-1} + \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2}$$

Začneme striedavo odštiepovať:

1) KROK A

$$\tilde{P}(z) = \begin{pmatrix} \tilde{h}_e^{new}(z) & \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z \\ \tilde{g}_e^{new}(z) & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tilde{t}(z) & 1 \end{pmatrix}$$

T.j. hľadáme riešenie pre:

$$-\frac{1}{8}z^{-1} + \frac{3}{4} - \frac{1}{8}z = \tilde{t}(z)\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}z\right) + \tilde{h}_e^{new}(z)$$

$$\frac{1}{4}z^{-1} + \frac{1}{4} = \tilde{t}(z)\left(-\frac{1}{2}\right) + \tilde{g}_e^{new}(z)$$

Ak inicializujeme Euklidov algoritmus s $a_0 = \tilde{h}_e(z)$ and $b_0 = \tilde{h}_o(z)$, máme po prvom kroku 3 možnosti:

$$-\frac{1}{8}z^{-1} + \frac{3}{4} - \frac{1}{8}z = \begin{cases} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}z^{-1} + \frac{7}{2} \\ -\frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z \end{pmatrix} & -z \\ \begin{pmatrix} \frac{7}{2}z^{-1} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z \end{pmatrix} & +1 \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z \end{pmatrix} & -z^{-1} \end{cases}$$

Z nich si vyberieme symetrické riešenie:

$$\tilde{P}(z) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Pokračovaním postupu dostaneme:

$$\tilde{P}(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Teraz už len treba výsledky správne interpretovať.

Príklad2: Ak sme faktorizovaním BF dostali(vid' predchádzajúci príklad):

$$\tilde{\mathbf{F}}_p(z) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Napíšte kroky liftingu pre doprednú a spätnú transformáciu v čase:

Riešenie:

Dopredná DWT

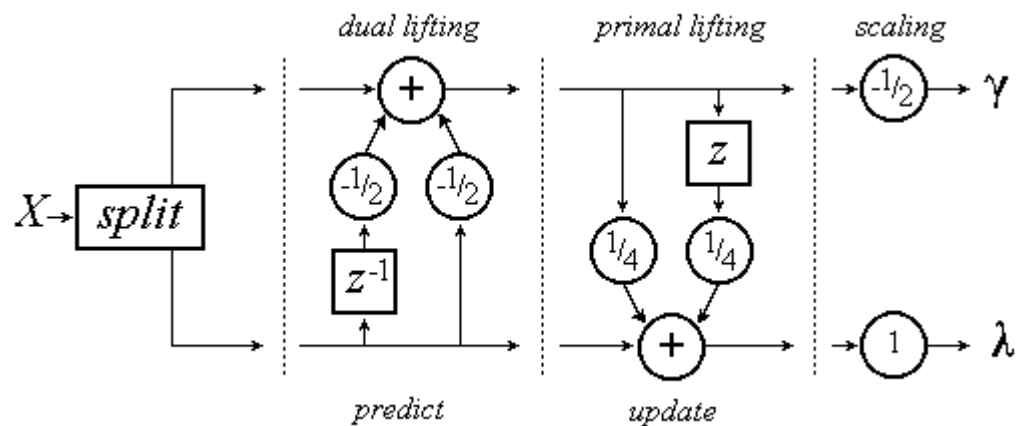
$$\begin{aligned} c^{(0)}(n) &= x(2n) & d^{(0)}(n) &= x(2n-1) \\ d^{(1)}(n) &= d^{(0)}(n) + \left[-\frac{1}{2}c^{(0)}(n) - \frac{1}{2}c^{(0)}(n-1) \right] \\ c^{(1)}(n) &= c^{(0)}(n) + \left[\frac{1}{4}d^{(1)}(n+1) + \frac{1}{4}d^{(1)}(n) \right] \\ c(n) &= \sqrt{2} c^{(1)}(n) & d(n) &= \frac{1}{\sqrt{2}} d^{(1)}(n) \end{aligned}$$

Spätná DWT

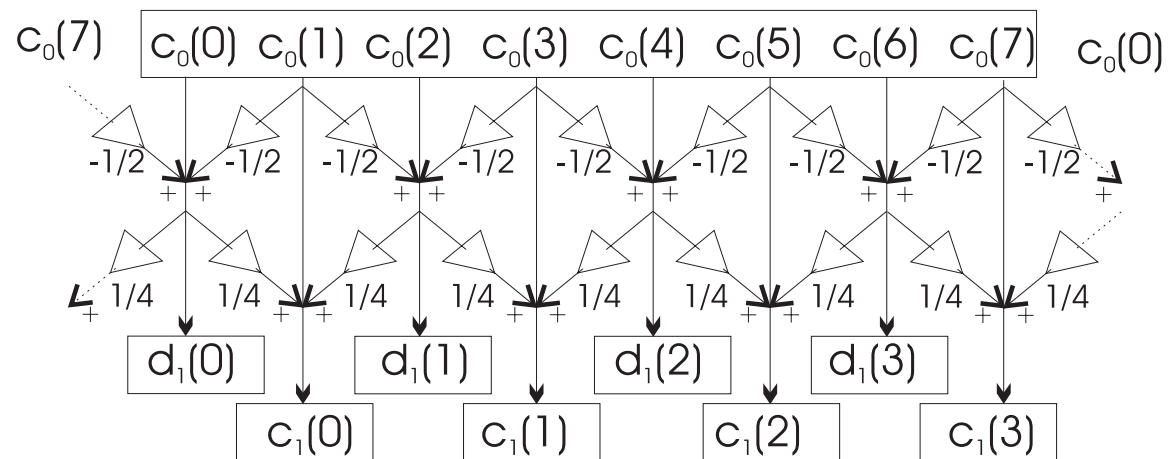
$$\begin{aligned} \hat{c}^{(1)}(n) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{c}(n) & \hat{d}^{(1)}(n) &= \sqrt{2} \hat{d}(n) \\ \hat{c}^{(0)}(n) &= \hat{c}^{(1)}(n) - \left[\frac{1}{4} \hat{d}^{(1)}(n+1) + \frac{1}{4} \hat{d}^{(1)}(n) \right] \\ \hat{d}^{(0)}(n) &= \hat{d}^{(1)}(n) + \left[-\frac{1}{2} \hat{c}^{(0)}(n) - \frac{1}{2} \hat{c}^{(0)}(n-1) \right] \\ \hat{x}(2n) &= \hat{c}^{(0)}(n) & \hat{x}(2n-1) &= \hat{d}^{(0)}(n) \end{aligned}$$

Grafická reprezentácia je ako v Príklade C na začiatku prednášky - až na opačné spájanie do dvojíc ako v obrázku na strane 16 po a) resp b).

Reprezentácia výsledku blokovou schémou je nasledovná:



Grafická reprezentácia v čase je potom:



Príklad3: Ak kroky liftingu pre doprednú transformáciu v čase sú:

$$c^{(0)}(n) = x(2n) \quad d^{(0)}(n) = x(2n-1)$$

$$d^{(1)}(n) = d^{(0)}(n) + \left[-\frac{1}{2}c^{(0)}(n) - \frac{1}{2}c^{(0)}(n-1) \right]$$

$$c^{(1)}(n) = c^{(0)}(n) + \left[\frac{1}{4}d^{(1)}(n+1) + \frac{1}{4}d^{(1)}(n) \right]$$

$$c(n) = c^{(1)}(n) \quad d(n) = -\frac{1}{2}d^{(1)}(n)$$

Transformujte (stačí jeden stupeň rozkladu) signal $x(n) = \{1, 3, 2, 7, 6, 5, 8, 2\}$, použite pritom periodické rozšírenie.

Riešenie:

$x(n)$	1	3	2	7	6	5	4	2	$\Sigma=30$
$d^{(0)}(n)$		3		7		5		2	
$c^{(0)}(n)$	1		2		6		4		$\Sigma=13$
$d^{(1)}(n)$		1.5		3		0		-0.5	
$c^{(1)}(n)$	1.25		3.125		6.75		3.875		$\Sigma=15$
$d(n)$		-0.75		-1.5		0		0.25	
$c(n)$	1.25		3.125		6.75		3.875		$\Sigma=15$

T.j.: $c(n) = \{1.25, 3.125, 6.75, 3.875\}$, $d(n) = \{1.5, -1.5, 0, 0.25\}$

Lifting – aké je urýchlenie vypočtov?

- Výpočet FFT – komplexnosť rádu $N \cdot \log(N)$
- Výpočet DWT – komplexnosť rádu N
- Výpočet DWT liftingom – ďalšie *zníženie počtu operácií až na polovicu*.

Priemerný počet násobení a sčítaní na výpočet jedného koeficientu pri DWT jednostupňovom rozklade:

Typ waveletu	DWT klasicky	DWT liftingom	Urychlenie
Haar	3	3	0%
Db2	14	9	56%
Db3	22	14	57%
FBI (9,7)	23	14	64%
B-spline(4,2)	17	10	70%
Interpoláčné(N,Ntilde)	$3(N+Ntilde)-2$	$3/2(N+Ntilde)$	100%

Lifting – ako vykonať celočíselné transformácie?

- používať celočíselné prediktory (operácia zaokrúhľovania)
- problematická normalizácia pásiem
 - o nerobiť normalizáciu (zvýši nám dynamiku dát)
 - o aproximovať normalizáciu krokmi liftingu, t.j. využiť vlastnosť

$$\begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 1/K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & K - K^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/K & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & K - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Intermezzo: Čo sú to interpolačné filtre?

DP Filter $\tilde{H}(z)$ nazývame *interpolačný*, ak je schopný interpolovať koeficienty prestriedané nulami (najradšej ako polynómy R-tého rádu).

Ak je filter *polpásmový* tak je aj interpolačný:

Prečo?

Lebo interpoluje párne koeficienty z nepárnych, resp. naopak (polpásmový filter má v impulzovej charakteristike okrem počiatku párne koeficienty nulové)

Ako vypočítame koeficienty interpolačných filtrov? -> T.z.v Nevillovým algoritmom.

Príklady Interpolačných filtrov: Haarov wavelet – konštantná interpolácia $h(n)=\{1,1\}$, CDF 2,2 – lineárna intarpolácia, $h(n)=\{1/2, 1, 1/2\}$, 4-bodová schéma $h(n)=\{-1/16, 0, 9/16, 1, 9/16, 0, -1/16\}, \dots$

Aká je ich polyfázová reprezentácia? Keďže pre polpásmové filtre $\tilde{H}_e(z)=1$, faktorizácia liftingu sa dá urobiť v dvoch krokoch:

$$\tilde{F}_p(z) = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{H}_o \\ \tilde{G}_e & \tilde{G}_o \end{pmatrix} \xrightarrow{\det=1} \begin{pmatrix} 1 & \tilde{H}_o \\ \tilde{G}_e & 1 + \tilde{G}_e \tilde{H}_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tilde{G}_e & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \tilde{H}_o \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Počítačová grafika a interpolačné delenie intervalov

- Dôležitý cieľ - lokálne opakovane(!) zjemniť danú sieť bodov a ich hodnôt – výsledkom by mala byť hladká funkcia
- Tento process si môžeme predstaviť ako inverznú waveletovú transformáciu bez “detailov”.