Slovenská technická univerzita
Fakulta elektrotechniky a informatiky

Katedra telekomunikácií

Wavelety a banky filtrov

2003 **Ing. Radoslav Vargic, PhD.**

Obsah

Predhovor

Čitateľ dostáva do rúk skriptá, ktorých cieľom je priblížiť problematiku waveletovej transformácie a bánk filtrov. Matematický aparát, o ktorý sa skriptá opierajú, je dosť široký. Sú potrebné základné znalosti z lineárnej algebry, Fourierovej analýzy, Z-transformácie a číslicového spracovania signálov. Predpokladám, že čitateľ sa s väčšinou týchto oblastí už stretol. Preto sú priamo do učebného textu vložené iba tie informácie, ktoré priveľmi nenarúšajú spojitosť výkladu. Zvyšok potrebných informácií je uvedený v dodatku.

Na mieste, kde je nejaký pojem vysvetlený, je tento pojem zvýraznený tučným písmom. Ak je na toto miesto odkaz v registri, je zodpovedajúce číslo strany napísané taktiež tučným písmom.

Vzhľadom na rôznorodosť problematiky bol častokrát problém vysvetliť dané pojmy skôr, ako sú na inom mieste skrípt použité. Preto sú kapitoly 1 a 2 koncipované viac z pohľadu matematického (predovšetkým lineárna algebra a Fourierova analýza) a kapitola 3 rieši problematiku výhradne z pohľadu číslicového spracovania signálov.

V skriptách je vysvetlená predovšetkým teória súvisiaca s uvedenou problematikou. Snažil som sa v nich umiestniť dostatok riešených príkladov, ktoré by prípadné nejasnosti pomohli objasniť, avšak vzhľadom na dovolený rozsah skrípt to bola úloha veľmi obtiažna. Na viacerých miestach sú uvedené aj neriešené príklady a problémy, ktoré by pozorný a hĺbavý čitateľ mal vedieť vyriešiť.

Koncepcia skrípt je mierne ovplyvnená snahou o to, aby si čitateľ ľahko mohol väčšinu získaných vedomostí overiť a aplikovať v programe Matlab (viaceré obrázky v skriptách vznikli taktiež pomocou programu Matlab).

Všetky prípadné doplnkové informácie k skriptám budú uverejňované na internetovej stránke `http://www.ktl.elf.stuba.sk/~vargic/wabf/skripta`.

Skriptá sú určené pre študentov 1. ročníka inžinierskeho štúdia v odbore telekomunikácií na FEI STU. Na Slovensku z uvedenej oblasti zatiaľ žiadny učebný text v podobnom rozsahu publikovaný nebol, preto verím, že skriptá nájdu svojich čitateľov aj v širšej akademickej a odbornej obci.

Kapitola 1

Wavelety a waveletová transformácia

1.1 Stručná história waveletov

Hoci v oblasti spracovania signálov sa začala waveletová transformácia používať iba v ostatných desaťročiach, v matematike (predovšetkým v oblasti harmonickej analýzy) sa podobné princípy používali už dlhšie. Korene waveletovej analýzy siahajú až do začiatku minulého storočia. Prvý „*wavelet*“ skonštruoval I.Haar v r. 1910 pri konštrukcii alternatívneho ortonormálneho systému k Fourierovmu. Veľa práce sa vykonalo v 30. rokoch, výsledky sa však nejavili ako časti koherentnej teórie, neobjavilo sa slovo *wavelet* ani zodpovedajúci koncept. V matematike vývoj ďalej pokračoval dyadickým delením Fourierovského spektra (techniky Littlewood-Paleyho) s vyústením do harmonickej analýzy (Calderon-Zygmund operátory). Prvé ortogonálne wavelety objavil Strömberg začiatkom 80. rokov. V mnohých oblastiach vedy a techniky sa wavelety objavili už na konci 70. rokov. Boli však vyrobené vedcami a inžiniermi „na kolene“ — nevznikli nadviazaním na výsledky matematikov.

Prvú syntézu podnietili práce J. Goupillauda, J. Morleta a A. Grossmana (začiatok 80. rokov), od ktorých pochádza aj význam slova „*wavelet*“ . V kontexte geofyziky skúmali alternatívy k *Lokálnej Fourierovej analýze*, založenej na jedinej prototypovej funkcii, jej posunov a zmeny mierky. V tom čase začalo byť zrejmé, že prostriedky z teórie Calderona-Zygmunda, predovšetkým reprezentácie Littlewooda-Paleyho, majú diskrétnu analógiu a môžu byť efektívnou náhradou Fourierových radov v numerických aplikáciách. Dôraz sa začal klásť skôr na spôsob reprezentácie samotnej a to, čo predtým spadalo pod rámec teórie Littlewooda a Palleyho, sa odteraz začalo volať *waveletová teória*.

Nový štart podnietil S. Mallat (1985), ktorý objavil tesné vzťahy medzi: QMF filtrami pre digitálne prenosové systémy (Crossier, Esteban, Galand), pyramidálnym algoritmom používaným na spracovanie obrazu (Burt, Adleson) a ortonormálnymi waveletovými bázami (Strömberg). Postupne vznikali konštrukcie waveletov, ktoré tvorili bázy pre mnohé priestory funkcií (Y. Meyer, I. Daubechies, Battle, Lemarie . . .). Formalizáciou týchto konštrukcií do jednotného rámca S.Mallat a Y.Meyer (1988–1990) vytvorili „analýzu s viacúrovňovým rozlíšením“, pomocou ktorej vytvorili vzťahy k metódam používaným v iných odvetviach.

V súčasnosti predstavuje waveletová transformácia (WT) mocný nástroj na analýzu a reprezentáciu spojitých aj diskrétnych signálov a to najmä kvôli svojim časovo-frekvenčným vlastnostiam..

Oblasti použitia waveletov sú rôznorodé, patria medzi ne napr.: matematika [19], [20], [27], [28], [25], rôzne technické odbory (pri analýze fyzikálnych dejov) [26], [30], počítačová grafika [29], [43], číslicové spracovanie signálov [9], [10], [11], [12], [13] a multimediálne komunikácie [24], [50], [14]. V súčasnosti existuje viacero monografií, ktoré sa venujú waveletom a príbuzným oblastiam, či už z pohľadu matematického [18], [20], alebo skôr z pohľadu číslicového spracovania signálov [17], [21], [22], [23].

1.2 Spektrá a časovo-frekvenčná analýza signálov

Pod pojmom „signál“ rozumieme vektor v niektorom z *Hilbertových priestorov*[1] [21]. Signál zvyčajne predstavuje diskrétny alebo spojitý priebeh nejakej meniacej sa veličiny v ***časovej oblasti***. ***Transformáciou*** signálu sa dostávame do tzv. ***transformačnej oblasti***, kde je reprezentovaný tzv. ***spektrom***. *Spektrum* je tvorené ***spektrálnymi koeficientmi*** signálu. Najznámejšou transformačnou oblasťou je ***Fourierovská***, kde je signál reprezentovaný ***frekvenčným*** spektrom. ***Fourierova transformácia*** (pozri dodatok 6.1) rozkladá signál iba na frekvenčné zložky. Neposkytuje však informáciu, *kedy* signál vykazuje dané frekvenčné charakteristiky (jej bázové funkcie rovnomerne prekrývajú celú časovú os) — nevie žiadne charakteristiky lokalizovať v čase.

Pri analýze a reprezentácii signálov je častokrát výhodné použiť transformáciu, ktorá reprezentuje signál súčasne v čase aj frekvencii.

Riešenie vo forme ***krátkodobej Fourierovej transformácie*** — STFT (*Short Time Fourier Transform*), Gábor (1946), posúva okno fixnej veľkosti pozdĺž signálu a extrahuje frekvenčný obsah v danom intervale [2], [17]:

$$STFT_f\left(\omega,\tau\right)=\int_{-\infty}^{\infty}f\left(t\right)g\left(t-\tau\right)\,e^{-j\omega t}dt=\left\langle f\left(t\right),g\left(t-\tau\right)e^{j\omega t}\right\rangle\,, \tag{1.1}$$

kde $g(t)$ je ***oknová funkcia***[2] a $f(t)$ vstupná funkcia. Vidíme, že reprezentácia je výrazne nadbytočná (je funkciou dvoch spojitých premenných ω ,τ). Preto funkcie, pomocou ktorých sme transformovali sú lineárne závislé, takže netvoria *bázu*, ale všeobecnejšiu množinu ***expanzných funkcií***. Expanzné funkcie sú pri STFT generované *moduláciou* a *posunom* oknovej funkcie. Ak oknová funkcia je *Gaussova funkcia*, tak STFT sa volá ***Gáborova transformácia***. Nadbytočnosť STFT môžeme odstrániť výberom vhodných spektrálnych koeficientov, tzv. ***kritickým vzorkovaním***[3] spektra. Potom však STFT stráca dobré časovo-frekvenčné vlastnosti (pozri *Balianova-Lawova veta* [21, str. 326]).

Pre znázornenie časovo-frekvenčných vlastností funkcií resp. signálov sa často používa tzv. ***časovo-frekvenčná (TF) rovina*** [17]. V TF rovine je každý signál reprezentovaný tzv. ***časovo-frekvenčným oknom***. To charakterizuje umiestnenie energie signálu v čase a frekvencii. Označme náš signál ako $f(t)$ a jeho Fourierovu transformáciu $F(\omega)$. Ak $f(t)\in L^2(\mathcal{R})$, potom[4] jeho TF okno má konečnú veľkosť. Jeho stred je v bode $S_{t\omega}=(t_0,\omega_0)$ a veľkosti strán sú $2\sigma_t,2\sigma_\omega$. O ω_0 zvykneme hovoriť ako o tzv. ***strednej (uhlovej) frekvencii signálu***. Príklad zobrazenia TF okna reálneho signálu (modulovaná Gaussova funkcia, t. j. ***Gáborova funkcia***) je na obr. 1.1. Pre polohu a rozmery okna platí [19, str. 7]:

$$t_0=\left\|f\left(t\right)\right\|^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}t\left|f\left(t\right)\right|^2dt \qquad \sigma_t^2=\left\|f\left(t\right)\right\|^{-2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(t-t_0\right)^2\left|f\left(t\right)\right|^2dt\,. \tag{1.2}$$

Vo frekvenčnej oblasti analogicky môžeme písať [5]:

$$\omega_0=\left\|F\left(\omega\right)\right\|^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\omega\left|F\left(\omega\right)\right|^2d\omega \qquad \sigma_\omega^2=\left\|F\left(\omega\right)\right\|^{-2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\omega-\omega_0\right)^2\left|F\left(\omega\right)\right|^2d\omega\,. \tag{1.3}$$

---

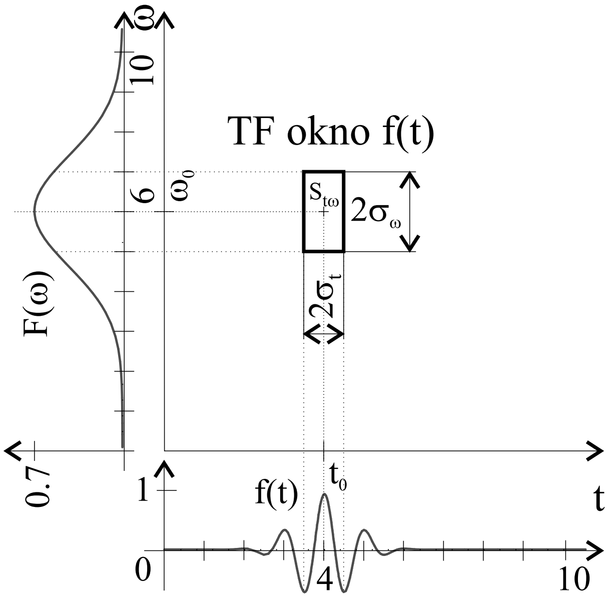
[1] Základný popis Hilbertových priestorov a operácií v nich je v časti 6.4.

[2] Za oknovú môže byť považovaná [19, str. 54] taká funkcia $g(t)\in L^2(\mathcal{R})$, pre ktorú platí $t.g(t)\in L^2(\mathcal{R})$.

[3] Pri vzorkovaní vyberáme hodnoty $\omega=m\omega_0$, $t=nt_0$, $m,n\in\mathcal{Z}$. Ak $t_0\omega_0=2\pi$, vzorkovanie je kritické [21], t. j. nadbytočnosť je úplne odstránená.

[4] Pre definíciu priestoru $L^2(\mathcal{R})$ pozri str.119

[5] Vzťahy (1.3) vystihujú situáciu iba pre signály s jednosmernou zložkou, ktorú chceme v TF okne obsiahnuť (uvedomme si, že platí $\omega_0=0$, t. j. okno je symetrické okolo časovej osi). Ak náš signál nemá jednosmernú zložku, resp. táto je zanedbateľná, výstižnejšie je (1.3) použiť v tvare pre jednostranné frekvenčné spektrá (t. j. integrovať od nuly a použiť dvojnásobnú energiu $F(\omega)$).



Obr. 1.1. Príklad reprezentácie funkcie oknom v časovo-frekvenčnej rovine pre funkciu $f(t) = e^{-(t-4)^2} cos(6(t-4))$ (modulovaná ***Gaussova funkcia***)

Treba si uvedomiť, že rozmery okna sú pomocou vzťahov (1.2), (1.3) definované štatisticky (2. moment) na základe koncentrácie energie signálu v časovej a frekvenčnej oblasti. Pozor, neznamená to, že mimo okna má signál nulové hodnoty. Taká reprezentácia by bola v princípe neuskutočniteľná, lebo *spojité signály ohraničené v čase nie sú ohraničené vo frekvencii a naopak*.

Aby sme boli schopní v transformačnej oblasti reprezentovať ľubovoľný signál, musia bázové funkcie pokrývať celú TF rovinu, t. j. rovinu si svojimi TF oknami musia medzi seba rozdeliť[6].

Najznámejšie delenia TF roviny sú zobrazené na obr. 1.2. V časti a) napríklad vidíme: To, že bázové funkcie STFT sú generované *moduláciou* a *posunom* oknovej funkcie znamená, že STFT má pre danú oknovú funkciu pevné rozlíšenie vo frekvencii a rôzne τ, ω v rovnici (1.1) vlastne zodpovedajú iba posunom základného časovo-frekvenčného okna v čase a frekvencii.

Pri transformácii nejakého signálu resp. pri analýze pomocou transformácie sa nám *do jednotlivých spektrálnych koeficientov uloží informácia iba do tej miery, do akej sa prekrývajú v časovo-frekvenčnej rovine jednotlivé expanzné funkcie s analyzovaným signálom*. Celá situácia je znázornená na obr. 1.3, kde sme ako transformáciu použili STFT.

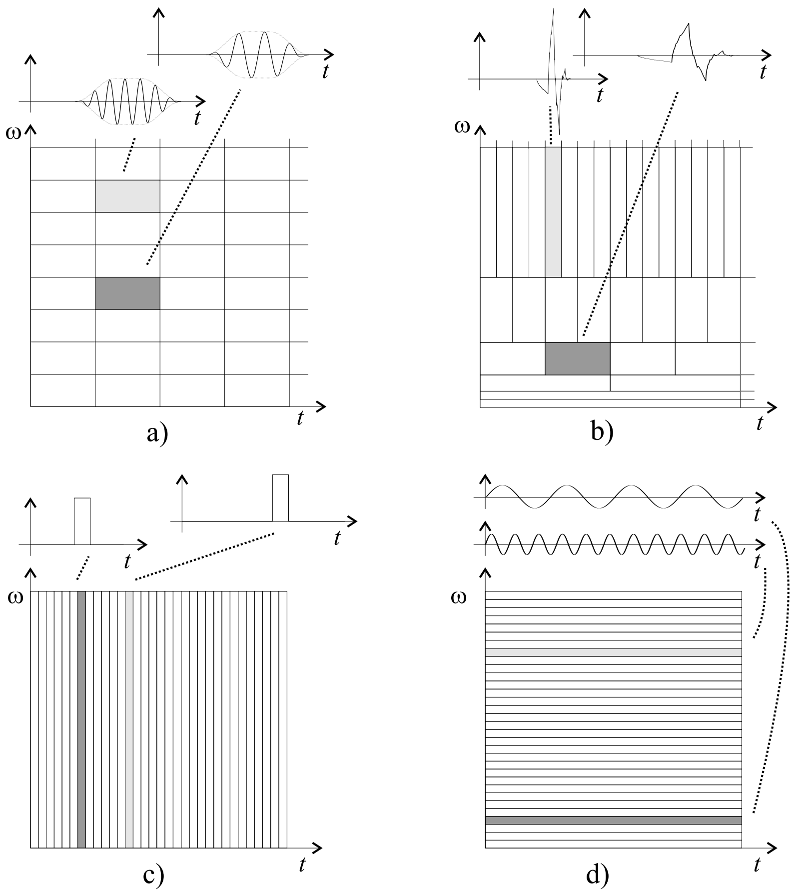
TF okno nám vlastne hovorí, aké drobné detaily sme schopní v signáli sledovať. Čím menšia plocha okna, tým lepšie.

Pri časovo-frekvenčej analýze signálov sa výsledky zvyknú znázorňovať vo forme tzv. ***spektrogramu*** (SPG) [31], [30], čo je vlastne pohľad na TF rovinu, resp. jej časť, kde sú zobrazené magnitúdy spektrálnych koeficientov v strede TF okien zodpovedajúcich bázových[7] funkcií.

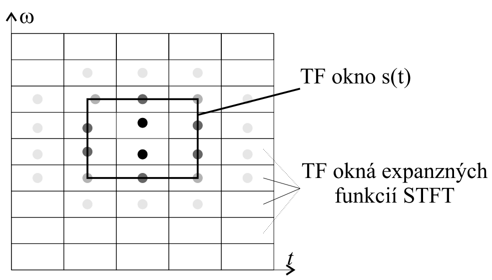
Príklady spektrogramov sú uvedené na obr. 1.4. Ide o diskrétnu aproximáciu spoji-

[6]TF okná sa pri delení TF roviny nemusia nevyhnutne dotýkať, môžu sa prekrývať, resp. nedoliehať, záleží na konkrétnom tvare bázových funkcií.

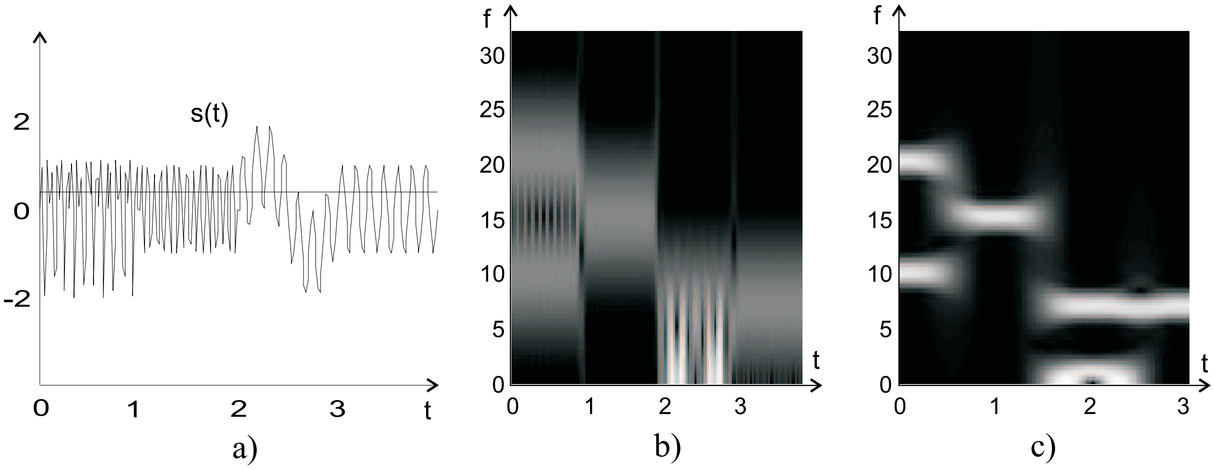
[7]Zvyčajne ide o bázu, avšak môže ísť aj o nadbytočnú, prípadne neúplnú množinu funkcií.



Obr. 1.2. Najznámejšie príklady delenia TF roviny pri reprezentácii signálov (znázornené schématicky): **a)** pri STFT — bázu tvoria modulované oknové funkcie **b)** bázové funkcie sú generované zmenou mierky a posunom prototypovej funkcie (neskôr uvidíme, že ide o *dyadické waveletové rady*) **c)** časová oblasť — bázu tvoria Diracove delta funkcie **d)** pri FT — bázu tvoria nekonečne dlhé komplexné harmonické funkcie



Obr. 1.3. TF rovina — schématické znázornenie signálu $s(t)$ a jeho spektra pri STFT. Signál ovplyvňuje najviac tie spektrálne koeficienty, ktorým zodpovedajúce expanzné funkcie sa svojimi TF oknami s TF oknom signálu najviac prekrývajú. Miera ovplyvnenia spektrálnych koeficientov je znázornená krúžkom (čierny = max. ovplyvnenie) v strede TF okien zodpovedajúcich expanzných funkcií. Ovplyvnené sú aj spektrálne koeficienty, pre ktoré platí, že im prináležiace okná sa priamo s oknom signálu neprekrývajú.



Obr. 1.4. Spektrogramy syntetického signálu $s(t)$: **a)** signál $s(t)$ zložený zo 4 častí: I) $2sin(5t)sin(15t)$ II) $sin(15t)$ III) $sin(t) + sin(7t)$ IV) $sin(7t)$ **b)** Spektrogram — diskrétna aproximácia, $f_{vz} = 64Hz$, diskrétna STFT s Hanningovými oknami s veľkosťou 12 a prekryvmi 10 **c)** ako b) avšak veľkosť okna je 60 a prekryv 58

tého prípadu. Frekvenčný rozsah je potom obmedzený do $f_{vz}/2$. Všimnite si schopnosť lokalizovať zmeny charakteru signálu v čase a schopnosť lokalizácie vo frekvencii v závislosti od veľkosti okna STFT.

Na relevantné znázornenie signálu v TF rovine vo forme spektrogramu sa používajú predovšetkým STFT, Wigner-Villove rozdelenie [21, str. 80] a jeho modifikácie a waveletová transformácia.

1.2.1 Princíp neurčitosti

Pre reprezentáciu signálov v časovo-frekvenčnej rovine platí tzv. *princíp neurčitosti* (niečo ako princíp neurčitosti z kvantovej fyziky). Nech pre $x(t) \in L^2(\mathcal{R})$ platí

$$t.x(t), X(\omega), \omega.X(\omega) \in L^2(\mathcal{R})\,. \tag{1.4}$$

Potom pre TF okno $x(t)$ platí [19, str. 56]:

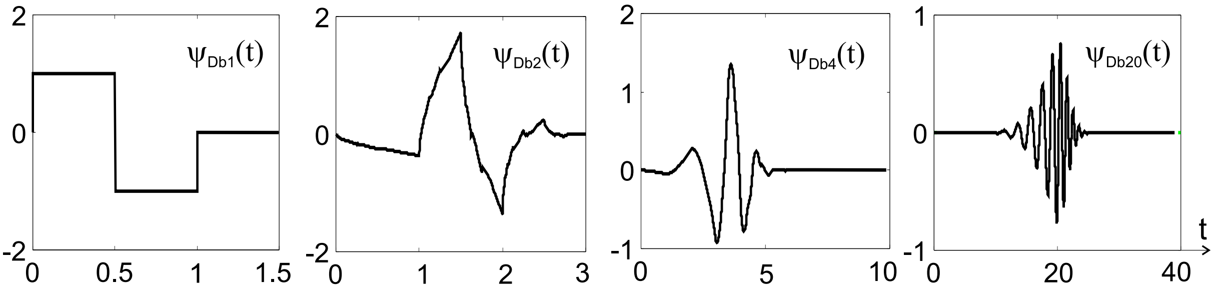
$$\sigma_t^2 \cdot \sigma_\omega^2 \geq 1/4\,, \tag{1.5}$$

pričom rovnosť platí, ak $x(t)$ je ***Gaussova funkcia***[8] v tvare

$$x\,(t) = \sqrt{\alpha/\pi}\,e^{-\alpha t^2} \qquad \alpha \in \mathcal{R},\, \alpha > 0\,. \tag{1.6}$$

Prakticky nám to hovorí, že signály sa nedajú s ľubovoľnou presnosťou lokalizovať naraz vo frekvencii aj v čase, t. j. získať ľubovoľne malú plochu TF okna. Plocha TF okna je vždy minimálne 2, pričom minimálnu plochu zaberajú signály, pre ktoré platí (1.6). Dôkaz princípu neurčitosti je uvedený napr. v [19, str. 58], [22, str. 68].

[8] Rovnosť zostáva zachovaná aj pri modulácii funkcie $x(t)$ a ako neskôr uvidíme aj pri zmene mierky funkcie, pozri vzťah (1.9).



Obr. 1.5. Príklady základných waveletov $\psi(t)$: Daubechieovej (Db) wavelety rádu 1, 2, 4, 20

1.3 Waveletová transformácia

Už z názvu *waveletová transformácia (WT)* sa dá tušiť pomocou akých funkcií budeme signály rozkladať a skladať (angl. „wavelet“ = vlnka). Ide o ***wavelety***, ktoré vlastne predstavujú časovo lokalizované vlny[9], t. j. vlnové balíky. ***Waveletová transformácia (WT)*** má všetky funkcie vytvorené z jednej prototypovej funkcie tzv. ***základného waveletu*** $\psi(t)$ pomocou 2 základných operácií[10]: a) *zmena mierky* b) *posun v čase*.

Ako môžu vyzerať základné wavelety je znázornené na obr. 1.5. Všimnite si, ako sa zo zvyšovaním ***rádu***[11] wavelety čoraz viac podobajú na vlnový balík.

Waveletových transformácií existuje viacero základných druhov. V ďalšom texte začneme spojitou WT a postupne prejdeme k diskrétnej WT.

1.3.1 Spojitá waveletová transformácia (SWT)

Spojitá waveletová transformácia (SWT) funkcie $f(t) \in L^2(\mathcal{R})$ je definovaná [17] ako zobrazenie $L^2(\mathcal{R}) \to L^2(\mathcal{R}^2)$ vzťahom:

$$SWT_f(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi^*_{[a,b]}(t)\,dt = \left\langle f(t), \psi_{[a,b]}(t)\right\rangle \quad a \in \mathcal{R}^+, b \in \mathcal{R}\,. \tag{1.7}$$

Expanzné funkcie $\psi_{[a,b]}(t)$ sú definované zo základného waveletu $\psi(t)$ pomocou parametrov *zmeny mierky* a *posunu* a, b takto:

$$\psi_{[a,b]}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad \psi(t) \in L^2(\mathcal{R})\,. \tag{1.8}$$

Vidíme, že reprezentácia signálu pomocou spektrálnych koeficientov SWT je značne nadbytočná — parametre a aj b sú spojité. V závislosti od parametra a SWT poskytuje pružné časovo-frekvenčné rozlíšenie. Ak *časovo-frekvenčné okno* $\psi(t)$ má rozmery σ_t, σ_ϖ a stred v bode $S_{t\omega} = (t_0, \omega_0)$, potom pri wavelete $\psi_{[a,b]}(t)$ nastanú zmeny

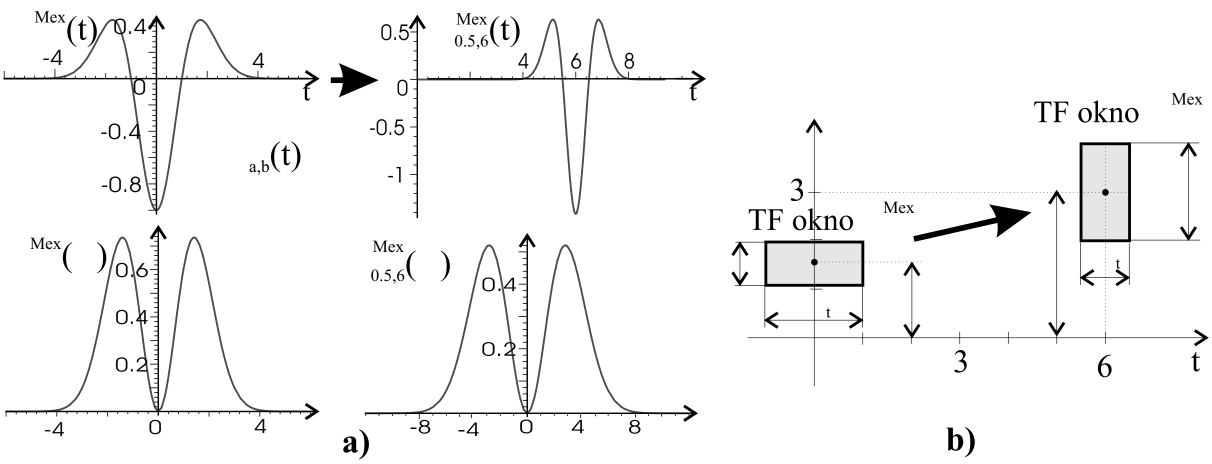
$$\sigma_t \Rightarrow a\sigma_t \qquad \sigma_\omega \Rightarrow \sigma_\omega / a \qquad (t_0, \omega_0) \Rightarrow (at_0 + b, \omega_0/a)\ . \tag{1.9}$$

Vidíme, že zmeny rozmerov okna sú funkciou parametra a, ktorým je daná ***úroveň rozlíšenia*** v čase aj frekvencii. Ak $a > 1$, wavelet v čase roztiahneme, čím znižujeme

[9]Porovnaj z CTFT, kde signál rozkladáme pomocou nekonečne dlho trvajúcich vĺn bez časovej lokalizácie.

[10]Porovnaj z STFT, kde funkcie tvoríme pomocou modulácie a posunu oknovej funkcie.

[11]Pod rádom waveletu rozumieme počet ***nulových momentov*** waveletu (pozri časť 1.3.2, str. 15)



Obr. 1.6. Zmena mierky a posun v čase. Wavelet „Mexický klobúk" (obrátená verzia) $\psi^{Mex} = (t^2 - 1)e^{-t^2/2}$ a jeho verzia pri zmene mierky $a = 1/2$ a posune $b = 6$ **a)** situácia v čase a frekvencii **b)** posun a zmena veľkostí strán okna waveletu v TF rovine ($\sigma_t \doteq 1.08$, $\sigma_\omega \doteq 0.486$)

schopnosť rozlišovať signály v čase, získavame však lepšie rozlíšenie vo frekvencii. Pre $a < 1$ je všetko presne naopak. Rôzne hodnoty b zase vytvárajú všetky možné posuny waveletu pri danej úrovni rozlíšenia. Zo vzťahu (1.9) je zrejmá dôležitá vlastnosť waveletov, že obsah TF okna zostáva konštantne $4\sigma_t\sigma_\omega$, nezávisle od parametrov a a b. Vďaka zmenám rozmerov okna je však SWT oproti STFT[12] efektívnejšia pri detekovaní signálov s vysokými frekvenciami a analýze signálov s nízkymi frekvenciami (pri STFT sa rozmery okna nemenia). Zo vzťahov (1.9) vyplýva aj ďalšia dôležitá vlastnosť a to, že pomer výšky okna a polohy stredu okna vo frekvencii ostáva stále konštantný. Označme ho Q_ψ. Platí $Q_\psi = 2\sigma_\omega/\omega_0$. Analogicky s teóriou rezonančných obvodov sa Q_ψ označuje ako ***kvalita*** waveletu. Situácia pri zmene mierky a posune základného waveletu je ilustrovaná na obr. 1.6.

Základné wavelety majú zvyčajne jednotkovú energiu, t. j. $\|\psi(t)\| = 1$. Faktor $1/\sqrt{a}$ vo vzťahu (1.8) zabezpečuje zachovanie energie aj pri zmenenej mierke, t. j. $\|\psi_{[a,b]}(t)\| = \|\psi(t)\|$. SWT je *invertovateľná*, ak pre Fourierovu transformáciu $\Psi(\omega)$ základného waveletu platí tzv. ***podmienka prípustnosti*** [21]:

$$C_\psi = \int_0^\infty \left|\frac{\Psi(\omega)}{\omega}\right|^2 d\omega < \infty\,. \tag{1.10}$$

Wavelet je potom ***prípustný***, čo prakticky znamená [2], [21]:

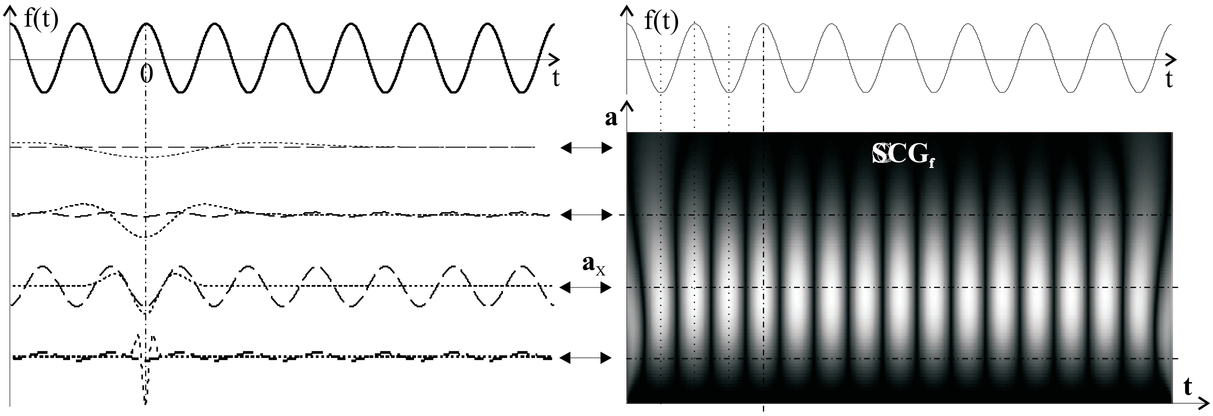
$$\Psi(\omega)|_{\omega=0} = 0 \qquad\qquad \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\,dt = 0\,, \tag{1.11}$$

t. j. $\psi(t)$ *nemá jednosmernú zložku*[13]. Potom existuje inverzná SWT v tvare:

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} SWT_f(a,b)\cdot\psi_{[a,b]}(t)\,\frac{da db}{a^2}\,. \tag{1.12}$$

[12]Nezabúdajme, že pri STFT je veľkosť okna zvolená na začiatku a všetky frekvencie budú analyzované s tým istým rozlíšením v čase aj frekvencii.

[13]Toto je principiálny rozdiel oproti STFT. TF okná waveletov spĺňajúcich podmienku (1.11) sa môžu iba blížiť k nulovej frekvencii, nikdy ju však neprekryjú. Niektoré wavelety napr. Morletov, spĺňajú podmienku prípustnosti iba približne, avšak nepresnosť je zanedbateľná (pri Morleteovom wavelete rádovo 10^{-7}).



Obr. 1.7. Škálogram funkcie $f(t) = cos(t)$ pri použití waveletu „Mexický klobúk“ z obr. 1.6. V ľavej časti sú zobrazené príklady waveletov (čiarkovane) a rezy spektrom SWT (bodkovane) na zodpovedajúcich úrovniach rozlíšenia. Pozn.: škálogram je na krajoch deformovaný kvôli ohraničeniu signálu pri výpočte SWT programom Matlab

SWT umožňuje zaujímavé zovšeobecnenie a to použiť pri rozklade a rekonštrukcii signálu rôzne základné wavelety $\psi_1(t)$ a $\psi_2(t)$. Tieto musia spĺňať podmienku [21]:

$$C_{\psi_1,\psi_2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi_1(\omega)|\,|\Psi_2(\omega)|}{|\omega|} d\omega < \infty \,. \tag{1.13}$$

Potom môžeme každú $f(t) \in L^2(\mathcal{R})$ vyjadriť ako:

$$f(t) = \frac{1}{C_{\psi_1,\psi_2}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left\langle f, \psi_{1_{[a,b]}} \right\rangle \psi_{2_{[a,b]}} \frac{dadb}{a^2} \,. \tag{1.14}$$

Spektrum SWT sa znázorňuje vo forme tzv. ***škálogramu*** (SCG) [32], [30], čo je vlastne istá forma zobrazenia časovo-frekvenčnej roviny s vynesenými magnitúdami spektrálnych koeficientov. Frekvenčná os je však nahradená parametrom zmeny mierky a, takže ide o zobrazenie v tzv. ***TS (z angl. Time-scale) rovine***.[14] V dôsledku posunu TF okien waveletov v závislosti od parametra a (pozri obr. 1.6, vzťah (1.9)) je škálogram a TS rovina oproti spektrogramu a TF rovine „hore nohami“. Ak premapujeme súradnice (t, a) na (t, ω), stredy TS okien by sa nám zobrazili do stredov TF okien príslušných waveletov.[15]. Príklad škálogramu reálneho signálu je na obr. 1.7. Maximálne fluktuácie hodnôt škálogram vykazuje pri takej hodnote parametra a, pri ktorej sa stredná frekvencia $f(t)$ zhoduje so strednou frekvenciou waveletov $\psi_{[a,b]}$.

Príklad 1.1 *Ak funkcia $f(t)$ má nenulové hodnoty na intervale (t_0, t_1), kde bude nenulová $f[(t-b)/a]$?*

Riešenie: *Hľadáme taký interval (t_0^*, t_1^*), ktorý sa daným predpisom zobrazí na (t_0, t_1), t. j.: $t_0 = (t_0^* - b)/a$ a $t_1 = (t_1^* - b)/a$ z toho $t_0^* = at_0 + b$, $t_1^* = at_1 + b$. Riešením je teda interval $(at_0 + b,\ at_1 + b)$.*

Úloha 1.1 *Vyjadrite približú numerickú hodnotu a_x pri reze TS rovinou na obr. 1.7. Pri riešení využite obr. 1.6.*

[14]V TS rovine môžeme samozrejme definovať analógiu TF okna — TS okno.

[15]Prepočet súradníc (t, a) na (t, ω) je triviálny, treba si uvedomiť, že súradnici $a = 1$ zodpovedá $\omega = \omega_0$. t. j. stredná frekvencia základného waveletu. Následne stačí použiť (vzťah 1.9) na posun vo frekvencii.

1.3.2 Vlastnosti SWT a prípustných waveletov

SWT má viacero užitočných vlastností, pričom niektoré z nich sú analogické vlastnostiam FT (napr. zachovanie energie), iné sú pre SWT špecifické (napr. detekcia singularít). Podrobný popis je uvedený napr. v [21]. Niektoré základné vlastnosti sú:

- linearita — vyplýva priamo z linearity skalárneho súčinu pri definícii SWT vzťahom (1.7)
- posun v čase

$$g\left(t\right)=f\left(t-b_{0}\right)\Rightarrow SWT_{g}\left(a,b\right)=SWT_{f}\left(a,b-b_{0}\right) \tag{1.15}$$

- zmena mierky

$$g\left(t\right)=\frac{1}{\sqrt{s}}f\left(\frac{t}{s}\right)\Rightarrow SWT_{g}\left(a,b\right)=SWT_{f}\left(\frac{a}{s},\frac{b}{s}\right) \tag{1.16}$$

- zachovanie energie — pre $f(t)\in L^{2}(\mathcal{R})$ a jeho $SWT_{f}(a,b)$ platí

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(t\right)\right|^{2}dt=\frac{1}{C_{\psi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|SWT_{f}\left(a,b\right)\right|^{2}\frac{dadb}{a^{2}} \tag{1.17}$$

- detekcia singularít — označme Diracov impulz v čase t_0 ako $\delta(t-t_0)$. Jeho SWT je:

$$SWT_{\delta}\left(a,b\right)=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\delta\left(t-t_{0}\right)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt=\frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t_{0}-b}{a}\right). \tag{1.18}$$

Okrem nutných podmienok, aby signály boli považované za ***prípustné základné wavelety*** pre SWT, sú tu ešte viaceré dôležité vlastnosti waveletov, ktoré podstatne ovplyvňujú ich použiteľnosť. Medzi najdôležitejšie patria:

- Existencia ***nosiča*** . Uzavretý interval $\langle a,b\rangle$ nazývame ***kompaktný nosič*** funkcie (waveletu), ak daný wavelet má nenulové funkčné hodnoty len na danom intervale. Pre wavelety bez kompaktného nosiča sa zvykne uvádzať funkcia zhora ohraničujúca funkčné hodnoty (t. j. charakterizujúca rýchlosť ich klesania). Prípadne sa uvádza tzv. ***efektívny nosič*** $\langle a,b\rangle$, mimo ktorého má funkcia iba zanedbateľne malé funkčné hodnoty.[16]

- ***Počet nulových momentov***. K-ty moment $\psi(t)$ definujeme ako $m\left(k\right)=\int t^{k}\psi\left(t\right)dt$. Platí, že ak $\psi(t)$ je K krát *diferencovateľná* a pre $t\to\pm\infty$ klesá dostatočne rýchlo, potom prvých $K-1$ momentov bude nulových. Potom ak $f(t)$ je na nejakom intervale polynómom max. $K-1$ stupňa, pre wavelety $\psi_{[a,b]}\left(t\right)$ s nosičom na tomto intervale budú príslušné waveletové koeficienty $SWT_{f}\left(a,b\right)$ nulové.[17]

- ***Regularita*** (Daubechieová 1988) poskytuje mieru hladkosti funkcie $f(t)$. Ak definujeme regularitu vo frekvenčnej oblasti [17], potom je to také maximálne číslo r, pre ktoré existuje také konečné $c\in\mathcal{R}^{+}$, že platí:

$$\left|F\left(\omega\right)\right|\leq c/\left(1+\left|\omega\right|^{r+1}\right). \tag{1.19}$$

  Potom $f(t)$ je $r-1$ krát spojite *diferencovateľná*, pričom r-tá derivácia môže byť nespojitá.

[16] Napr. wavelet „Mexický klobúk“ má iba efektívny nosič.

[17] Kde teda bude informácia po SWT takého polynomického signálu vlastne uložená? Predsa v koeficientoch, ktorým zodpovedajúce wavelety (aj zčasti) presahujú daný interval.

wavelet	Počet nulových momentov	Regularita	Nosič	
			$\psi(t)$	$\Psi(\omega)$
$\psi_{Haar}(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1/2 \\ -1 & 1/2 \leq t < 1 \\ 0 & inde \end{cases}$	1	0	$< 0, 1 >$	$\approx 1/\omega$
$\psi_{Sinc}(t) = 2\varphi_{Sinc}(2t) - \varphi_{Sinc}(t)$ $\varphi_{Sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$	∞	∞	$\approx 1/t$	$< \pi, 2\pi >$
$\psi_{DbK}(t) =$ pozri časť 2.4.2	K	$\alpha(K)$	$< 0, 2K-1 >$	$\approx 1/\omega^{\alpha(K)}$

Tabuľka 1.1. Porovnanie základných vlastnosti vybraných waveletov

Uvedené vlastnosti sa dajú ukázať napr. na triviálnych príkladoch waveletov (Haarovho, Sinc waveletu) a systému Daubechieovej waveletov. Ich základné charakteristiky sú uvedené v tabuľke 1.1 a priebehy znázornené na obr. 1.8, resp. obr. 1.5. Haarov wavelet má výborný kompaktný nosič v čase, avšak regularita je nulová, t. j. $\psi_{Haar}(t)$ je nespojitý. Problém s regularitou je jasne vidieť aj vo frekvencii, použitím (1.19) je zrejmé, že $r_{\psi_{Haar}} = 0$. *Sinc* wavelet[18] je presne opačným extrémom, kvôli svojmu príliš veľkému nosiču sa však takmer nepoužíva[19]. Systém Daubechieovej waveletov predstavuje jeden z možných prechodov medzi uvedenými dvoma typmi extrémov. Začínajúc s Haarovým waveletom, môžeme ľubovoľne zvyšovať rád waveletu a tým aj zväčšovať nosič[20]. Na Daubechieovej waveletoch (pozri obr. 1.5) sa dá názorne ukázať rast regularity[21]: nespojitý priebeh pri Db1, výrazne *fraktálový* priebeh pri Db2 . . . , postupné zaobľovanie nerovností a tvorba čoraz väčších vlnových balíkov pri vyšších rádoch.

V predchádzajúcom texte sme sa venovali vlastnostiam základných waveletov. Je dôležité uvedomiť si, že uvedené vlastnosti sa „dedia“, t. j. analogicky platia aj pre $\psi_{[a,b]}(t)$, teda pre wavelety z nich vytvorené posunom a zmenou mierky.

1.4 Waveletové rámce a rady

Keďže reprezentácia signálu spektrom SWT je vysoko nadbytočná (oba parametre a, b sú spojité), vynára sa otázka aká množina zo spektrálnych koeficientov stačí na rekonštrukciu signálu. Odpoveďou je, že stačí vhodne zvolená diskrétna množina koeficientov, t. j. parametre a a b vzorkujeme. Potom hovoríme o ***waveletových rámcoch (WF — Wavelet Frames)***, ktoré stále môžu byť nadbytočné. Ak nadbytočnosť odstránime, hovoríme o ***waveletových radoch (WR)***.

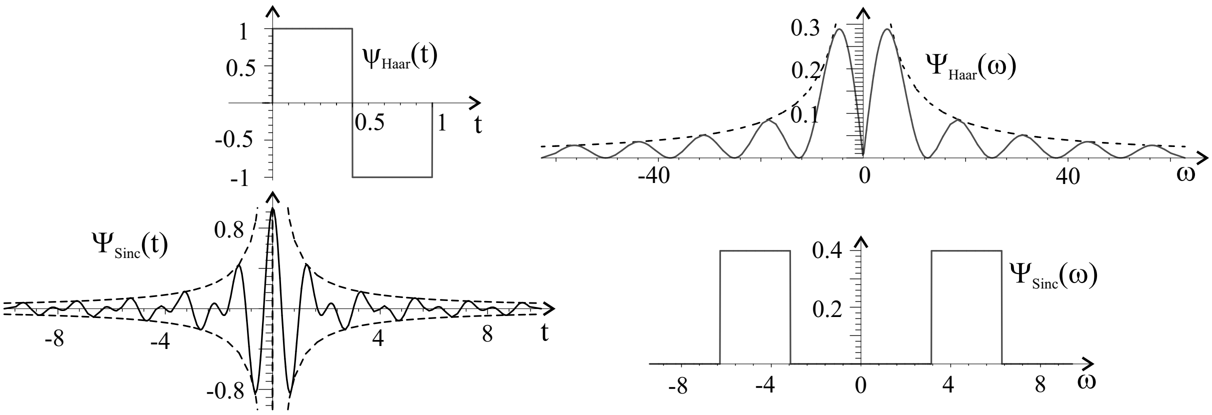
Štandardná voľba vzorkovania parametra a je $a = a_0^m$ s $m \in \mathcal{Z}$ a $a_0 \neq 1$ [21]. T. j. úroveň rozlíšenia (doteraz charakterizovaná spojitým parametrom a) je odteraz charakterizovaná disktrétnym parametrom m. Parameter b potrebujeme vzorkovať tak, aby wavelety rovnako efektívne pokrývali celú časovú os pri každej úrovni rozlíšenia.

[18] Všimnite si ako je *Sinc* wavelet bez jednosmernej zložky, vytvorený zo *Sinc* funkcie mierky (známa si funkcia), ktorá jednosmernú zložku má.

[19] Paradoxne, extrém tohoto typu už používame dlho — Fourierova Transformácia. Pritom však nesmieme zabudnúť na jeden dôležitý fakt a síce, že wavelety sú definované v $L^2(\mathcal{R})$ a FT nie.

[20] Kvôli numerickým nestabilitám pri výpočte waveletov vysokých rádov je táto možnosť viacmenej teoretická.

[21] Hodnoty regularity pre Daubechieovej wavelety DbK sú [18] napr.: $r_{\psi_{Db1}} = 0$, $r_{\psi_{Db2}} = 5$, $r_{\psi_{Db3}} \doteq 0.91$, $r_{\psi_{Db4}} \doteq 1.27, \ldots$, pre veľké K $r_{\psi_{DbN}} \doteq 0.415K$.



Obr. 1.8. Časové a frekvenčné priebehy triviálneho Haarovho a Sinc waveletu. V oblasti, kde nemajú kompaktný nosič je znázornené ohraničenie funkčných hodnôt funkciami z tabuľky 1.1

Použitím vzťahu 1.9 dostaneme výslednú vzorkovaciu mriežku v tvare:

$$a = a_0^m, \quad b = nb_0a_0^m, \qquad m, n \in \mathcal{Z} \quad a_0 > 1, b_0 > 0\,. \tag{1.20}$$

Pre $\psi(t)$ potom dostávame diskrétnu množinu funkcií:

$$\psi_{m,n}(t) = a_0^{-\frac{m}{2}} \psi\left(a_0^{-m} t - nb_0\right)\,. \tag{1.21}$$

Dôležitá otázka je, či pre dané a_0, b_0 a $\{\psi_{m,n}\}$ existuje taká množina $\{\tilde{\psi}_{m,n}\}$, že $\forall f(t) \in L^2(\mathcal{R})$ platí:

$$f(t) = \sum_m \sum_n d_{m,n} \tilde{\psi}_{m,n}(t)\;, \tag{1.22}$$

kde

$$d_{m,n} = \langle f(t), \psi_{m,n}(t) \rangle \quad m, n \in \mathcal{Z}\,. \tag{1.23}$$

Rekonštrukcia funkcie $f(t)$ z koeficientov $d_{m,n}$ (nazývaných ***waveletové koeficienty***) pomocou vzťahu (1.22) je možná a numericky stabilná, ak množina $\{\psi_{m,n}\}$ tvorí rámec v $L^2(\mathcal{R})$, t. j. $\forall f(t) \in L^2(\mathcal{R})$ platí:

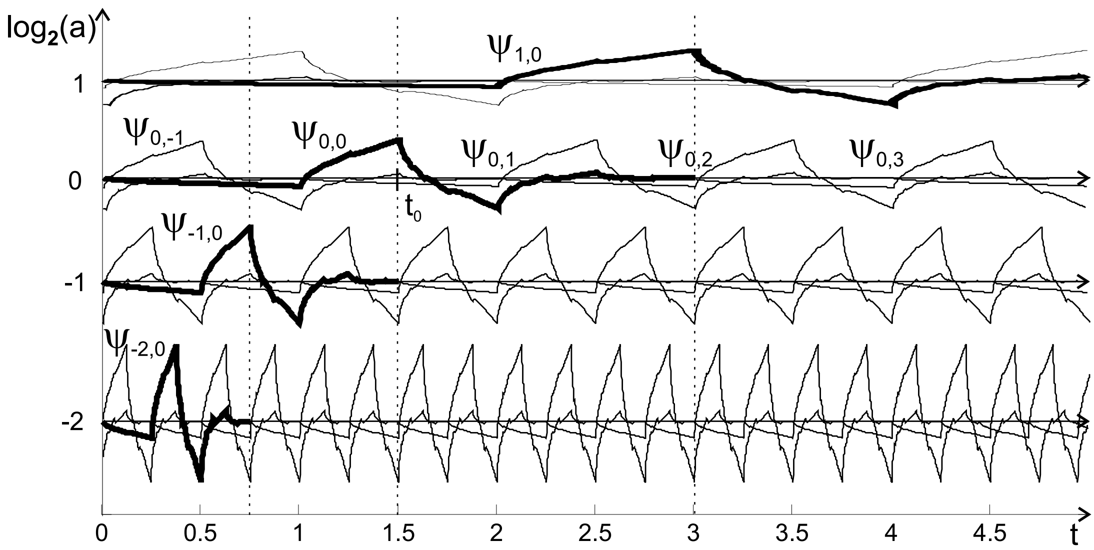
$$\exists\, A > 0,\, B > 0: \qquad A\,\|f\|^2 \le \sum_{m,n} |\langle f, \psi_{m,n} \rangle|^2 \le B\,\|f\|^2\,. \tag{1.24}$$

Vzťahy (1.22), (1.23) nám teda vyjadrujú rozklad a rekonštrukciu signálu vo *waveletových rámcoch*. Keďže reprezentácia vo WF stále môže byť nadbytočná (t. j. expanzné funkcie môžu byť lineárne závislé), k danému *rámcu* môže existovať viacero rámcov $\{\tilde{\psi}_{m,n}\}$, pomocou ktorých sme schopní signál zrekonštruovať. Medzi nimi má špeciálne postavenie tzv. ***duálny rámec***[22], ktorý je jednoznačne určený a platí preň:

$$B^{-1}\,\|f\|^2 \le \sum_{m,n} \left|\left\langle f, \tilde{\psi}_{m,n} \right\rangle\right|^2 \le A^{-1}\,\|f\|^2\,. \tag{1.25}$$

Ak $A = B$, rámec sa nazýva ***tesný*** [23] a naviac, ak $\|\psi_{m,n}\| = 1$, potom A udáva mieru nadbytočnosti rámca (napr. ak $A = 3$, stačí na rekonštrukciu $1/3$ spektrálnych

[22]Vzorce na výpočet funkcií duálneho rámca k danému rámcu sú uvedené napr. v [21, str. 321 – 322].



Obr. 1.9. Zobrazenie časti bázových funkcií $\psi_{m,n}$ dyadického WR (použitý wavelet Db2 s kompaktným nosičom na $\langle 0, 3\rangle$) v TS rovine

koeficientov). Ak $A = B = 1$ pri $\|\psi_{m,n}\| = 1$, potom rámec $\{\psi_{m,n}\}$ tvorí *ortonormálnu bázu* v $L^2(\mathcal{R})$ a funkcia $\psi \in L^2(\mathcal{R})$ sa nazýva ***ortogonálny (resp. ortonormálny) wavelet***.

Ak sme nadbytočnosť WF vhodným vzorkovaním úplne odstránili, t. j. $\{\psi_{m,n}\}$ netvorí *rámec* ale *bázu* v $L^2(\mathcal{R})$, hovoríme o ***waveletových radoch (WR)***. Rozklad signálu a jeho spätná rekonštrukcia pri WR ostáva definovaná vzťahmi (1.22), (1.23) (ku každému WR existuje duálny rad, ktorý rekonštrukciu umožňuje). Platí:

$$WR_f(m, n) = d_{m,n} \,. \tag{1.26}$$

Najbežnejšie sa nadbytočnosť reprezentácie SWT odstraňuje ***dyadickým vzorkovaním***, t. j. voľbou $a_0 = 2$, $b_0 = 1$ vo vzorkovacej mriežke definovanej vzťahom (1.20) [21]. Dosadením dostávame:

$$a = 2^m, \quad b = n2^m, \qquad m, n \in \mathcal{Z} \,. \tag{1.27}$$

Pre posuny a zmeny mierky základného waveletu platí:

$$\psi_{m,n}(t) = 2^{-\frac{m}{2}} \psi\left(2^{-m}t - n\right) \,. \tag{1.28}$$

Funkcie $\psi_{m,n}(t)$ potom nazývame ***dyadické wavelety*** a vzťahmi (1.22), (1.23) sú definované ***dyadické waveletové rady*** (pre $a_0 = 3$ by sme dostali tzv. ***triadické wavelety***, t. j. pre $a_0 = M$ dostaneme ***M-adické wavelety***. Zobrazenie dyadickej vzorkovacej mriežky v TS rovine je na obr. 1.2. Iné ako dyadické wavelety sa v praxi používajú málo, takže v ďalšom texte (ak na to explicitne neupozorníme) budeme pod pojmom wavelet, waveletové rady . . . myslieť dyadický wavelet, dyadické waveletové rady. . . .

Spôsob delenia časovo-frekvenčnej roviny bázovými funkciami v dyadických waveletových radoch bol v TF rovine schématicky znázornený na obr. 1.2b. Situáciu v TS rovine si môžeme viac priblížiť na príklade Daubechieovej waveletov rádu 2. Funkcie $\psi_{m,n}(t)$ a ich umiestnenie v TS rovine môžeme znázorniť ako na obr. 1.9. Ak koeficientmi $d_{m,n}$ „vyfarbíme“ v TS rovine neprekrývajúce sa TS okná príslušných $\psi_{m,n}(t)$, dostávame tzv. ***diskrétny škálogram*** (pozri obr. 1.10d). Na príklade syntetického signálu si ukážme (pozri obr. 1.10), ako vyzerá vyjadrenie jeho časovo-frekvenčných vlastností vo forme spektrogramu, škálogramu a diskrétneho škálogramu. Signál obsahuje jeden výrazný bod nespojitosti a 2 harmonické časti. Všimnite si lepšiu lokalizáciu bodu nespojitosti a lokalizáciu energie signálu pri SWT a WR. Pozn.: Pri všetkých výpočtoch bol vstupný signál vzorkovaný na 512 vzoriek, t. j. výsledky predstavujú diskrétne aproximácie.

Príklad 1.2 *Označme jednotkové vektory v rovine v smere x a y ako e_1 a e_2. Definujme vektory $\phi_1 = e_1$, $\phi_2 = -e_1/2 + e_2\sqrt{3}/2$, $\phi_3 = -e_1/2 - e_2\sqrt{3}/2$. Zistite, či množina ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 je tesný rámec v rovine (t. j. v priestore $\mathcal{R}^2$). Ak áno, zistite jeho nadbytočnosť.*

Riešenie: *Celá situácia je zobrazená na obr. 1.11. Evidentne platí $L(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \mathcal{R}^2$. Rozpísaním sumy $\sum\limits_{n=1}^{3} |\langle f, \phi_n\rangle|^2$ zistíme, že $\sum\limits_{n=1}^{3} |\langle f, \phi_n\rangle|^2 = \frac{3}{2}\|f\|^2$. Potom $A = B = \frac{3}{2}$, t. j. rámec je tesný. Zároveň platí $\|\phi_n\|^2 = 1$. Stupeň nadbytočnosti je teda $\frac{3}{2}$ (vektory sú v rámci reprezentované $\frac{3}{2}$ násobným počtom súradníc ako je potrebné). K výsledku sa môžeme dostať aj rýchlejšie. Považujme ϕ_i za stĺpcové vektory. Vytvorme maticu $\mathbf{M} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$. Potom platí:*

$$\mathbf{M}\mathbf{M}^T = \frac{3}{2}\mathbf{I}_2 \,. \tag{1.29}$$

T. j. stupeň nadbytočnosti je $3/2$.

Príklad 1.3 *Ukážte, že naozaj existuje viacero možností ako signál z rámcov zrekonštruovať. Použite rámec z predchádzajúceho príkladu.*

Riešenie: *Na základe výsledku z predchádzajúceho príkladu (stupeň nadbytočnosti je $3/2$ pri $\|\phi_n\|^2 = 1$) môžeme ľubovoľný vektor v z $\mathcal{R}^2$ vyjadriť ako:*

$$v = \frac{2}{3}\sum_{i=0}^{2} \langle\phi_i, v\rangle\phi_i \,. \tag{1.30}$$

T. j. duálny rámec je identický s pôvodným. Avšak nie je jediný, ktorý umožňuje rekonštrukciu. Ak uvážime, že platí $\sum_{i=0}^{2}\phi_i = 0$, potom aj pri voľbe

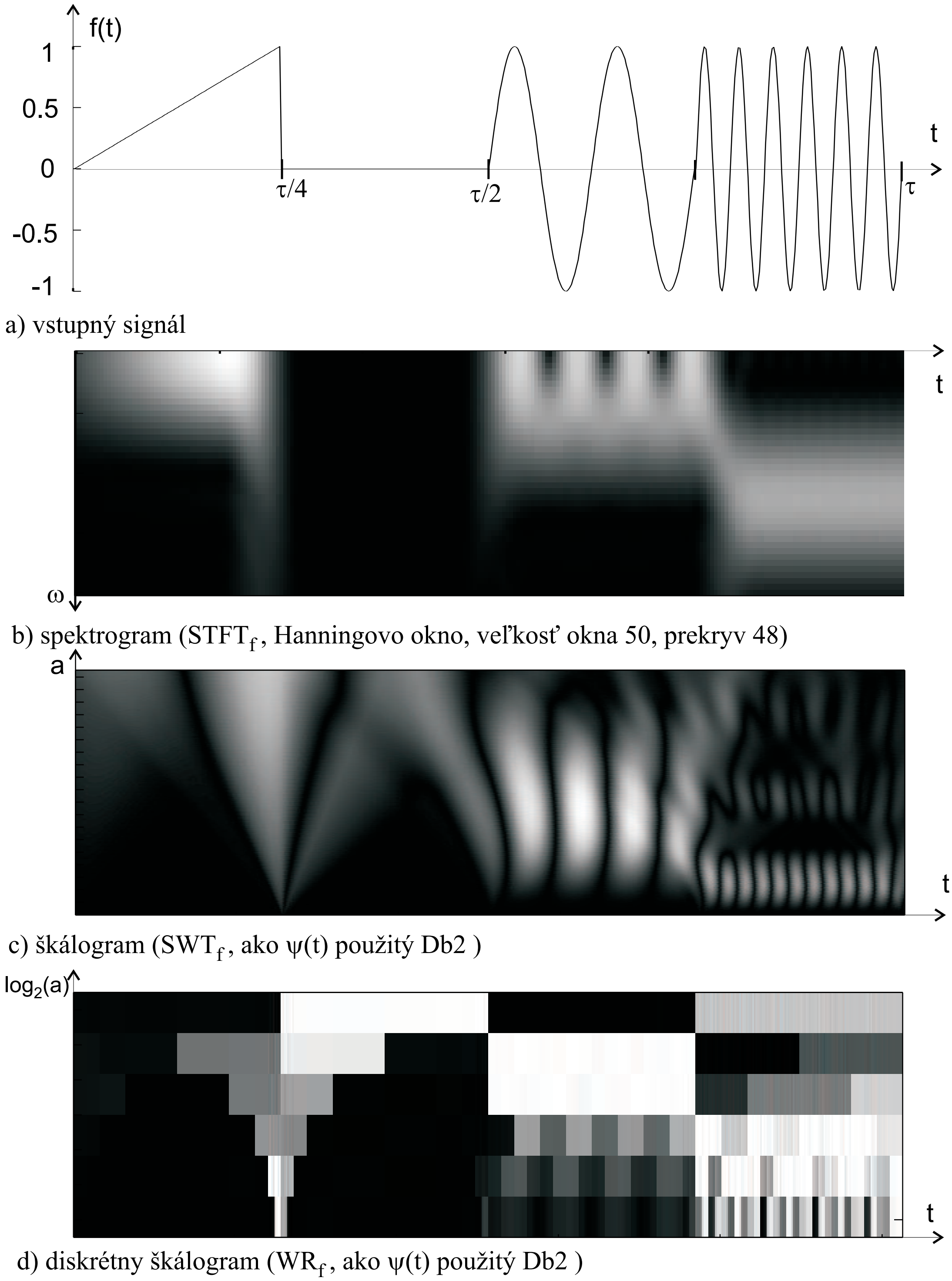
$$\tilde{\phi}_i = \phi_i + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^2 \tag{1.31}$$

stále platí

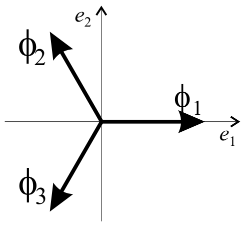
$$v = \frac{2}{3}\sum_{i=0}^{2} \langle\tilde{\phi}_i, v\rangle\phi_i = \frac{2}{3}\sum_{i=0}^{2} \langle\phi_i, v\rangle\phi_i + \frac{2}{3}\left\langle \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, v\right\rangle \overbrace{\sum_{i=0}^{2}\phi_i}^{0} = \frac{2}{3}\sum_{i=0}^{2} \langle\phi_i, v\rangle\phi_i \,. \tag{1.32}$$

Duálny rámec je teda špeciálnym prípadom riešenia (1.31) pri $\alpha = 0$ a $\beta = 0$.

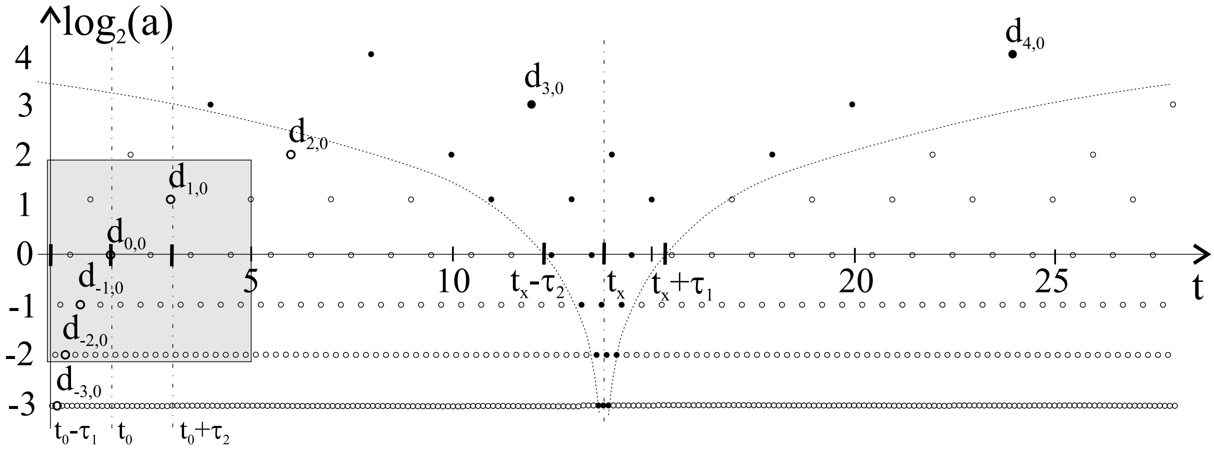
Úloha 1.2 *Ako by mal byť definovaný triadický Haarov wavelet, aby bol ortogonálny?*



Obr. 1.10. Syntetický signál **(a)** na intervale $\langle 0, \tau)$ a jeho časovo-frekvenčné vlastnosti vo forme spektrogramu **(b)** škálogramu **(c)** a diskrétneho škálogramu **(d)**



Obr. 1.11. Príklad rámca v priestore $\mathcal{R}^2$ (rovina)



Obr. 1.12. Príklad zobrazenia koeficientov $d_{m,n}$ v TS rovine. Koeficienty $d_{m,0}$ sú zvýraznené. V strede je znázornená sféra vplyvu signálu v čase t_x na koeficienty $d_{m,n}$ pri $\psi(t)$ s kompaktným nosičom na intervale $\langle t_0 - \tau_1, t_0 + \tau_2 \rangle$. Oblasť TS roviny použitá v obr. 1.9 je sivo zvýraznená.

1.4.1 Vlastnosti waveletových radov

Zhrňme si niektoré základné vlastnosti waveletových radov [23], [21]:

- *Linearita.* Definujme operátor T ako $T\left[f\left(t\right)\right] = \{d_{m,n}\} = \langle f\left(t\right), \psi_{m,n}\left(t\right)\rangle$. Potom $\forall a, b \in \mathcal{R}$ platí:
$$T\left[a\, f\left(t\right) + b\, g\left(t\right)\right] = a\, T\ \left[f\left(t\right)\right] + b\ T\left[g\left(t\right)\right]\ . \tag{1.33}$$

- *Lokalizácia v čase.* Ak $\psi\left(t\right)$ má kompaktný nosič na intervale $\langle t_0 - \tau_1, t_0 + \tau_2\rangle$, potom $\psi_{m,n}$ má kompaktný nosič na intervale $\langle (n + (t_0 - \tau_1))2^m, (n + (t_0 + \tau_2)2^m\rangle$. Pritom platí, pozri obr. 1.12:
  - informácia o signáli $f\left(t\right)$ v čase t_x je vyjadrená iba v koeficientoch $d_{m,n}$, pre ktorých indexy m, n platí: $2^{-m}t_x - (t_0 + \tau_2) \leq n \leq 2^{-m}t_x - (t_0 - \tau_1)$. Ich počet je potom rovný $\Delta_n = \lfloor \tau_1 + \tau_2 \rfloor$, t. j. zostáva konštantný
  - koeficient d_{m_0,n_0} je ovplyvnený iba hodnotami na intervale
  $$t \in \langle (n_0 + (t_0 - \tau_1))\, 2^{m_0}, (n_0 + (t_0 + \tau_2))\, 2^{m_0}\rangle\ ,$$
  t. j. veľkosť intervalu Δ_t s m_0 exponenciálne rastie, t. j. $\Delta_t = (\tau_1 + \tau_2)2^{m_0}$

- *Lokalizácia vo frekvencii.* Označme $F(\omega)$ a $\Psi(\omega)$ Fourierove transformácie $f(t)$ a $\psi(t)$. Nech $\Psi(\omega)$ má kompaktný nosič na intervale $\langle \omega_{\min}, \omega_{\max} \rangle$. Potom $\Psi_{m,n}(\omega)$ má kompaktný nosič na intervale $\langle \omega_{\min}/2^m, \omega_{\max}/2^m \rangle$ a platí:
  - $F(\omega_0)$ ovplyvní iba koeficienty $d_{m,n}$ na úrovniach m, pre ktoré $\log_2(\omega_{\min}/\omega_0) \leq m \leq \log_2(\omega_{\max}/\omega_0)$
  - koeficienty $d_{m_0,n}$ sú ovplyvnené iba frekvenčnými zložkami signálu $F(\omega)$, na intervale $\omega \in \langle \omega_{\min}/2^{m_0}, \omega_{\max}/2^{m_0} \rangle$

- *Posun v čase.* Ak je signál vyjadriteľný waveletovými koeficientmi $d_{m,n}$ iba do istej úrovne M, teda ak platí $f(t) = \sum_{n \in \mathcal{Z}} \sum_{m=-\infty}^{M} d_{m,n} \tilde{\psi}_{m,n}(t)$, potom pre posun signálu platí tzv. slabá vlastnosť posunu v čase:

  $$f\left(t - 2^M k\right) \quad \leftrightarrow \qquad d_{m,n-2^{M-m}k} \,. \tag{1.34}$$

  T. j. na všetkých úrovniach sú waveletové koeficienty iba preindexované. Ak signál posunieme o 2^{M-u}, uvedené pravidlo platí iba do úrovne $M - u$ a koeficienty v posledných u úrovniach treba znovu prepočítať.

- *Zmena mierky.* Pre zmenu mierky signálu $f(t)$ faktorom 2^k platí:

  $$f\left(2^{-k} t\right) \;\leftrightarrow\; 2^{k/2}\, d_{m-k,n} \,. \tag{1.35}$$

  Zmena mierky faktorom, ktorý nie je mocninou 2, sa rieši reinterpoláciou pôvodného signálu.

1.4.2 Ortogonalita, biortogonalita a semiortogonalita

Wavelety môžeme rozdeliť podľa druhu ortogonality v bázach ktoré tvoria, na tri základné skupiny:

- Wavelet ψ nazývame ***ortogonálny*** resp. ***ortonormálny***, ak platí:

  $$\tilde{\psi} \equiv \psi^* \tag{1.36}$$

  $$\langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m} \rangle = \delta(j-l)\,\delta(k-m) \quad j,k,l,m \in \mathcal{Z} \,. \tag{1.37}$$

  Vidíme, že duálny wavelet sa od základného líši iba konjugáciou a báza $\{\psi_{m,n}\}$ je ortonormálna, t. j. $\psi_{m,n}$ sú na seba ortogonálne na rovnakých úrovniach rozlíšenia a aj medzi rôznymi úrovňami.

- Wavelet $\psi \in L^2(\mathcal{R})$ sa nazýva ***semiortogonálny*** (nazývaný aj pre-wavelet), ak platí:

  $$\langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m} \rangle = \delta(j-l) \quad j,l \in \mathcal{Z} \,, \tag{1.38}$$

  t. j. ortogonalita je zachovaná len medzi rôznymi úrovňami rozlíšenia.

- Pár $\left(\psi, \tilde{\psi}\right)$ spĺňa podmienku ***biortogonality*** (hovoríme o ***biortogonálnych waveletoch***), ak množiny $\{\psi_{m,n}\}$ a $\left\{\tilde{\psi}_{m,n}\right\}$ sú duálne bázy, ktoré spĺňajú podmienku *biortogonality*:

  $$\left\langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{l,m} \right\rangle = \delta(j-l)\,\delta(k-m) \quad j,k,l,m \in \mathcal{Z} \,. \tag{1.39}$$

V uvedených prípadoch je dôležité si uvedomiť, že ak zmeníme parametre vzorkovacej mriežky (a_0, b_0), vlastnosti waveletov z hľadiska ortogonality sa nemusia zachovať. Napríklad ak $b_0 = 0.5$, potom Haarov wavelet definovaný v tabuľke 1.1 nie je ortogonálny[23].

Problém 1.1 *Môžeme vytvoriť pomocou každého prípustného waveletu waveletový rad?*

Problém 1.2 *Spĺňa každý waveletový rad so svojim duálom podmienku vzájomnej biortogonality báz?*

1.4.3 Prechod k analýze viacúrovňovým rozlíšením

V predchádzajúcej časti sme zistili, že pri waveletových radoch sú signály reprezentované pomocou $\psi_{m,n}$ na rôznych *úrovniach rozlíšenia*, ktoré sú jednoznačne dané parametrom m (parameter n nám iba pomáha extrahovať informáciu pri danom rozlíšení pozdĺž celej časovej osi). Koeficienty $d_{m,n}$ sú teda schopné vyjadriť iba *detaily* signálu pri úrovni rozlíšenia m. T. j. pre malé hodnoty m iba *krátkodobé* a pre veľké hodnoty m iba *dlhodobé charakteristiky signálu*). Vo frekvenčnej oblasti zodpovedá každej úrovni rozlíšenia, resp. detailu iba isté *frekvenčné pásmo*. Ak chceme vyjadriť signály z $L^2(\mathcal{R})$, je zmysluplné uložiť informáciu o detailoch signálu do uzavretých podpriestorov $\mathcal{W}_m$ v $L^2(\mathcal{R})$:

$$\mathcal{W}_m = L\left(\{\,\psi_{m,n}\}\,,\, n \in \mathcal{Z}\right)\,. \tag{1.40}$$

Keďže každý z týchto podpriestorov je schopný vyjadriť iba istý detail signálu, na reprezentáciu každého signálu z $L^2(\mathcal{R})$ je ich treba nekonečne veľa.

Teraz si predstavme časovo ohraničený signál, ktorý má jednosmernú zložku a chceme ho vyjadriť pomocou WR. Vzniká však nasledovný problém: Ako vyjadriť jednosmernú zložku, keď naše bázové funkcie ju nemajú (pozri vzťah (1.10))[24]? Riešením je, že použijeme spektrálne koeficienty pre veľa[25] dostatočne „pomalých“ waveletov. A máme vypuklý druhý problém: Ako zvládnuť výpočet veľkého počtu skalárnych súčinov spojitých funkcií (vzťah 1.23) v „rozumnom“ čase?

Obidva spomenuté problémy nám pomáha riešiť tzv. „Analýza viacúrovňovým rozlíšením“ v priestore $L^2(\mathcal{R})$. Zároveň nám umožňuje prejsť k *diskrétnej waveletovej transformácii* (DWT) a matematickému aparátu z oblasti diskrétnych sústav.

1.5 Analýza signálu viacúrovňovým rozlíšením (AVR)

Cieľom pri ***analýze viacúrovňovým rozlíšením*** (AVR), anglicky *MultiResolution Analysys*, je rozložiť ľubovoľný signál $f(t) \in L^2(\mathcal{R})$ do systému hierarchických podpriestorov $\mathcal{W}_m$, ktoré by charakterizovali rôzne rýchle zmeny v signáli. Aby sme to dosiahli, definujeme AVR ako postupnosť uzavretých podpriestorov $\mathcal{V}_m$ priestoru $L^2(\mathcal{R})$, pre ktoré platí [17]:

$$\{0\}\,\ldots\,\subset \mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_{-1} \subset \mathcal{V}_{-2} \subset\ \ldots\, L^2(\mathcal{R}) \tag{1.41}$$

$\leftarrow$ horšia aproximácia lepšia $\rightarrow$

[23]Stačí, že základný wavelet nie je ortogonálny na svoj prvý posun,t. j. $\langle\psi_{Haar,[0,0]}(t), \psi_{Haar,[0,1]}(t-0.5)\rangle = \langle\psi_{Haar}(t), \psi_{Haar}(t-0.5)\rangle = 0.5$.

[24]Podobný problém ako reprezentácia časovo ohraničených signálov pomocou FT.

[25]V tomto prípade „veľa“ v podstate znamená „nekonečne veľa“.

Podpriestory $\mathcal{V}_m$ sú schopné charakterizovať rôzne, ale iba do istej úrovne rýchle zmeny v signáli. Majú teda ***aproximačný charakter***.

Vlastnosti AVR sú definované nasledovne:

- Úplnosť
$$\mathcal{V}_\infty = \{0\} \quad \mathcal{V}_{-\infty} = \left\{ L^2(\mathcal{R}) \right\} . \tag{1.42}$$

- Invariantnosť vzhľadom na zmenu mierky
$$f(t) \in \mathcal{V}_m \Leftrightarrow f(2^m t) \in \mathcal{V}_0 \quad \forall m \in \mathcal{Z} . \tag{1.43}$$

- Invariantnosť vzhľadom na posun v čase
$$f(t) \in \mathcal{V}_0 \Leftrightarrow f(t-n) \in \mathcal{V}_0 \quad \forall n \in \mathcal{Z} . \tag{1.44}$$

- Existencia bázy. Existuje také $\varphi \in \mathcal{V}_0$, že množina $\{\varphi(t-n), n \in \mathcal{Z}\}$ je ortonormálnou bázou $\mathcal{V}_0$. Funkciu $\varphi \in \mathcal{V}_0$ nazývame ***funkcia mierky***.

- Existencia *bázy ortogonálneho doplnku*. Nech $\mathcal{W}_0$ je ortogonálny doplnok $\mathcal{V}_0$ do $\mathcal{V}_{-1}$, takže platí:
$$\mathcal{V}_{-1} = \mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{W}_0 . \tag{1.45}$$
Potom existuje taký ortonormálny wavelet $\psi \in \mathcal{W}_0$, že množina $\{\psi(t-n), n \in \mathcal{Z}\}$ je ortonormálnou bázou podpriestoru $\mathcal{W}_0$.

Z takto definovaných vlastností AVR vyplývajú nasledovné *dôsledky*:

1. Aby AVR bola úplná, musia mať funkcie mierky *jednosmernú zložku*
$$\int \varphi(t)dt \neq 0 . \tag{1.46}$$

2. Bázou $\mathcal{V}_m$ je množina
$$\left\{ \varphi_{m,n}(t) = 2^{-m/2}\varphi(2^{-m}t - n), n \in \mathcal{Z} \right\} . \tag{1.47}$$

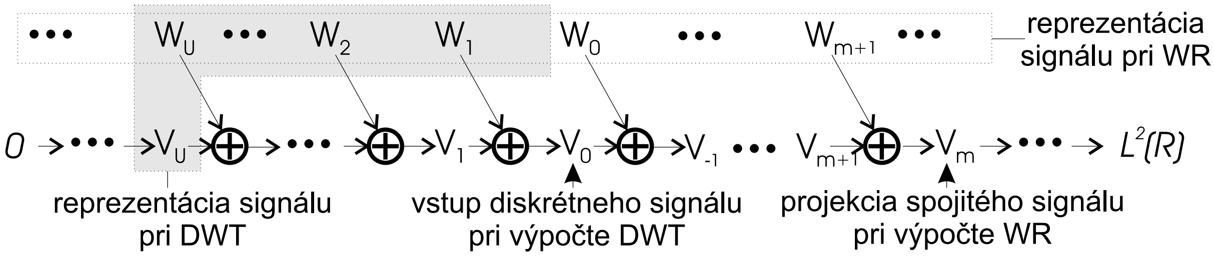
3. Bázou $\mathcal{W}_m$ je množina
$$\left\{ \psi_{m,n}(t) = 2^{-m/2}\psi(2^{-m}t - n), n \in \mathcal{Z} \right\} . \tag{1.48}$$

4. Platí
$$\mathcal{V}_m = \mathcal{V}_{m+1} \oplus \mathcal{W}_{m+1} . \tag{1.49}$$

Aproximačnú hierarchiu podpriestorov $\mathcal{V}_m$ (vzťah. (1.41)) potom môžeme skombinovaním vzťahov (1.42) a (1.49) vyjadriť v tvare:

$$L^2(\mathcal{R}) = \underbrace{\underbrace{\ldots \oplus \mathcal{W}_2}_{\mathcal{V}_1} \oplus \mathcal{W}_1}_{\mathcal{V}_0} \oplus \mathcal{W}_0 \oplus \mathcal{W}_{-1} \oplus \mathcal{W}_{-2} \ldots . \tag{1.50}$$

Zo vzťahov (1.49) a (1.50) je zrejmé, že priestorom $\mathcal{V}_m$ sa zlepšujú aproximačné schopnosti vďaka pridávaniu podpriestorov $\mathcal{W}_m$, ktoré sú schopné vyjadriť detaily na danej úrovni rozlíšenia. Podpriestory $\mathcal{W}_m$ preto nazývame ***diferenčné***. Celá situácia je



Obr. 1.13. Znázornenie hierarchie aproximačných ($\mathcal{V}_m$) a diferenčných ($\mathcal{W}_m$) podpriestorov v AVR s vyznačeným vstupom a reprezentáciou signálu pri WR a DWT

znázornená aj na obr. 1.13. Vzájomné vzťahy medzi podpriestormi sa dajú geometricky znázorniť analogicky k obr. 6.1 a obr. 6.2a (bázové vektory by označovali jednotlivé podpriestory $\mathcal{W}$, podpriestory $\mathcal{V}$ by boli ich priamymi sumami ...).

Aby sme mohli s reprezentáciami funkcií v AVR efektívne narábať, je potrebné priblížiť viaceré dôležité vlastnosti AVR. Keďže $\mathcal{V}_0$ je obsiahnuté vo $\mathcal{V}_{-1}$, pre $\varphi(t) \in \mathcal{V}_0$ platí aj, že $\varphi(t) \in \mathcal{V}_{-1}$. Bázou vo $\mathcal{V}_{-1}$ je $\left\{\sqrt{2}\varphi(2t-n)\,,\, n \in \mathcal{Z}\right\}$, takže $\varphi(t)$ môžeme vyjadriť ako:

$$\varphi(t) = \sqrt{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n)\,\varphi(2t-n)\,. \tag{1.51}$$

Na základe vlastností o ortogonálnom doplnku platí analogicky:

$$\psi(t) = \sqrt{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{mr}(n)\,\varphi(2t-n)\,. \tag{1.52}$$

Tieto dva vzťahy sa nazývajú ***dilatačné rovnice***[26] . *Postupnosti* h_{mr} a g_{mr} charakterizujú vzťahy medzi bázami na susedných úrovniach rozlíšenia a nazývajú sa ***koeficienty pre zmenu rozlíšenia*** resp. ***dilatačné koeficienty***[27].

Ako vyzerajú funkcie mierky? Príklady funkcií mierok pre Daubechieovej wavelety (pozri obr. 1.5) sú uvedené na obr. 1.14. Pre elementárny Haarov (= Db1) wavelet si preberme situáciu podrobnejšie a overme si niektoré vlastnosti AVR. Funkcie mierky a wavelety v troch susedných úrovniach rozlíšenia sú zobrazené na obr. 1.15. Ich celočíselné posuny tvoria bázy príslušných podpriestorov v $L^2(\mathcal{R})$. Uvedomme si, že platí:

$$\varphi_{m+1,n}(t) = 2^{-1/2}\varphi_{m,n}(t/2) \quad \psi_{m+1,n}(t) = 2^{-1/2}\psi_{m,n}(t/2)\,. \tag{1.53}$$

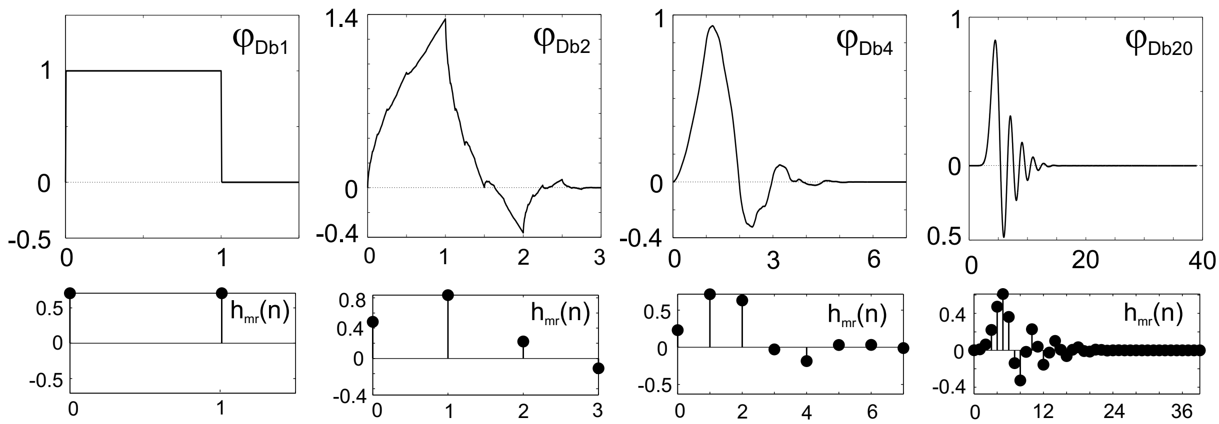
Z obr. 1.15 je zrejmé, že platia aj nasledovné vlastnosti:

- bázové funkcie $\mathcal{V}_0$ a $\mathcal{W}_0$ môžeme vyjadriť pomocou bázových funkcií z $\mathcal{V}_{-1}$

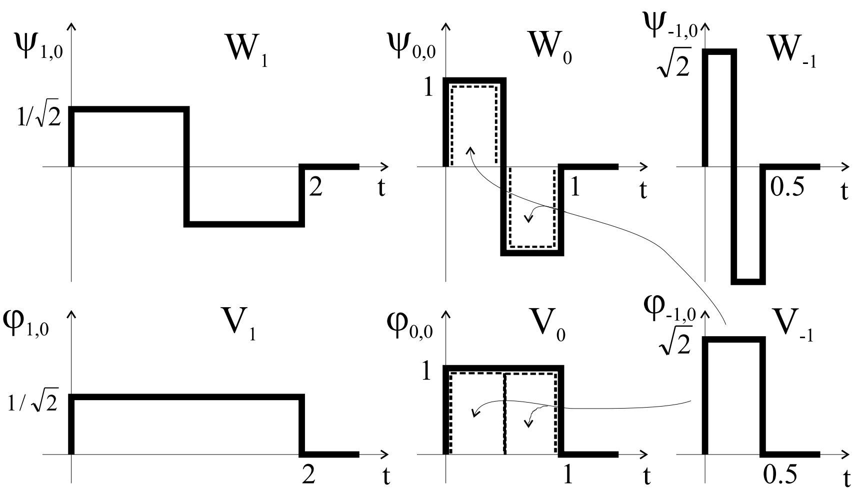
$$\begin{aligned}\varphi_{0,n}(t) = \varphi(t) &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}(\varphi(2t) + \varphi(2t-1)) \\ &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}\varphi_{-1,n}(t) + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\varphi_{-1,n+1}(t) \quad \Rightarrow \quad h_{mr} = \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad (1.54)\\ \psi_{0,n}(t) = \psi(t) &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}(\varphi(2t) - \varphi(2t-1)) \\ &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}\varphi_{-1,n}(t) + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\varphi_{-1,n-1}(t) \quad \Rightarrow \quad g_{mr} = \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad (1.55)\end{aligned}$$

- priama suma podpriestorov $\mathcal{V}_0$ a $\mathcal{W}_0$ je $\mathcal{V}_{-1}$, t. j. bázové funkcie $\mathcal{V}_{-1}$ sa dajú vyjadriť ako lineárna kombinácia bázových funkcií $\mathcal{V}_0$ a $\mathcal{W}_0$.

[26] *Dilatačné rovnice* sa zvyknú nazývať aj *relácie zmeny rozlíšenia*, podľa angl. „two scale relations".
[27] Index mr (z angl. „multiresolution") označuje, že ide o dilatačné koeficienty v AVR.



Obr. 1.14. Príklady funkcií mierok $\varphi(t)$ a zodpovedajúcich dilatačných koeficientov $h_{mr}(n)$ pre Daubechieovej (Db) wavelety rádu 1, 2, 4, 20. Vidíme, že dĺžky $h_{mr}(n)$ presne zodpovedajú *nosičom* funkcií mierky.



Obr. 1.15. Haarov wavelet a funkcia mierky v susedných úrovniach rozlíšenia

1.5.1 Využitie AVR na výpočet waveletovej transformácie

Definovanie AVR malo za cieľ pripraviť aparát, ktorý môžeme použiť pri praktickom výpočte waveletových radov a DWT. Nech funkcia $s(t) \in L^2(\mathcal{R})$. Súradnice jej *priemetu* do priestoru $\mathcal{V}_m$ sú dané vzťahom:

$$c_m(n) = \langle s(t), \varphi_{m,n}(t) \rangle \; . \tag{1.56}$$

Získavame diskrétnu množinu ***koeficientov mierky*** $c_m(n)$, ktoré predstavujú súradnice s_t vo $\mathcal{V}_m$. Spätnou rekonštrukciou $s(t)$ z koeficientov mierky získavame ***aproximáciu*** (ap_m) funkcie $s(t)$ vo $\mathcal{V}_m$:

$$\hat{s}_{\mathcal{V}_m}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_m(n)\, \varphi_{m,n}(t) \, . \tag{1.57}$$

Analogicky *priemetom* $s(t)$ do $\mathcal{W}_m$

$$d_m(n) = \langle s(t), \psi_{m,n}(t) \rangle \; , \tag{1.58}$$

získavame *waveletové koeficienty* pri danej úrovni rozlíšenia m, ktoré reprezentujú ***detail*** (de_m) funkcie v priestore $\mathcal{W}_m$:

$$\hat{s}_{\mathcal{W}_m}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_m(n)\, \psi_{m,n}(t) \, . \tag{1.59}$$

Príklad signálu, jeho aproximácií a detailov pri reprezentácii v podpriestoroch AVR je znázornený na obr. 1.16.

Použitím dilatačných rovníc (1.51), (1.52), vlastností AVR a následnou úpravou dostávame vzťahy, ktoré popisujú súvis hodnôt koeficientov mierky $c_m(n)$ a waveletových koeficientov $d_m(n)$ na susedných úrovniach rozlíšenia. Množinu koeficientov $c_m(n)$ môžeme rozložiť na množiny koeficientov v nasledujúcej úrovni rozlíšenia pomocou vzťahov:

$$c_{m+1}(n) = \sum_k h_{mr}(k-2n)\, c_m(k) \tag{1.60}$$

$$d_{m+1}(n) = \sum_k g_{mr}(k-2n)\, c_m(k) \, . \tag{1.61}$$

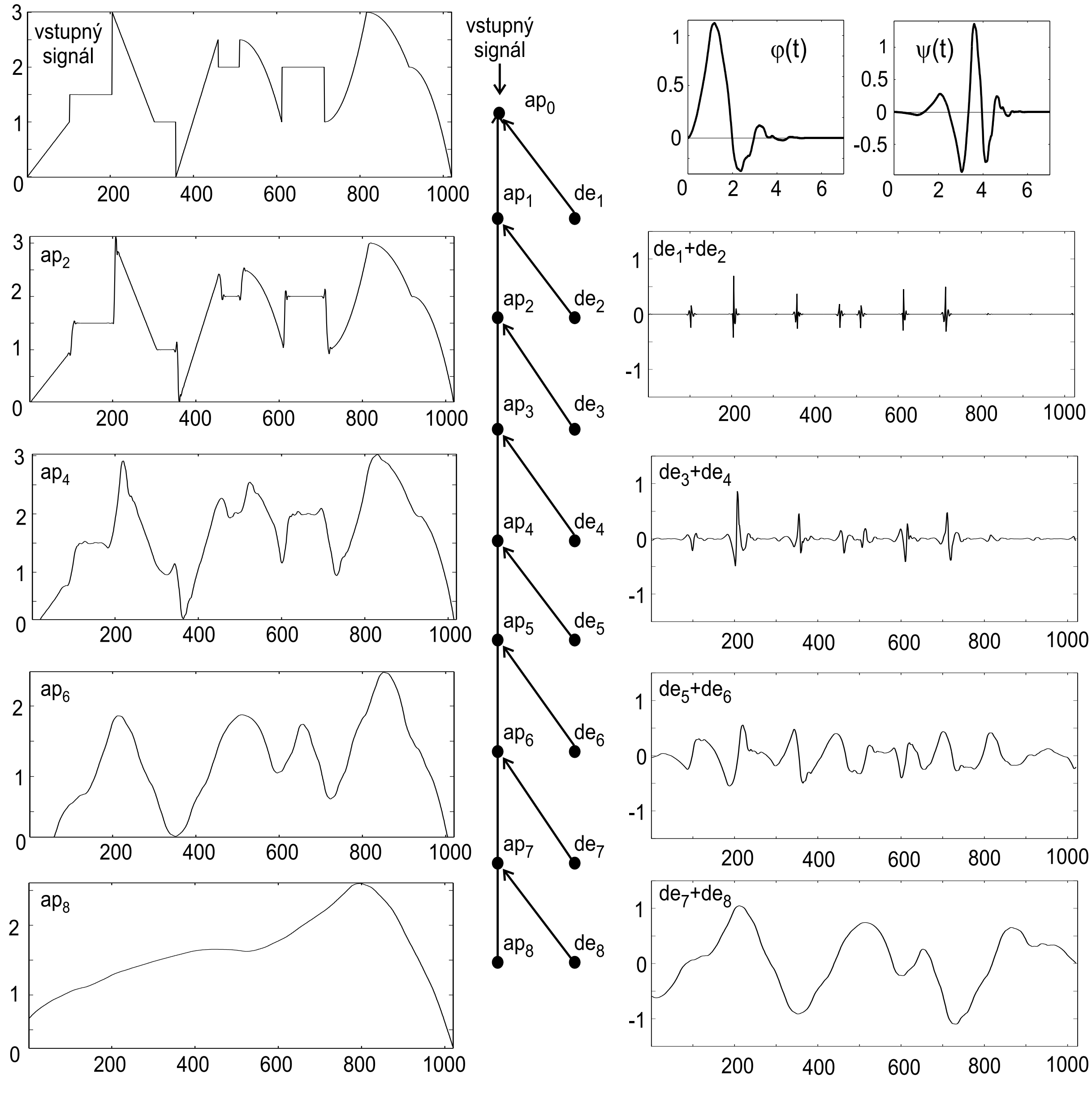
Pre spätnú rekonštrukciu platí:

$$c_m(n) = \sum_k h_{mr}(n-2k)\, c_{m+1}(k) + \sum_k g_{mr}(n-2k)\, d_{m+1}(k) \, . \tag{1.62}$$

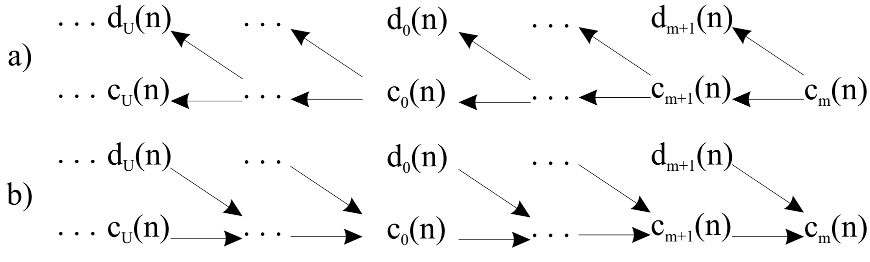
Vzťahmi (1.60), (1.61) môžeme rozklad vykonať aj opakovane a pomocou (1.62) všetko spätne zrekonštruovať, ako je znázornené na obr. 1.17. Uvedené vzťahy nám umožňujú urýchliť výpočet $d_m(n)$ vo waveletových radoch — namiesto skalárneho súčinu spojitých (!) funkcií vo vzťahu (1.58) máme jednoduchý algoritmus na diskrétnych vzorkách. Z tohto dôvodu bývajú vzťahy (1.60)-(1.62) označované aj ako ***rýchla waveletová transformácia*** (RWT).

Pri *výpočte waveletových radov* z $f(t) \in L^2(\mathcal{R})$ ***rýchlym algoritmom***[28] (RWT) postupujeme nasledovne:

[28] „Pomalý algoritmus" výpočtu waveletových radov predstavujú vzťahy (1.23) resp.(1.58).



Obr. 1.16. Príklad signálu a jeho aproximácií a detailov pri reprezentácii v podpriestoroch AVR. Použitý wavelet Db4. (Výpočet vykonaný pomocou DWT a 1024 vzoriek vstupného signálu, t. j. zobrazený výsledok je diskrétna aproximácia spojitého prípadu)



Obr. 1.17. Rozklad **(a)** a rekonštrukcia **(b)** koeficientov mierky pri výpočte WR a DWT

1. Začneme s projekciou $s(t)$ do $\mathcal{V}_m$ pomocou vzťahu 1.56. $\mathcal{V}_m$ môžeme pritom zvoliť tak, aby sme boli schopní pomocou koeficientov $c_m(n)$ aproximovať $s(t)$ s dostatočnou presnosťou.
2. Pokračujeme rozkladmi v diskrétnej oblasti pomocou vzťahov (1.60) (1.61), často iba po želanú úroveň rozkladu U (rozklad môžeme zastaviť kedykoľvek a „zvyšok" signálu nechať reprezentovaný v príslušnom aproximačnom priestore)

Spätnú rekonštrukciu signálu $s(t)$ (označme ju $\hat{s}(t)$) z waveletových radov môžeme získať sčítaním získaných detailov signálu a prípadnej zbytkovej aproximácie v priestore $\mathcal{V}_U$:

$$\hat{s}(t) = \hat{s}_{\mathcal{W}_{m+1}}(t) + \hat{s}_{\mathcal{W}_{m+2}}(t) + \ldots + \hat{s}_{\mathcal{W}_U}(t)\hat{s}_{\mathcal{V}_U}(t)\,, \tag{1.63}$$

alebo najprv spätnou rekonštrukciou koeficientov $c_m(n)$ pomocou vzťahu (1.62) a použitím aproximácie $f(t)$ vo $\mathcal{V}_m$, t. j.:

$$\hat{s}(t) = \hat{s}_{\mathcal{V}_m}(t)\,. \tag{1.64}$$

Uvedomme si, že pri výpočte WR a aj rekonštrukcii z nich používame tú istú AVR (tie isté podpriestory V_m a W_m s ich bázami). To znamená, že podmienky (1.36) a (1.37) sú splnené a platí:

Analýza viacúrovňovým rozlíšením nám pomocou algoritmu rýchlej waveletovej transformácie umožňuje výpočet **ortogonálnych waveletových radov**.

Keďže RWT predstavuje kľúčový výsledok pre prácu s reprezentáciou signálu v AVR, ako príklad si odvodíme vzťah (1.60). Vychádzajme z vyjadrenia $\varphi_{m,n}$ v AVR a vzťahu (1.51):

$$\varphi_{m,n}(t) = 2^{-m/2}\varphi\left(2^{-m}t - n\right) \qquad \varphi(t) = \sqrt{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n)\,\varphi(2t - n)\,. \tag{1.65}$$

Vynásobme obe strany pravej rovnice $2^{-m/2}$ a za t dosaďme $2^{-m}t - n$:

$$\begin{aligned} 2^{-m/2}\varphi\left(2^{-m}t - n\right) &= 2^{-m/2}2^{1/2}\sum_k h_{mr}(k)\,\varphi\left(2(2^{-m}t - n) - k\right) \\ \varphi_{m,n}(t) &= \sum_k h_{mr}(k)\; 2^{-(m-1)/2}\varphi\left(2^{-(m-1)}t - 2n - k\right) = \\ &= \sum_k h_{mr}(k)\; \varphi_{m-1,2n+k}(t)\,. \end{aligned} \tag{1.66}$$

Dosaďme výsledok z (1.66) do (1.56) a upravme:

$$\begin{aligned} c_m(n) &= \langle f(t), \varphi_{m,n}(t)\rangle = \left\langle f(t), \sum_k h_{mr}(k)\; \varphi_{m-1,2n+k}(t)\right\rangle = \\ &= \sum_k h_{mr}(k)\; \langle f(t), \varphi_{m-1,2n+k}(t)\rangle = \sum_k h_{mr}(k)\; c_{m-1}(2n+k) = \\ &= \sum_k h_{mr}(k - 2n)\; c_{m-1}(k)\;. \end{aligned} \tag{1.67}$$

Substitúciou $m = m + 1$ do (1.67) dostávame výsledok ekvivalentný s 1.60:

$$c_{m+1}(n) = \sum_k h_{mr}(k - 2n)\, c_m(k)\,. \tag{1.68}$$

Príklad 1.4 *Pre aké signály je možná nulová chyba pri rekonštrukcii, ak nechceme nekonečne dlho počítať?*

Riešenie: *Pre také, ktoré vznikli (náhodou alebo úmyselne) iba z konečného počtu bázových funkcií.*

1.6 Diskrétna waveletová transformácia a jej výpočet

Pri výpočte ortogonálnej ***diskrétnej waveletovej transformácie (DWT)*** z diskrétneho signálu $x(n) \in l^2(\mathcal{Z})$, $n \in \mathcal{Z}$ interpretujeme vstupné hodnoty priamo ako projekčné koeficienty $c_0(n)$ nejakého spojitého signálu $s(t)$ do $\mathcal{V}_0$. Ďalej je postup výpočtu ***doprednej DWT*** identický s výpočtom ortogonálnych WR, t. j. koeficienty $c_0(n)$ rekurzívne rozkladáme pomocou vzťahov (1.60) (1.61). Rekonštrukcia (***spätná transformácia***) je daná vzťahom (1.62).

Pri SWT sme pracovali s *expanznými funkciami*, pri WR s *bázou* tvorenou *spojitými funkciami*. Čo je vlastne bázou pri DWT? Keďže vstupný signál aj výpočet projekčných koeficientov je diskrétny v čase, aj báza DWT je diskrétna, istým spôsobom vytvorená z koeficienov pre zmenu rozlíšenia.

To, že vstupný signál „interpretujeme“ ako koeficienty $c_0(m)$ de facto znamená, že báza signálu pred transformáciou je postupnosť Kroneckerových impulzov a výsledný priestor je diskrétnym ekvivalentom priestoru $\mathcal{V}_0$. Ako signál postupne transformujeme vzťahmi (1.60) (1.61), podobá sa báza čoraz viac[29] na bázu vytvorenú zo spojitých funkcií $\psi(t)$ a $\varphi(t)$ (pozri obr. 1.20), t. j. predstavuje jej čoraz lepšiu diskrétnu aproximáciu. Uvedenú situáciu môžeme formalizovať redefinovaním priestoru $\mathcal{V}_0$ a tým aj celej AVR [21, str. 151]:

$$\mathcal{V}_0 = l^2(\mathcal{Z})\,. \tag{1.69}$$

AVR potom môžeme definovať ako postupnosť uzavretých podpriestorov $\mathcal{V}_m$ priestoru $l^2(\mathcal{Z})$:

$$\mathcal{V}_U \subset \ldots \subset \mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_0\,. \tag{1.70}$$

Ak máme signál konečnej dĺžky N, bude sa každým rozkladom vzťahmi (1.60), (1.61) veľkosť reprezentácie zväčšovať. Ak chceme signál reprezentovať v báze veľkosti N (t. j. reprezentácia nebude nadbytočná), musíme uskutočniť špeciálne opatrenia pri manipulácii so signálom na jeho hraniciach, resp. jeho hranice umelo rozšíriť.[30] Potom pre vstupný signál dĺžky N, je max. počet úrovní rozkladu

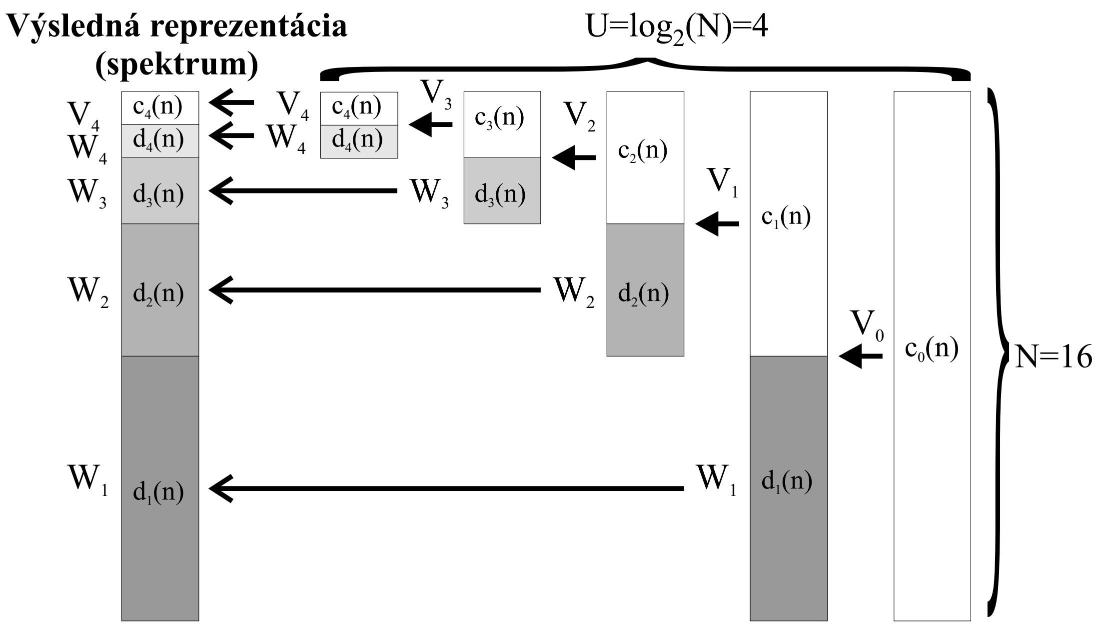
$$U \leq \lfloor \log_2 N \rfloor\,. \tag{1.71}$$

Ak maximálny počet úrovní rozkladu dosiahneme, potom hovoríme o ***úplnom rozklade***. Príklad takéhoto rozkladu pre pre $N = 16$ je znázornený na obr. 1.18. Výsledkom je reprezentácia v 4 diferenčných a jednom aproximačnom priestore. Aké vlastnosti bude mať toto rozdelenie z hľadiska frekvenčného, je schématicky znázornené[31] na obr. 1.19. Vidíme, že ide o analogické delenie na pásma vo frekvencii, s akým sme sa doteraz stretli pri WR (obr. 1.2b, obr. 1.10d, obr. 1.12).

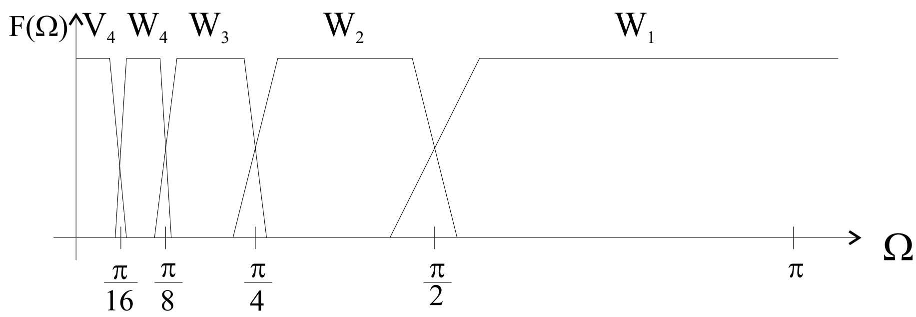
[29] Prečo je to tak, je vysvetlené v časti 2.1.1, venovanej kaskádovým algoritmom.

[30] Metódy sú preberané bližšie v časti (4.1). Najbežnejšia je periodifikácia signálu známa aj z DFT. Vzťahy (1.60), (1.61) periodicitu vstupného signálu zreplikujú aj do výstupov, preto počet koeficientov potrebných na rekonštrukciu nenarastie.

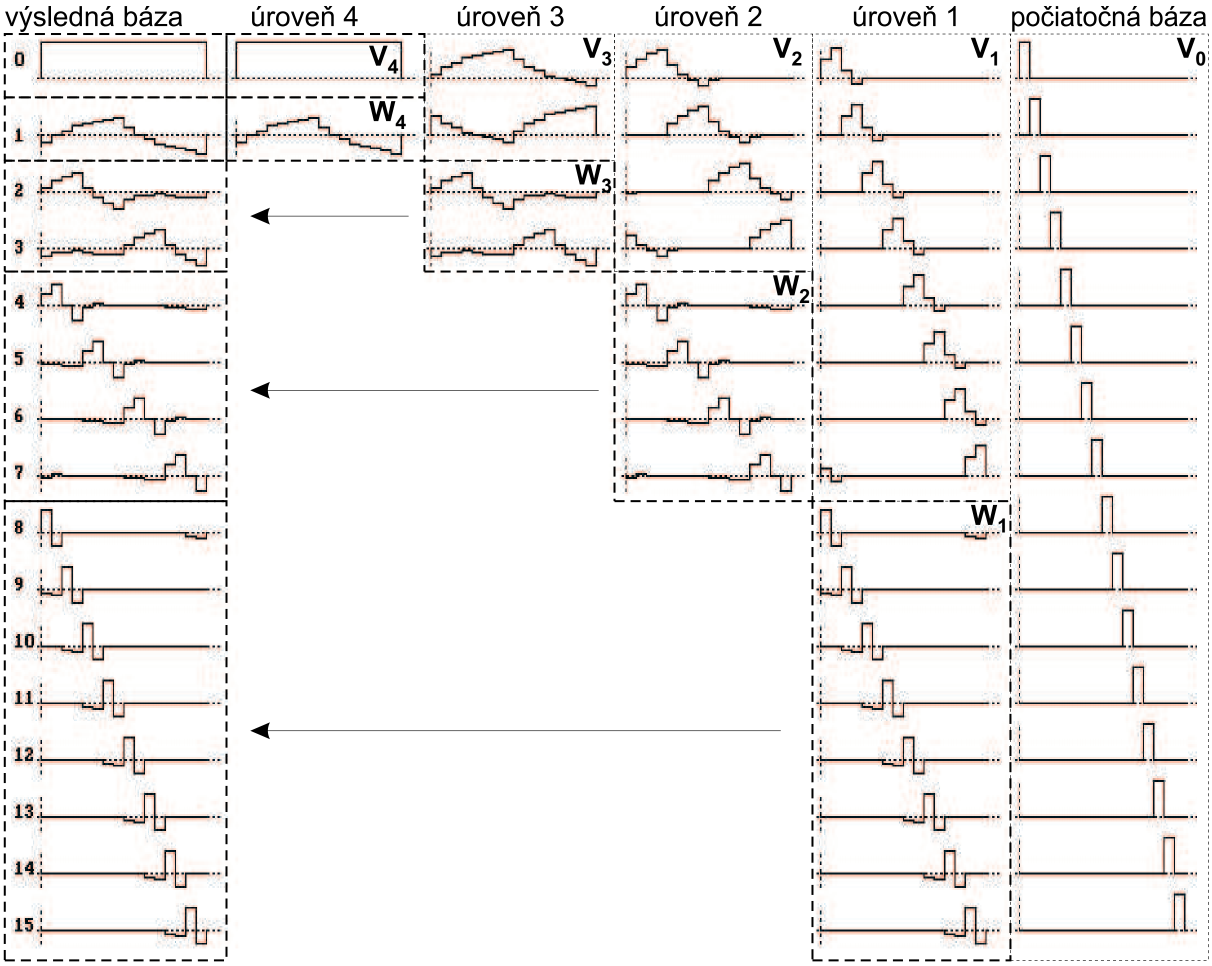
[31] Všeobecné riešenie je použiť DTFT. V prípade, že sme signál periodicky rozšírili, je adekvátne použiť priamo DFT.



Obr. 1.18. Rozklad signálu dĺžky $N = 16$ pri DWT a štruktúra výsledného spektra



Obr. 1.19. Schématické znázornenie častí *frekvenčného* spektra zodpovedajúce jednotlivým podpriestorom pri rozklade signálu $f(n)$ pomocou DWT so 4 úrovňami rozlíšenia.



Obr. 1.20. Štruktúra bázy pri ortogonálnej DWT s Db2. Pred transformáciou je báza signálu tvorená posunmi jednotkových impluzov. Pri rozklade signálu do ďalších podpriestorov predstavujú bázové vektory čoraz lepšiu aproximáciu waveletov. V dôsledku neredundantnosti reprezentácie sa bázové funkcie v posledných priestoroch $\mathcal{V}_4$ a $\mathcal{W}_4$ začínajú „zlievat“, t. j. nepredstavujú najlepšiu aproximáciu funkcie mierky resp. waveletov. Môžeme vidieť, že bolo použité periodické rozšírenie signálov a bázové funkcie sú periodické.

1.7 DWT v maticovom tvare

Pre vstupný signál $c_0(n)$ dĺžky N_0 môžeme vzťahy pre výpočet doprednej ortogonálnej DWT (1.60), (1.61)

$$c_{m+1}(n) = \sum_k h_{mr}(k-2n)\, c_m(k) \qquad d_{m+1}(n) = \sum_k g_{mr}(k-2n)\, c_m(k) \tag{1.72}$$

a spätnej DWT (1.62)

$$c_m(n) = \sum_k h_{mr}(n-2k)\, c_{m+1}(k) + \sum_k g_{mr}(n-2k)\, d_{m+1}(k) \tag{1.73}$$

prepísať v maticovom tvare nasledovne:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C}_{m+1} \\ \mathbf{D}_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H_{m+1}} \\ \mathbf{G_{m+1}} \end{pmatrix} \mathbf{C}_m \qquad \mathbf{C}_m = \begin{pmatrix} \mathbf{H^T_{m+1}} & \mathbf{G^T_{m+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{m+1} \\ \mathbf{D}_{m+1} \end{pmatrix}, \tag{1.74}$$

kde $\mathbf{C_m}$ resp. $\mathbf{D_m}$ sú stĺpcové vektory (matice) :

$$\mathbf{C}_m = \left(c_m(0), c_m(1), \ldots, c_m(N_m-1)\right)^T, \tag{1.75}$$

$$\mathbf{D}_m = \left(d_m(0), d_m(1), \ldots, d_m(N_m-1)\right)^T, \tag{1.76}$$

veľkosť vektorov je:

$$N_m = 2^{-m} N_0 \tag{1.77}$$

a matice $\mathbf{H_m}$, $\mathbf{G_m}$ majú kaskádový tvar vytvorený *párnymi* posunmi dilatačných koeficientov („chýba“ každý druhý riadok, aby matice boli štvorcové):

$$\mathbf{H}_m = \overbrace{\begin{pmatrix} h(0) & h(1) & h(2) & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & h(-1) \\ \ldots & h(-1) & h(0) & h(1) & h(2) & \ldots & \ldots & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h(2) & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & h(-1) & h(0) & h(1) \end{pmatrix}}^{2N_m} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} a\\a\\a\\a \end{pmatrix}}\right\} N_m \tag{1.78}$$

$$\mathbf{G}_m = \overbrace{\begin{pmatrix} g(0) & g(1) & g(2) & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & g(-1) \\ \ldots & g(-1) & g(0) & g(1) & g(2) & \ldots & \ldots & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g(2) & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & g(-1) & g(0) & g(1) \end{pmatrix}}^{2N_m} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} a\\a\\a\\a \end{pmatrix}}\right\} N_m\,. \tag{1.79}$$

Keďže vstupný signál a teda aj matice $\mathbf{H_m}$, $\mathbf{G_m}$ majú ohraničenú veľkosť, nemôžeme sa pomocou parametrov n a k (pozri vzťahy (1.72) a (1.73)) pohybovať „mimo“ signálu. Je potrebné manipuláciu so signálom na jeho hraniciach upraviť (t. j. upraviť matice $\mathbf{H_m}$, $\mathbf{G_m}$). V tomto prípade sme pre jednoduchosť zvolili periodické rozšírenie signálu[32]. To znamená, že ak by mal v maticiach $\mathbf{H_m}$, $\mathbf{G_m}$ nejaký dilatačný koeficient z boku matice „pretŕčať“, objaví sa na opačnej strane. Ak na zodpovedajúcom mieste nejaký koeficient už je, tak sa k nemu *pričíta.*

Neskôr v tejto časti a v časti 2.1 uvidíme, že pri ortogonálnej DWT musia mať množiny dilatačných koeficientov párnu veľkosť. Aby podmienky ortogonality zostali

[32]Riešenia pri konečnej dĺžke vstupného signálu sú popísané v časti 4.1.

zachované, N_m musí byť párne. T. j. aby bol možný úplný rozklad, N_0 musí byť mocninou 2. Ak má vstupný signál na začiatku, alebo v priebehu výpočtu DWT nepárnu veľkosť, stačí ho doplniť nulou a vo výpočte môžeme pokračovať. Takto by sme však dostali *nadbytočnú reprezentáciu*.

Transformačné matice DWT pre m-tú úroveň rozkladu($\mathbf{T_A^{(m)}}$) a rekonštrukcie ($\mathbf{T_S^{(m)}}$) sú definované:

$$\mathbf{T}_A^{(m)} = \begin{pmatrix} \mathbf{H_m} \\ \mathbf{G_m} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{T}_S^{(m)} = \begin{pmatrix} \mathbf{H_m^T} & \mathbf{G_m^T} \end{pmatrix} . \tag{1.80}$$

Ak má byť transformácia invertovateľná musí platiť:

$$\mathbf{T_A^{(m)}T_S^{(m)}} = \mathbf{I_{N_m}} = \mathbf{T_S^{(m)}T_A^{(m)}} , \tag{1.81}$$

kde I_{N_m} je jednotková matica veľkosti N_m. Dosadením vzťahu (1.80) do vzťahu (1.81) a úpravou dostaneme:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H_mH_m^T} & \mathbf{H_mG_m^T} \\ \mathbf{G_mH_m^T} & \mathbf{G_mG_m^T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I_{N_m}} & \mathbf{0_{N_m}} \\ \mathbf{0_{N_m}} & \mathbf{I_{N_m}} \end{pmatrix} = \left(\mathbf{H_m^TH_m} + \mathbf{G_m^TG_m}\right) . \tag{1.82}$$

Z ľavej strany vyplýva:

$$\mathbf{H_mH_m^T} = \mathbf{G_mG_m^T} = \mathbf{I} \qquad \mathbf{H_mG_m^T} = \mathbf{G_mH_m^T} = \mathbf{0} . \tag{1.83}$$

T. j. dilatačné koeficienty $h_{mr}(n)$ musia byť ortogonálne k svojim párnym posunom a aj ku koeficientom $h_{mr}(n)$ a ich párnym posunum (pozri riadky 2, 5 v tabuľke 2.1). Aby bola splnená rovnosť na pravej strane, musia $g_{mr}(n)$ spĺňať dodatočnú podmienku

$$g\,(n) = \pm\,(-1)^n\, h\,(M-n)\,, \qquad M - \text{je nepárne}\,, \tag{1.84}$$

pričom dĺžka $h_{mr}(n)$ musí byť párna. Ide o základnú podmienku rekonštrukcie signálu pri ortogonálnej DWT. Zároveň z nej vyplýva, že na popísanie ortogonálnej DWT stačí jedna sada dilatačných koeficientov.

Ako sú tvorené bázy na jednotlivých úrovniach rozlíšenia? Bázové vektory sú stĺpce rekonštrukčných matíc $\mathbf{T_S^{(m)}}$. Keď si uvedomíme spôsob kaskádovania matíc $\mathbf{T_S^{(m)}}$ pri viacúrovňovej rekonštrukcii, môžeme písať:

$\mathbf{I}$ - je diskrétnou bázou pre koeficienty $c_0(n) \to \mathcal{V}_0$
$\mathbf{H_1^T}$ - je diskrétnou bázou pre koeficienty $c_1(n) \to \mathcal{V}_1$
$\mathbf{H_1^TH_2^T}$ - je diskrétnou bázou pre koeficienty $c_3(n) \to \mathcal{V}_2$
... ...
$\mathbf{G_1^T}$ - je diskrétnou bázou pre koeficienty $d_1(n) \to \mathcal{W}_1$
$\mathbf{H_1^TG_2^T}$ - je diskrétnou bázou pre koeficienty $d_2(n) \to \mathcal{W}_2$
$\mathbf{H_1^TH_2^TG_3^T}$ - je diskrétnou bázou pre koeficienty $d_2(n) \to \mathcal{W}_3$
... ...

Zlúčením týchto báz potom dostávame bázu DWT po m rozkladoch ($\mathbf{T_S^m}$) v tvare:

$$\begin{array}{lllllll}
\mathbf{T_{S_0}} & = (& & \mathbf{I} & & &) \\
\mathbf{T_{S_1}} & = (& & \mathbf{H_1^T} & & \mathbf{G_1^T} &) \\
\mathbf{T_{S_2}} & = (& & \mathbf{H_1^TH_2^T} & \mathbf{H_1^TG_2^T} & \mathbf{G_1^T} &) \\
\mathbf{T_{S_3}} & = (& \mathbf{H_1^TH_2^TH_3^T} & \mathbf{H_1^TH_2^TG_3^T} & \mathbf{H_1^TG_2^T} & \mathbf{G_1^T} &) \\
\dots & & & & & & \\
\mathbf{T_{S_U}} & = (& \mathbf{H_1^T}\dots\mathbf{H_U^T} \quad \mathbf{H_1^T}\dots\mathbf{H_{U-1}^TG_U^T} & \dots & \mathbf{H_1^TG_2^T} & \mathbf{G_1^T} &)
\end{array} . \tag{1.85}$$

Kapitola 2

Vlastnosti a základné typy waveletov

V predchádzajúcich častiach sme postupne prešli od spojitej waveletovej transformácie cez waveletové rámce a rady až k diskrétnej waveletovej transformácii. Venovali sme sa najmä princípom a spôsobom ich výpočtu. V tejto kapitole sa budeme zaoberať predovšetkým vlastnosťami waveletov a súvislosťami, ktoré z toho vyplývajú. Ukážeme si krátky prehľad základných typov waveletov, waveletových systémov a niektoré metódy návrhu waveletov. Na obr. 2.1 je znázornený jednoduchý prehľad[1] typov waveletov a zodpovedajúcich ***systémov***[2].

Najdôležitejšie typy predstavujú ortogonálne a biortogonálne wavelety s kompaktným nosičom, pre ktoré existuje rýchly algoritmus výpočtu waveletových transformácií (RWT). V ďalších častiach tejto kapitoly sa budeme venovať výhradne týmto typom.

Je zrejmé, že dilatačné koeficienty pri RWT sú úzko späté s vlastnosťami funkcií mierky a waveletov (neskôr uvidíme, že úplne určujú aj funkcie samotné). Pre najjednoduchší (ortogonálny) prípad sa tejto problematike budeme venovať v nasledujúcej časti. Zistíme, že dilatačné koeficienty môžeme interpretovať ako impulzové charakteristiky KIO filtrov a zavedieme dôležitý koncept K-regulárnych filtrov. Ten následne využijeme pri vysvetlení schopnosti waveletov detekovať nespojitosti v deriváciách signálu a pri návrhu ortogonálnych waveletov. Na záver si priblížime biortogonálne wavelety a známe B-spline wavelety, ktoré môžu tvoriť ortogonálne, biortogonálne aj semiortogonálne systémy.

2.1 Vlastnosti funkcie mierky a waveletov

V tejto časti sa venujeme zhrnutiu a vysvetleniu vlastností a vzťahov medzi funkciou mierky, waveletmi a dilatačnými koeficientmi. Kvôli jednoduchosti sa zameriame na základný *ortonormálny* prípad AVR a z nej vyplývajúcich WR a DWT.

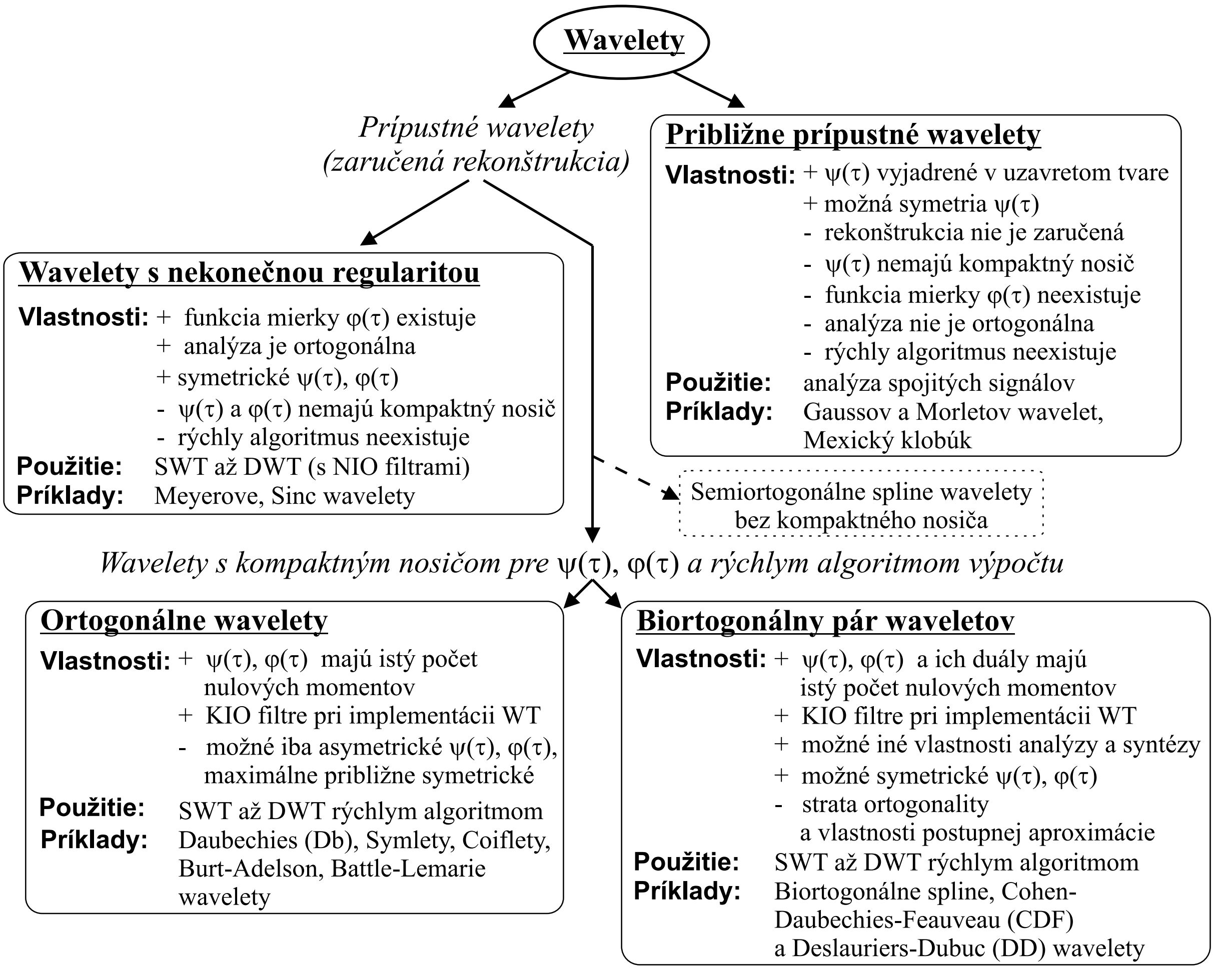
Zvoľme si nasledovné označenia a počiatočné predpoklady (platné pre túto časť):

- $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — funkcia mierky a wavelet spĺňajúce relácie zmeny rozlíšenia v AVR (1.51), (1.52), wavelet spĺňajúci podmienku prípustnosti (1.10) a podmienky ortonormality (1.36), (1.37)
- $h(n)$, $g(n)$ — koeficienty pre zmenu rozlíšenia $h_{mr}(n)$, $g_{mr}(n)$ (zjednodušené označenie)
- $H(\Omega)$, $G(\Omega)$ — DTFT koeficientov $h(n)$ a $g(n)$ (ak považujeme $h(n)$ a $g(n)$ za impulzové charakteristiky číslicových filtrov, sú $H(\Omega)$, $G(\Omega)$ magnitúdové frekvenčné charakteristiky ich prenosových funkcií).

Platia nasledovné základné vety (dôkazy sú uvedené v [23]):

[1] Prehľad nie je kompletný, sú tu uvedené iba základné typy waveletov

[2] Pod pojmom waveletový systém rozumieme konkrétny systém funkcií, pomocou ktorého signál rozkladáme resp. skladáme t. j. wavelety, funkcie mierky, ich posuny a zmeny mierky.



Obr. 2.1. Základné typy waveletov a charakteristiky zodpovedajúcich waveletových systémov (ich plusy, mínusy, . . .)

Veta 2.1 *Ak platí* $\int \varphi(t)dt = 1$, *potom* $\sum\limits_n h(n) = \sqrt{2}$.

Veta 2.2 *Ak celočíselné posuny* $\varphi(n)$ *tvoria ortonormálny systém, t. j.* $\int \varphi(t)\varphi(t-k)\,dt = \delta(k)$, *potom* $\sum\limits_n h(n)h(n-2k) = \delta(k)$.

Dôsledky:

$$\sum_n h(2n) = \sum_n h(2n+1) = \sqrt{2}\Big/2 \tag{2.1}$$

$$\sum_n |h(n)|^2 = 1\,. \tag{2.2}$$

Veta 2.3 *Ak* $\varphi(t)$ *má kompaktný nosič na intervale* $\langle 0, N-1\rangle$ *a* $\varphi(t-k)$ *sú lineárne nezávislé, potom* $h(n)$ *má „kompaktný nosič“ na* $0 \le n \le N-1$. *T. j. dĺžka postupnosti* $h(n)$ *je* N *(pozri obr. 1.14).*

Pomocou uvedených viet a všeobecne známych vzťahov (uvedených napr. v [23], [21]) môžeme zostaviť tabuľku 2.1, ktorá nám sumarizuje základné vlastnosti a ich ekvivalencie. Ďalšie dôležité vlastnosti (väčšinou priamo vyplývajúce z tabuľky 2.1) by sme mohli sformulovať takto:

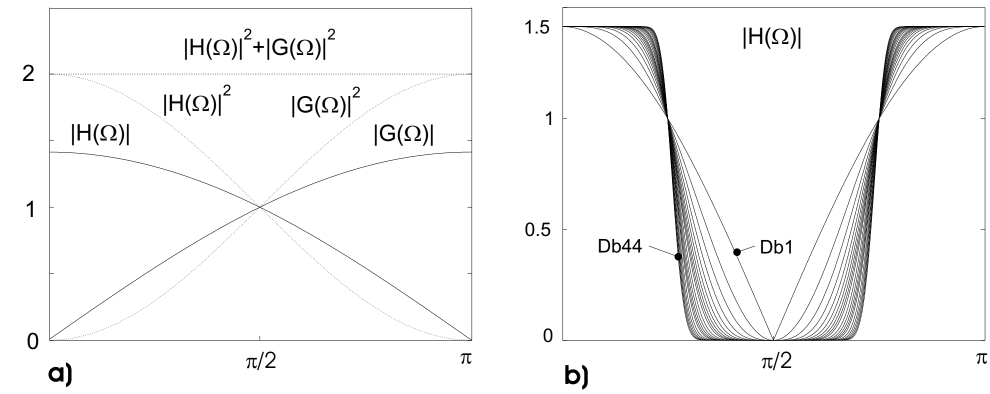
Vlastnosti			Pozn.
$\psi(t)$, $\varphi(t)$	$h(n)$, $g(n)$	$H(\Omega)$, $G(\Omega)$	
$\int \varphi(t)dt = 1$	$\sum_n h(n) = \sqrt{2}$	$H(0) = \sqrt{2}$	veta 2.1
$\int \varphi(t)\varphi(t-k)\,dt = \delta(k)$	$\sum_n h(n)h(n-2k) = \delta(k)$	$\lvert H(\Omega)\rvert^2 + \lvert H(\Omega+\pi)\rvert^2 = 2$	veta 2.2
$\sum_k \varphi(t-k) = \sum_k \varphi(k) = 1$	$\sum_n h(2n) = \sum_n h(2n+1)$	$H(\pi) = 0$	
$\int \psi(t)dt = 0$	$\sum_n g(n) = 0$	$G(0) = 0$	
$\int \varphi(t-k)\psi(t-m)\,dt = 0$	$g(n) = \pm(-1)^n h(M-n)$	$\lvert G(\Omega)\rvert = \lvert H(\Omega+M\pi)\rvert$	
	$\sum_n h(n)\,g(n-2k) = 0$	$\lvert H(\Omega)\rvert^2 + \lvert G(\Omega)\rvert^2 = 2$	
		$H(\Omega)G(2\pi-\Omega)+$ $+H(2\pi-\Omega)G(\Omega) = 0$	

Tabuľka 2.1. Základné vlastnosti $\psi(t)$, $\varphi(t)$, $h(n)$, $g(n)$, $H(\Omega)$, $G(\Omega)$ a ich súvislosti (v riadkoch sú ekvivialentné vlastnosti) pri ortogonálnych waveletových systémoch. Vo vzťahoch platí, $k, n \in \mathcal{Z}$ a M je nepárne.

- aby mohli byť splnené podmienky pre $h(n)$, treba aby dĺžka $h(n)$ (označme ju N) bola párna
- k danému waveletu existuje jediná funkcia mierky (a naopak)
- $h(n)$ a $g(n)$ sa navzájom jednoznačne určujú
- ak $h(n)$ spĺňa uvedené podmienky, sú zaručené iba základné vlastnosti ψ, φ (integrovateľnosť, ortonormalita, ...), pričom ψ, φ môžu mať extrémne neregulárny, prípadne fraktálový charakter
- regularita waveletu a k nemu náležiacej funkcie mierky je rovnaká (wavelet je konečná lineárna kombinácia $\varphi(2t-n)$, pozri vzťah (1.52))
- pri návrhu $h(n)$ s dĺžkou N, ostáva po splnení nutných $N/2+1$ podmienok ešte $N/2-1$ stupňov voľnosti. Tieto môžeme využiť tak, aby φ, ψ resp. $h(n)$, $g(n)$, mali požadované vlastnosti, ako napr. istú regularitu, aproximačné vlastnosti atď. Nutných $N/2+1$ podmienok je:
  - 1. podmienka: $\sum_n h(n) = \sqrt{2}$ kvôli existencii φ
  - N/2 podmienok kvôli ortonormalite φ:

$$\sum_n h(n)h(n-2k) = \delta(k) \qquad k = 0, 1, \ldots, N/2-1\,. \tag{2.3}$$

V prípade Haarovho waveletu sa dajú viaceré vlastnosti z tabuľky 2.1 pre $\psi(t)$, $\varphi(t)$ jednoducho overiť, napr. pomocou obr. 1.15. Pri vlastnostiach pre $h(n)$, $g(n)$ môže pomôcť maticový zápis DWT (pozri časť 1.7). Vlastnosti $H(\Omega)$, $G(\Omega)$ sú na príklade Haarovho waveletu zobrazené na obr. 2.2a. Na obr. 2.2b vidíme, ako sa odrazí rád waveletu resp. rast dĺžky postupnosti dilatačných koeficientov vo frekvenčnej oblasti.



Obr. 2.2. DTFT dilatačných koeficientov a ich vlastnosti: a) celková situácia pri Db1 (Haarov) wavelete b) vplyv rádu waveletu na frekvenčné vlastnosti koeficientov mierky pri systéme Daubechieovej waveletov

2.1.1 Kaskádové algoritmy, výpočet funkčných hodnôt φ a ψ v časovej a frekvenčnej oblasti

Ako vypočítať φ a ψ, ak poznáme koeficienty pre zmenu mierky?[3] Vychádzajme z dilatačných rovníc (1.51) (1.52). Tieto rovnice môžeme riešiť iteračne, pričom ak postupnosť bude konvergovať[4] k *pevnému bodu*, potom je pevný bod hľadaným riešením. Iterácie sú definované [23]:

$$\varphi^{(k+1)}(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n)\, \varphi^{(k)}(2t-n)\,. \tag{2.4}$$

Uvedený iteračný postup sa nazýva aj ***kaskádový algoritmus*** (v čase). Príklad použitia princípu tohoto algoritmu na generovanie funkcie mierky je znázornený na obr. 2.3.[5] Keď máme vypočítané φ, môžeme na základe (1.52) vypočítať aj ψ.

Hľadajme teraz riešenie dilatačných rovníc vo frekvenčnej oblasti. Aplikovaním Fourierovej transformácie na (2.4) dostaneme:

$$\Phi^{(k+1)}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} H_{mr}(\omega/2)\ \Phi^{(k)}(\omega/2)\,. \tag{2.5}$$

Použili sme pri tom normovanie[6] $\Omega = \omega$ a vlastnosť Fourierovej transformácie:

$$\varphi(2t-n) \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{2} e^{-j\omega n/2} \Phi(\omega/2)\,. \tag{2.6}$$

Rovnicou (2.5) je opísaný *kaskádový algoritmus* vo frekvencii. Ak rovnicu vyjadríme ako nekonečný súčin a hľadáme jeho limitu pre $k \to \infty$, dostávame:

$$\Phi(\omega) = \lim_{n\to\infty} \Phi^{(n)}(\omega) = \left[\prod_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} H_{mr}\left(\omega/2^k\right) \right] \right]\ \Phi^{\infty}(0)\,. \tag{2.7}$$

[3] Na základe tabuľky 2.1 vieme, že stačí $h(n)$, resp. $g(n)$.

[4] Postup nemusí konvergovať vždy.

[5] Použité je najjednoduchšie riešenie rekurzívnej konvolúcie a nadvzorkovania. Sofistikovanejšia diskrétna aproximácia je uvedená napr. v [23].

[6] $\Omega = \omega$ znamená, že koeficienty $h(n)$, $g(n)$ sú diskrétnymi vzorkami pri $f_{vz} = 1Hz$.

Použitím (1.52) a (2.6) môžeme vyjadriť $\Psi(\omega)$ ako:

$$\Psi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} G_{mr}(\omega/2) \left[\prod_{k=2}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} H_{mr}\left(\omega/2^k\right) \right] \right] \Phi^{\infty}(0). \tag{2.8}$$

Výsledok v oboch prípadoch (2.7), (2.8) nezávisí od tvaru $\varphi^{(0)}(t)$, ale iba od dilatačných koeficientov a od hodnoty $\Phi^{(\infty)}(0) = \int \varphi^{(k)}(t)\, dt = A_0 > 0$, ktorá je invariantná vzhľadom na iterácie. Z uvedených vzťahov vyplýva:

- aby sme nedospeli k sporu vo vzťahu (2.7) pri $\Omega = 0$, t. j. aby limita mohla existovať, musí platiť $H(\Omega)|_{\Omega=0} = \sqrt{2}$
- aby wavelet bol prípustný, t. j. $\Psi(\omega)|_{\omega=0} = 0$, pozri vzťah (1.10), musí platiť $G(\Omega)|_{\Omega=0} = 0$.

Aby vzťahy (2.7), (2.8) konvergovali a aby sme mali zaručenú aspoň minimálnu regularitu (pozri vzťah (1.19)) je *nutné*, aby $H(\Omega)$ malo nulový bod v $\Omega = \pi$. V opačnom prípade by sme mali nenulové hodnoty $\varphi(\omega)$ ľubovoľne vysoko vo frekvencii. Čím väčšieho rádu[7] má $H(\Omega)$ nulu v $\Omega = \pi$, tým rýchlejšie klesá $\Psi(\omega)$ a tým väčšiu regularitu môžeme dosiahnuť (je to nutná, nie postačujúca podmienka).

Príklad použitia kaskádového algoritmu vo frekvencii na generovanie funkcie mierky je znázornený na obr. 2.4. Vidíme, ako postupným násobením $H_{mr}\left(\omega/2^k\right)$ tlmíme výsledné $\Psi(\omega)$.

2.1.2 Interpretácia dilatačných koeficientov

V predchádzajúcej časti sme videli, že postupnosti $h_{mr}(n)$ a $g_{mr}(n)$ predstavujú kľúčový prvok pri generovaní waveletov a funkcií mierky, že určujú ich vlastnosti a hlavne, pomocou nich sa vykonáva výpočet waveletových radov a DWT rýchlym algoritmom. Ich vlastnosti sa principiálne zhodujú s vlastnosťami tzv. *impulzových charakteristík* číslicových filtrov z oblasti číslicového spracovania signálov (ČSS). Je vhodné ich aj takto interpretovať. Postupnostiam $h(n)$ s kompaktným nosičom (pozri vetu 3 na str.36) zodpovedajú KIO filtre (KIO = konečná impulzová odpoveď). Z vlastností $h_{mr}(n)$ a $g_{mr}(n)$ a ich DTFT, ktoré sú uvedené v tabuľke 2.1 vyplýva, že postupnostiam $h_{mr}(n)$ zodpovedajú DP (dolnopriepustné) a $g_{mr}(n)$ HP (hornopriepustné) KIO filtre. Aby sme viac priblížili vzťah medzi vlastnosťami waveletov a KIO filtrov, zavedieme si v ďalšej časti dôležitý koncept K-regulárnych filtrov.

2.1.3 Momentové vlastnosti a *K*-regulárne filtre

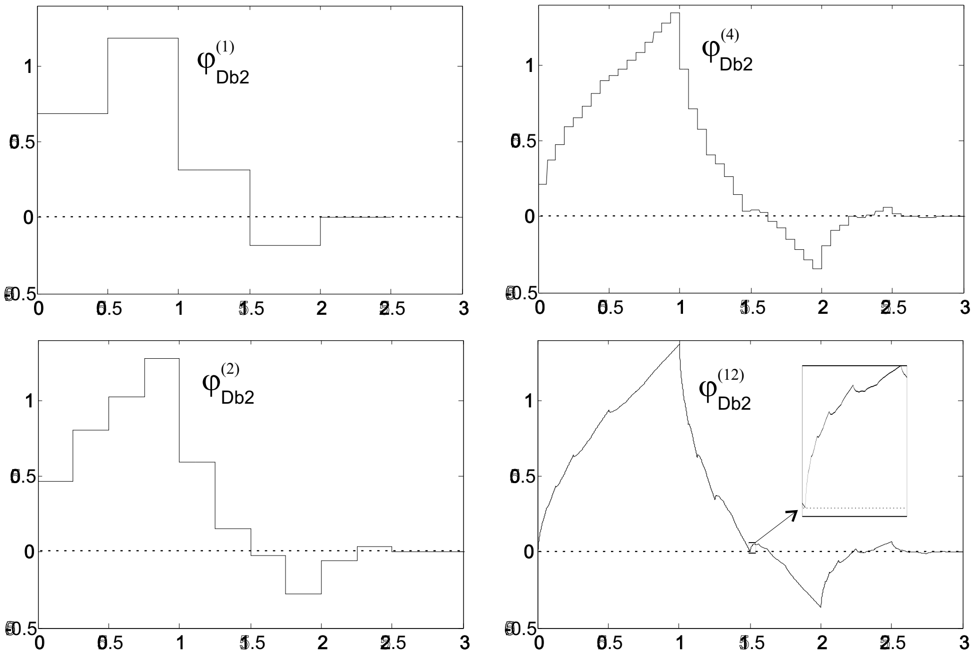
Spojité k-te momenty φ, ψ sú definované:

$$m_{\varphi}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} t^k \varphi(t) dt \quad m_{\psi}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} t^k \psi(t) dt. \tag{2.9}$$

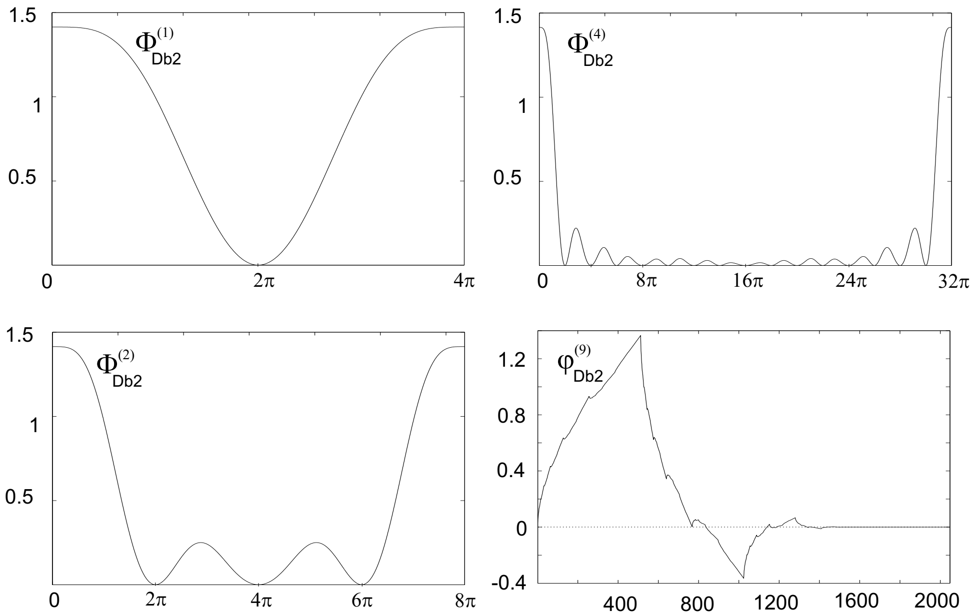
Diskrétne k-te momenty $h(n)$, $g(n)$ sú definované:

$$\mu_h(k) = \sum_n n^k h(n) \quad \mu_g(k) = \sum_n n^k g(n). \tag{2.10}$$

[7]Napríklad: $H(\Omega)$ v tvare $H(\Omega) = (\Omega - \pi)^K$ má v $\Omega = \pi$ nulu K-teho rádu.



Obr. 2.3. Generovanie funkcie mierky $\varphi_{Db2}(t)$ kaskádovým algoritmom v čase. Výpočet zobrazený po 1, 2, 4 a 12-ich iteráciách diskrétneho ekvivalentu vzťahu (2.4). Počiatočným signálom bola „Box“ funkcia definovaná vzťahom (2.23). Vpravo dole je zo zväčšeniny zrejmý fraktálový charakter $\varphi(t)$. Porovnajte s tvarmi bázových funkcií priestorov $\mathcal{V}_m$ na obr. 1.20



Obr. 2.4. Generovanie funkcie mierky k φ Db2 waveletu kaskádovým algoritmom vo frekvencii. Pre $\Phi^{n}_{Db2}(\omega)$, kde $n = 1, 2, 4$ predstavujúce aproximácie vzťahu (2.7) je zobrazená iba prvá perióda. Výsledná funkcia mierky je vypočítaná z $\Phi^{9}_{Db2}(\omega)$ vzorkovaním periódy na 2048 vzoriek a následnou IDFT.

Z diskrétnych momentov μ_h, μ_g môžeme vypočítať spojité momenty pomocou:

$$m_\varphi(k) = \frac{1}{(2^k-1)\sqrt{2}} \sum_{l=1}^{k} \binom{k}{l} \mu_h(l)\, m_\varphi(k-l) \tag{2.11}$$

$$m_\psi(k) = \frac{1}{2^k\sqrt{2}} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \mu_g(l)\, m_\varphi(k-l)\,. \tag{2.12}$$

Na začiatku výpočtu si treba uvedomiť, že $m_\varphi(0) = 1$.

Počet nulových momentov $m_\psi(k)$ dáva informáciu o plochosti $H(\Omega)$ a hladkosti ψ, ktoré rastú priamo úmerne. Okrem toho, čím viac waveletových momentov je nulových, tým lepšiu aproximáciu získame pri projekcii signálu $f(t) \in L^2(\mathcal{R})$ do $\mathcal{V}_m$.

Čo najväčší počet nulových momentov $m_\varphi(k)$ je dôležitý vtedy, ak pri počiatočnej aproximácii signálu $f(t) \in L^2(\mathcal{R})$ vo $\mathcal{V}_m$ použijeme priamo vzorky $f(t)$. Takisto sa zlepšuje aj symetria φ.

Dôležitý koncept, ktorý spája momentové vlastnosti, diferencovateľnosť, regularitu a vlastnosti dilatačných koeficientov, je koncept tzv. *K-regulárnych* filtrov. KIO filter s impulzovou odpoveďou $h(n)$, ktorá spĺňa podmienky v tabuľke 2.1 a generuje funkciu mierky $\varphi(t)$ sa nazýva ***K-regulárny*** vtedy, ak platia nasledovné *ekvivalentné* tvrdenia:

1. $H(\Omega)$ má K-násobnú *nulu* v $\omega = \pi$
2. prvých K diskrétnych aj spojitých waveletových momentov sa rovná nule, t. j.: $m_\psi(k) = 0$, $\mu_\psi(k) = 0$ pre $k = 0, 1, \ldots, (K-1)$
3. polynomické postupnosti stupňa $\leq (K-1)$ môžu byť vyjadrené lineárnou kombináciou posunov $h(n)$
4. polynómy stupňa $\leq (K-1)$ môžu byť vyjadrené lineárnou kombináciou posunov φ.

Ak je $h(n)$ K-regulárny, potom Z-transformáciu $h(n)$: $H(z) = \sum_n h(n)\, z^{-n}$ môžeme napísať v tvare:

$$H(z) = \left(\frac{1+z^{-1}}{2}\right)^K L(z)\,, \tag{2.13}$$

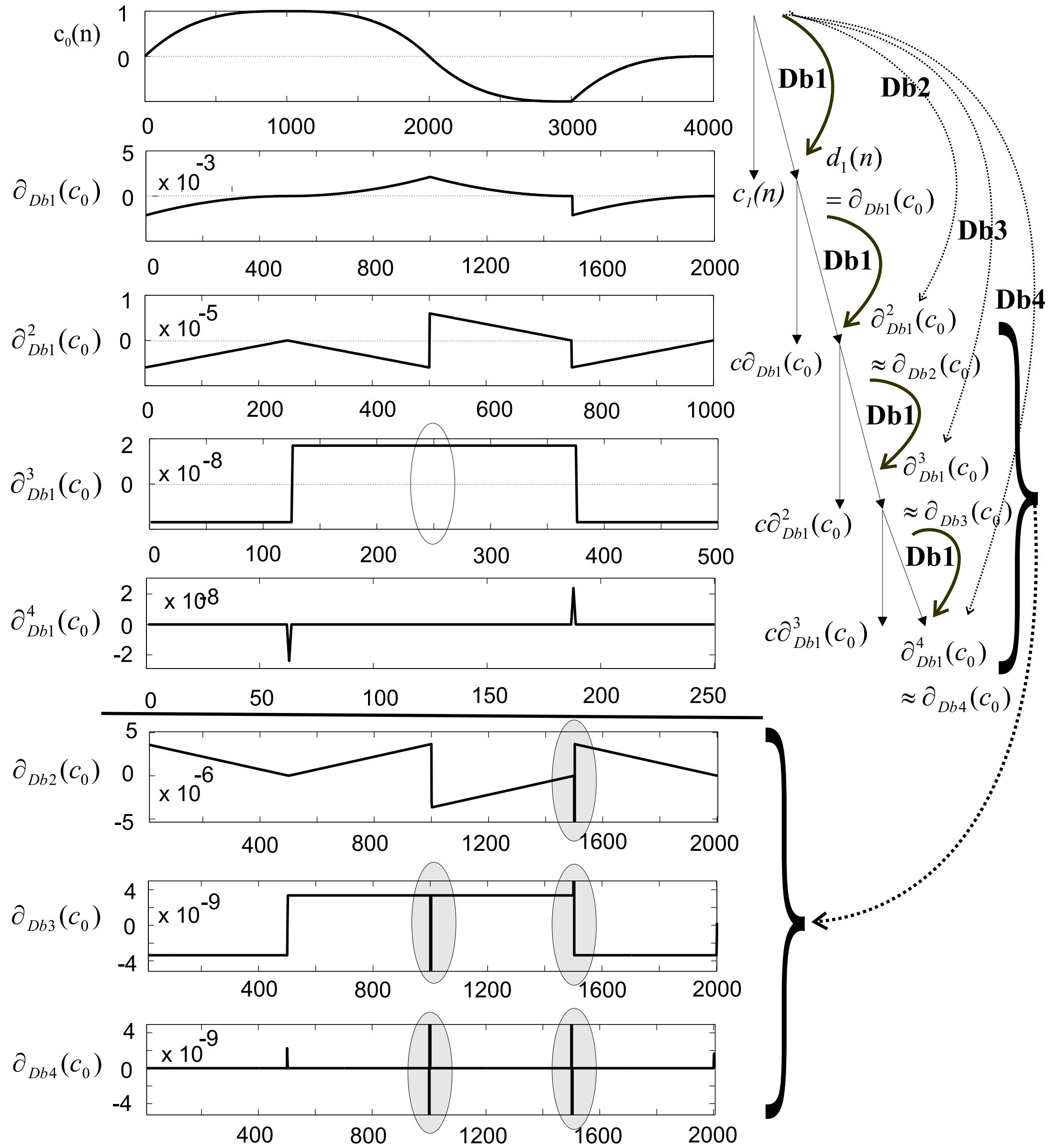
pričom $L(z)$ nemá žiadne póly v $z = e^{i\pi}$. Ak N je dĺžka filtra $h(n)$, potom polynóm $H(z)$ má stupeň $N-1$ a $L(z)$ stupeň $N-1-K$. Aby $L(z)$ zabezpečilo splnenie nutných $N/2$ podmienok pre ortogonalitu, musí mať aspoň stupeň $N/2-1$. Potom $K \leq N/2$. Zároveň z podmienky existencie φ automaticky platí, že $h(n)$ je aspoň $K = 1$ regulárne. Takže platí:

$$1 \leq K \leq N/2\,. \tag{2.14}$$

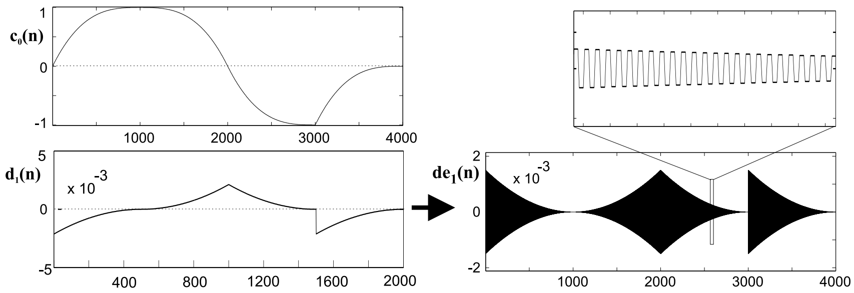
2.1.4 Wavelety ako diferenciálne operátory

Wavelety môžu slúžiť aj ako viacúrovňový derivátor (diferenciálny operátor) [33], [31]. Nech $h(n)$ je K-regulárny filter, generujúci $\varphi(t)$ a $\psi(t)$. Potom waveletové koeficienty zodpovedajú K-tej derivácii vyhladenej verzie analyzovaného signálu [33]:

$$\langle f(x), \psi(x-u)\rangle = \partial^K\{\gamma * f\}(u)\,, \tag{2.15}$$



Obr. 2.5. Schopnosť waveletov odhaľovať nespojitosť signálu a jeho derivácií. Pôvodný signál je kubický. Wavelet Db1 — waveletové koeficienty zodpovedajú prvej derivácii signálu (s opačným znamienkom) a je schopný detekovať iba nespojitosti signálu. Opakovanie postupu zodpovedá opakovaniu derivovania signálu. Db2 — waveletové koeficienty zodpovedajú 2. derivácii signálu a detekujú nespojitosť signálu aj v prvej derivácii. Db3 — . . . . Impulzy v sivo označených oblastiach reprezentujúce body nespojitosti majú veľkosť rádovo $10^2 - 10^5$ väčšiu ako je zobrazená oblasť. Prázdny ovál označuje zlyhanie Db1 pri zisťovaní nespojitosti (dôvodom je chýbajúce *prekrytie* waveletov Db1 pri DWT). Pozn.: Operácia diferencovania je prepísaná do diskrétneho tvaru použitím operátora $\partial^n_{DbK}(c_0)$. Operácia získania koeficientov mierky pri rozklade z koeficientov $\partial^n_{DbK}(c_0)$ je prepísaná ako operátor $c\partial^n_{DbK}(c_0)$.



Obr. 2.6. Waveletové koeficienty signálu $c_0(n)$ na prvej úrovni rozkladu a ich detail (de_1), pri použití Db1 waveletu. Rozliatie detailu je dôsledkom nedostatočnej regularity Db1. (t. j. na obr. 2.5 by nemali rozliaty detail iba koeficienty $\partial_{Db4}(c_0) \approx \partial^n_{Db1}(c_0)$)

kde vyhladzujúci operátor γ je definovaný vo frekvencii ako:

$$\Gamma(\omega) = \Psi^*(\omega)/(j\omega)^K \, . \tag{2.16}$$

Operátor γ má dolnopriepustný charakter, čím znižuje rušivé vplyvy z iných úrovní rozlíšenia signálu. Vzťah (2.15) nám teda vypovedá o schopnostiach lokalizovať nespojitosti signálov a ich derivácií.

Príklad analýzy nespojitostí signálu je na obr. 2.5. Postupným rozkladom kubického signálu pomocou Db1 (má 1 nulový moment) waveletu získavame waveletové koeficienty tvarovo zodpovedajúce negatívnej prvej derivácii predchádzajúceho signálu. Použitím Db2 (2 nulové momenty) dostávame koeficienty zodpovedajúce druhej derivácii, ... Vidíme, že použitím DbK waveletu môžeme zároveň spoľahlivo detekovať nespojitosti v prvých $K - 1$ deriváciách. Opakovaným rozkladom waveletových (!) koeficientov analyzujeme ďalších $K - 1$ derivácií signálu. Je dôležité uvedomiť si, že nenulový priebeh z waveletových koeficientov (pozri obr. 2.6) zodpovedá „rozliatemu" detailu signálu na danej úrovni rozlíšenia. To môžeme interpretovať ako nedostatočnú regularitu waveletu s následkom masívneho ukladania informácie v detailoch signálu. Vidíme, že pre kubické signály je dostatočne regulárny až Db4 wavelet, ktorý mal nenulové iba 3 (!) waveletové koeficienty, ktorými však zároveň zdetekoval všetky nespojitosti signálu aj jeho troch derivácií.

2.2 Biortogonálne wavelety a rozklad signálu

V predchádzajúcich častiach sme sa venovali waveletovým radom, AVR, DWT a ich vlastnostiam v prípade, že boli ortogonálne. Dôsledkom toho bolo, že wavelety a funkcie mierky použité pri rozklade a syntéze signálu boli rovnaké. Ak upustíme od ortogonality, tak sa funkcie pomocou ktorých signál rozkladáme a skladáme môžu výrazne líšiť.

V prípade SWT bola možnosť použiť na rozklad a rekonštrukciu 2 ľubovoľné wavelety spĺňajúce (1.13). Pri waveletových rámcoch stačilo na rekonštrukciu použiť *duálny rámec*, resp. ľubovoľný rámec spĺňajúci (1.25). Pri waveletových radoch môžeme namiesto ortogonálneho riešenia použiť riešenie biortogonálne (pozri časť 1.4.2) s dvomi základnými waveletmi $\psi(t)$ a $\tilde{\psi}(t)$. Pri pomalom výpočte biortogonálnych WR rozkladáme signál pomocou $\tilde{\psi}_{m,n}$ a skladáme pomocou $\psi_{m,n}$ (pozri vzťahy (1.23) a (1.22)). T. j. máme základný wavelet $\psi(t)$ a jeho *duál* $\tilde{\psi}(t)$ ku ktorým existujú funkcie mierky $\varphi(t)$ a $\tilde{\varphi}(t)$ také, že:

- množiny $\{\varphi_{m,n}(t)\}$ a $\{\tilde{\varphi}_{m,n}(t)\}$ tvoria bázy pre podpriestory $\mathcal{V}_m$ resp. $\tilde{\mathcal{V}}_m$
- množiny $\{\psi_{m,n}(t)\}$ a $\left\{\tilde{\psi}_{m,n}(t)\right\}$ tvoria bázy pre podpriestory $\mathcal{W}_m$ resp. $\tilde{\mathcal{W}}_m$.

V $L^2(\mathcal{R})$ potom existujú dve AVR s hierarchiami:

$$\dots \mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_{-1} \subset \mathcal{V}_{-2} \dots \tag{2.17}$$

$$\dots \tilde{\mathcal{V}}_2 \subset \tilde{\mathcal{V}}_1 \subset \tilde{\mathcal{V}}_0 \subset \tilde{\mathcal{V}}_{-1} \subset \tilde{\mathcal{V}}_{-2} \dots , \tag{2.18}$$

pričom platí že $\mathcal{W}_{m+1}$ je síce doplnkom k $\mathcal{V}_{m+1}$ v priestore $\mathcal{V}_m$, ale nie je to ortogonálny doplnok. $\mathcal{W}_{m+1}$ je namiesto toho ortogonálny doplnok k $\tilde{\mathcal{V}}_{m+1}$ v priestore $\mathcal{V}_{m+1}$. Analogicky $\tilde{\mathcal{W}}_{m+1}$ je ortogonálny doplnok k $\mathcal{V}_{m+1}$ v priestore $\tilde{\mathcal{V}}_m$. Vzájomné vzťahy medzi podpriestormi sa dajú geometricky znázorniť analogicky[8] k obr. 6.2b a obr. 6.3. Relácie zmeny mierky môžeme vyjadriť vzťahmi:

$$\tilde{\varphi}(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{h}_{mr}(n) \tilde{\varphi}(2t-n) \quad \varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n) \varphi(2t-n) \tag{2.19}$$

$$\tilde{\psi}(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{g}_{mr}(n) \tilde{\varphi}(n-2t) \quad \psi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{mr}(n) \varphi(n-2t) . \tag{2.20}$$

Vzťahy pre rýchlu implementáciu WR a DWT (porovnaj s (1.60)-(1.62)) sú v tvare:

$$c_{m+1}(n) = \sum_k \tilde{h}_{mr}(k-2n) c_m(k) \qquad d_{m+1}(n) = \sum_k \tilde{g}_{mr}(k-2n) c_m(k) \tag{2.21}$$

$$c_m(n) = \sum_k h_{mr}(n-2k) c_{m+1}(k) + \sum_k g_{mr}(n-2k) d_{m+1}(k) . \tag{2.22}$$

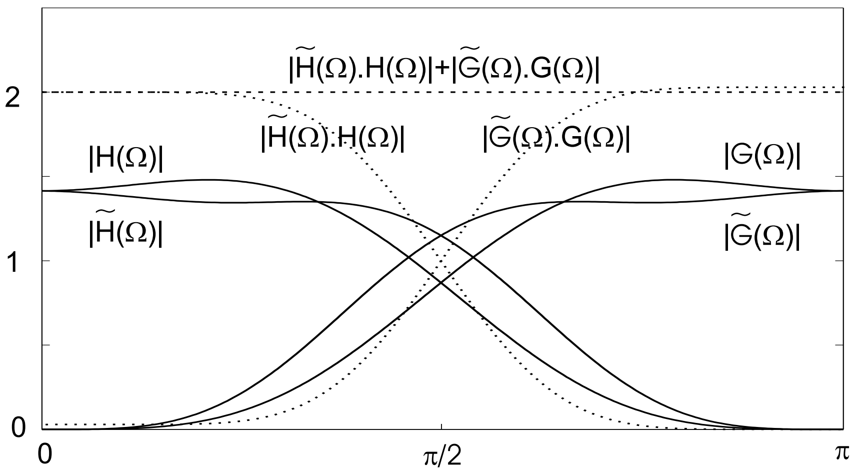
Kľúčom k pochopeniu uvedených formálnych zápisov je fakt, že ak chceme signál vyjadriť v priestoroch V_m, W_m, musíme robiť ortogonálne projekcie do príslušných $\tilde{V}_m$, $\tilde{W}_m$, pozri časť 6.4.5. Počiatočnú aproximáciu signálu v priestore $\mathcal{V}_m$ získame tak, že spravíme ortogonálnu projekciu do $\tilde{\mathcal{V}}_m$ a získanými súradnicami váhujeme nie bázové funkcie priestoru $\tilde{\mathcal{V}}_m$, ale $\mathcal{V}_m$. Ďalej rozkladáme signál v hierarchii priestorov $\tilde{\mathcal{V}}_m$ pomocou vzťahov (2.21), t. j. používame na to dilatačné koeficienty $\tilde{h}_{mr}$ a $\tilde{g}_{mr}$ z relácií zmeny mierky pre duálny wavelet $\tilde{\psi}(t)$ a funkciu $\tilde{\varphi}(t)$ mierky. Ak však chceme zistiť ako vyzerá nejaká aproximácia alebo detail na úrovni rozlíšenia m, musíme príslušnými koeficientmi $c_m(n)$ resp. $d_m(n)$ váhovať funkcie $\varphi_{m,n}(t)$ resp. $\psi_{m,n}(t)$. Signál spätne rekonštruujeme vzťahom (2.22), kde používame dilatačné koeficienty h_{mr} a g_{mr}.

Pri biortogonálnej DWT je situácia ešte jednoduchšia. Keďže počiatočná báza je postupnosť Kroneckerových impulzov, ktorej duálna báza je s ňou totožná, sú totožné aj diskrétne ekvivalenty priestorov $\mathcal{V}_0$ a $\tilde{\mathcal{V}}_0$. Ďalším rozkladom vzťahmi (2.21) iba postupujeme v hierarchiách $\tilde{\mathcal{V}}_m$ a $\mathcal{V}_m$. Funkcie, pomocou ktorých by sme sa ku spektrálnym koeficientom dostali priamo (skalárnym súčinom), sa podobajú čoraz viac na $\tilde{\psi}$ a $\tilde{\varphi}(t)$ a naše bázové funkcie sa podobajú čoraz viac na ψ a $\varphi(t)$.

Ako môžu vyzerať biortogonálne wavelety a ich funkcie mierky je zobrazené na obr. 2.8. Na ich jednoznačné generovanie kaskádovými algoritmami stačia ich koeficienty mierky. Ich DTFT a dôležité vlastnosti z toho vyplývajúce sú zobrazené na obr. 2.7.

Problém 2.1 *Ak sú diskrétne ekvivalenty priestorov $\mathcal{V}_0$ a $\tilde{\mathcal{V}}_0$ totožné, sú totožné aj diskrétne ekvivalenty priestorov $\mathcal{V}_m$ a $\tilde{\mathcal{V}}_m$? T. j. $\mathcal{V}_m$ a $\tilde{\mathcal{V}}_m$ majú iné bázové funkcie, ale sú z nich schopné vytvoriť tú istú sadu funkcií (majú ten istý lineárny obal)?*

[8] V 2D prípade jeden bázový vektor bude označovať aproximačný podpriestor s horšou aproximáciou a druhý bázový vektor bude diferenčný podpriestor. Ich priamym súčtom je rovina, t. j. aproximačný priestor s lepšou aproximáciou N-rozmerných vektorov.



Obr. 2.7. DTFT dilatačných koeficientov a ich vlastnosti pri biortogonálnom systéme s FBI 9/7 waveletom (totožný s „bior4.4“ systémom z obr. 2.8). Pre porovnanie s ortogonálnym systémom pozri obr. 2.2

Dilatačné koeficienty $h_{mr}(n)$	Názov zodpovedajúcej funkcie
$h_{S_0}(n) = (1,1)\,\frac{\sqrt{2}}{2}$	B-spline 0. rádu (konštantný)
$h_{S_1}(n) = (1,2,1)\,\frac{\sqrt{2}}{4}$	B-spline 1. rádu (lineárny)
$h_{S_2}(n) = (1,3,3,1)\,\frac{\sqrt{2}}{8}$	B-spline 2. rádu (kvadratický)
$h_{S_3}(n) = (1,4,6,4,1)\,\frac{\sqrt{2}}{16}$	B-spline 3. rádu (kubický)

Tabuľka 2.2. Dilatačné koeficienty $h_{mr}(n)$ pre výpočet Spline funkcií mierky kaskádovými algoritmami

2.3 *B*-Spline wavelety

Spline funkcie sú po častiach polynomické funkcie daného stupňa s plynulým prechodom medzi jednotlivými časťami. ***B-Spline*** funkcie $\varphi_{S_M}(t)$ stupňa M sú tvorené M-násobnou konvolúciou ***„Box“ funkcie***:

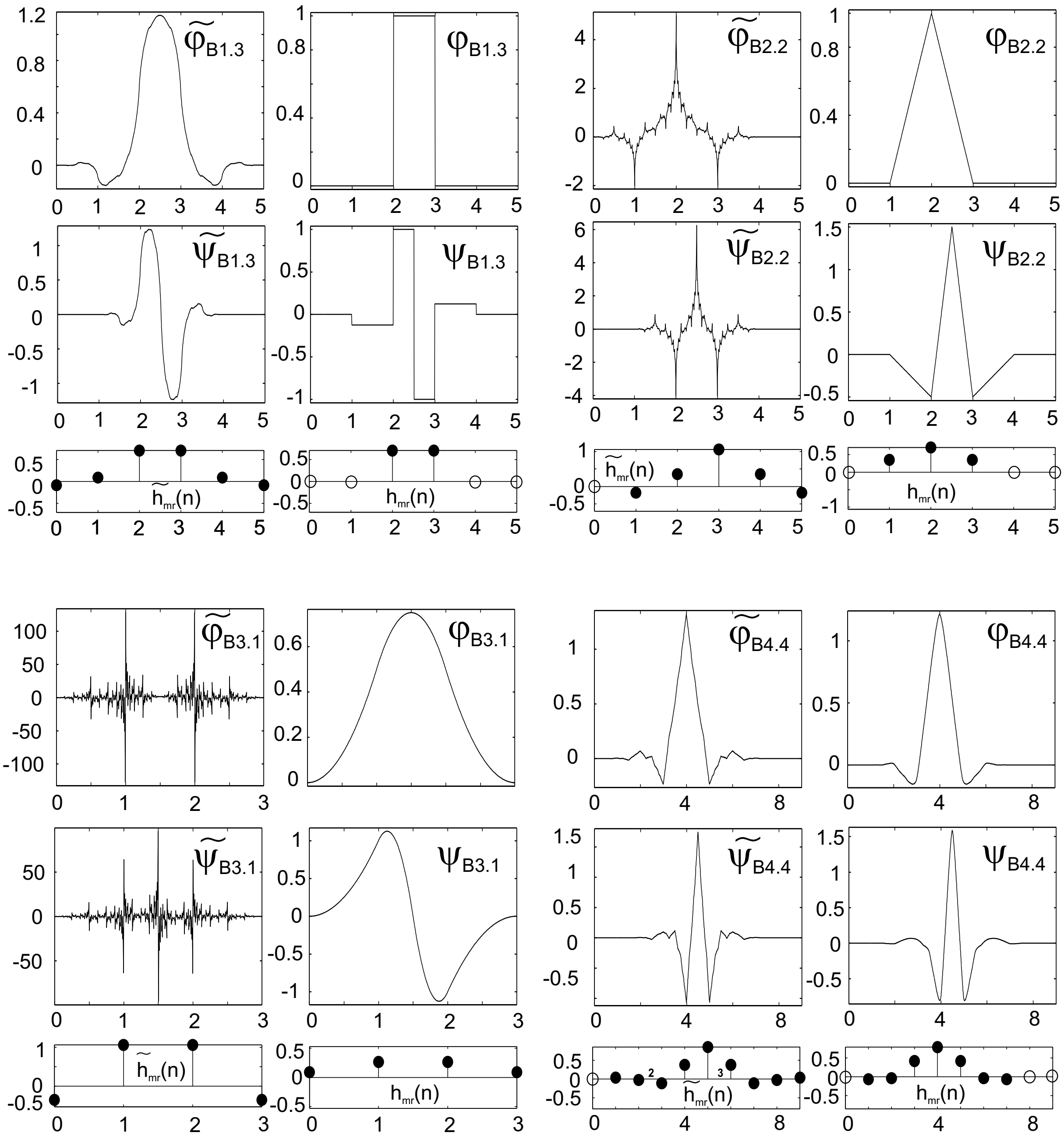
$$B(t) = \{ \begin{array}{cc} 1 & t \in \langle 0,1 \rangle \\ 0 & inde \end{array} . \tag{2.23}$$

B-spline funkcie sú *funkciami mierky* pre B-spline wavelety [23]. Majú kompaktný nosič na intervale $\langle 0, M+1 \rangle$ a $M-1$ spojitých derivácií. Platí: $\varphi_{S_0}(t) = B(t) = \varphi_{Haar}(t)$, takže $\varphi_{S_0}(t)$ môžeme generovať kaskádovými algoritmami pomocou Haarových koeficientov mierky $h(n) = (1,1)$. Ak chceme generovať B-spline funkcie vyššieho rádu, buď vykonáme M násobnú konvolúciu „Box“ funkcie, alebo použijeme kaskádové algoritmy s koeficientmi $h_{mr}(n) = h_{S_M}(n)$. Tieto koeficienty vytvárajú tzv. ***Pascalov trojuholník*** — vznikli M-násobnou konvolúciou postupnosti $h(n) = (1,1)$ a normovaním tak, aby ich súčet bol rovný $\sqrt{2}$ (pozri tabuľku 2.2).

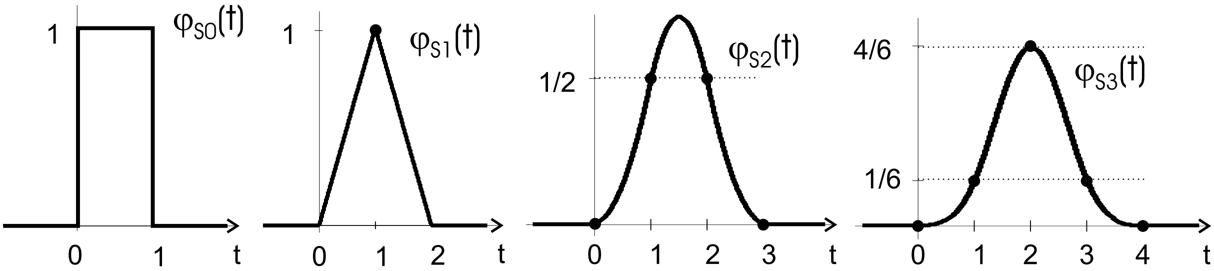
M-násobnej konvolúcii $h(n)$ zodpovedá v z-rovine násobenie, t.j:

$$H_{S_M}(z) = \sqrt{2}\left(\frac{1+z}{2}\right)^{M+1} . \tag{2.24}$$

Takže B-spline funkcie majú $K = M+1$ násobnú nulu v $z = -1$. Dĺžka $h_{S_M}(n)$ je $M+2$. Ďalej platí:



Obr. 2.8. Príklady biortogonálnych dvojíc waveletov ($\tilde{\psi}$,ψ), ich funkcií mierky ($\tilde{\varphi}$, φ) a zodpovedajúcich koeficientov mierky ($\tilde{h}_{mr}(n)$, $h_{mr}(n)$). Čísla v názvoch znamenajú počet nulových momentov waveletu a jeho duálu v danom biortogonálnom systéme. Všimnite si typicky rozdielny charakter funkcií použitých na rozklad ($\tilde{\psi}$, $\tilde{\varphi}$) a rekonštrukciu (ψ, φ). Taktiež vidíme zmenu charakteru waveletov a funkcií mierky (po častiach konštantné, lineárne, kvadratické, . . .) s rastom počtu waveletových nulových momentov a zodpovedajúci rast dĺžky postupností koeficientov mierky.



Obr. 2.9. B-Spline funkcie mierky stupňa 0 – 3 (t. j. konštantné, lineárne, kvadratické, kubické)

- $\int \varphi_{S_M}(t)dt = 1 \qquad \sum_n h_{S_M}(n) = \sqrt{2}$
- funkcie $\varphi_{S_M}(t)$ formujú bázy $\mathcal{V}_m$, lebo spĺňajú dilatačnú rovnicu (1.51). T. j. $\varphi_{S_M}(t)$ môžeme považovať za *funkcie mierky* (pozri obr. 2.9) a $h_{S_M}(n)$ za koeficienty mierky
- B-Spline funkcie majú symetrické $h(n)$ a symetrické bázové funkcie, preto nemôžu (okrem triviálneho prípadu) tvoriť ortogonálne systémy, t. j.

$$\langle \varphi_{S_M}(t), \varphi_{S_M}(t+k) \rangle = a(k) \qquad a(k) \neq \delta(k)\ , \tag{2.25}$$

takže pomocou B-spline funkcií môžeme tvoriť iba semiortogonálne resp biortogonálne waveletové systémy.

2.3.1 Ortogonálne spline wavelety (Battle-Lemarie wavelety)

Z predchádzajúcej časti vyplýva, že ak chceme získať ortogonálny systém, nemôžeme použiť B-spline funkcie ako funkcie mierky priamo. Musíme ich najprv *ortogonalizovať*. Používa sa ortogonalizácia vo frekvenčnej oblasti [21]. Po ortogonalizácii $\varphi_{S_M}(t)$ stratia symetriu a budú zčasti aj záporné.

2.3.2 Semiortogonálne spline wavelety

Semiortogonálne wavelety $\{\psi_{S_M,m,n}(t)\}$ tvoria neortogonálne bázy $\mathcal{W}_m$, pre ktoré platí:

$$\mathcal{V}_m \perp \mathcal{W}_m \quad \mathcal{V}_m = \mathcal{V}_{m+1} \oplus \mathcal{W}_{m+1}\,. \tag{2.26}$$

V AVR existuje len jedna hierarchia aproximačných podpriestorov:

$$\{0\} \ldots \subset \mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_{-1} \subset \mathcal{V}_{-2} \ldots L^2(\mathcal{R})\,. \tag{2.27}$$

Oproti biortogonálnemu prípadu to znamená, že:

$$\mathcal{V}_m = \tilde{\mathcal{V}}_m \quad \mathcal{W}_m = \tilde{\mathcal{W}}_m\,. \tag{2.28}$$

Pri B-spline rádu M vypočítame koeficienty $g_{mr}(n)$ z koeficientov $h_{mr}(n)$ nasledovne:

$$g_{mr}(n) = \pm(-1)^n h_{mr}(M+1-n)\, a_M(M+1-n)\ , \tag{2.29}$$

kde

$$a_M(k) = \langle \varphi_{S_M}(t), \varphi_{S_M}(t+k) \rangle \ , \tag{2.30}$$

pre ktoré platí

$$a_M(k) = 2^{M+1/2} h_{S(M+2)}(k) \ . \tag{2.31}$$

Ak $g_{mr}(n)$ a $h_{mr}(n)$ majú konečnú dĺžku, potom dilatačné koeficienty duálov majú dĺžku nekonečnú (a naopak).

2.3.3 Biortogonálne spline wavelety

Množiny $\{\varphi_{S_M,m,n}(t)\}$ tvoria neortogonálne bázy $\mathcal{V}_m$ a $\{\psi_{S_M,m,n}(t)\}$ neortogonálne bázy $\mathcal{W}_m$ tak, aby výsledná štruktúra podpriestorov bola biortogonálna, s vlastnosťami podľa časti 2.2. Biortogonálne spline wavelety sú známe aj pod názvom CDF (Cohen-Daubechies-Feauveau) wavelety [23]. Konkrétny spôsob ich návrhu je uvedený v časti 3.5. Vyznačujú sa tým, že menovatele ich dilatačných koeficientov sú mocninou čísla 2, pozri vzťah (3.58).

2.4 Druhy a návrh ortogonálnych waveletov

V doterajšom texte sme sa stretli s viacerými druhmi ortogonálnych waveletov s kompaktným nosičom. V tejto časti prehľad mierne doplníme a uvedieme aj niektoré najjednoduchšie metódy ich návrhu. Najznámejšie ortogonálne wavelety sú:

- *Haarov wavelet* — triviálny prípad waveletu s minimálnym nosičom. Nespojitý v čase, symetrický, s nulovou regularitou, pravý opak Sinc waveletu (pozri tabuľku 1.1 a obr. 1.8), historicky najstarší wavelet
- ***Daubechieovej (Db) wavelety*** — ortogonálne wavelety, ktoré majú maximálny počet nulových momentov pri danej dĺžke filtra [18], označujú sa ako ***maximálne hladké***
- *Battle-Lemarie wavelety* — ortogonalizované Spline wavelety
- ***Coiflety*** — ortogonálne wavelety [23], ktorých návrh je založený na momentových vlastnostiach φ, ψ. Snažíme sa nulovať momenty waveletu a rovnako aj funkcie mierky. Pre Coiflet L-teho rádu platí
- ***Symlety*** — ortogonálne wavelety, ktoré majú minimálnu asymetriu a maximálny počet nulových momentov pri danej dĺžke filtra [18]:

$$m_\varphi(k) = 0 \quad m_\psi(k) = 0 \quad k = 1, 2, \ldots, L-1 \ . \tag{2.32}$$

Medzi najznámejšie metódy návrhu a konštrukcie waveletov patria:

- Ortogonalizácia (napr. Battle-Lemarie wavelety)
- Parametrizácia koeficientov mierky
- Spektrálna faktorizácia[9] — návrh waveletov s K nulovými waveletovými momentmi (napr. Daubechieovej wavelety)

[9]Spektrálnou faktorizáciou sú navrhované aj biortogonálne wavelety.

- návrh waveletov liftingovou schémou, pozri kapitolu 5.

Návrh pomocou spektrálnej faktorizácie a parametrizácie koeficientov mierky si ukážeme v nasledujúcich častiach.

2.4.1 Parametrizácia koeficientov mierky

Jednoduchým využitím stupňov voľnosti v (2.3) môžeme navrhovať základné ortonormálne wavelety. Splníme nutné podmienky na ortonormalitu a zvyšok môžeme parametrizovať [23]:

- Systém 0. rádu — dĺžka $h(n)$ je 2. Nemá žiadne stupne voľnosti. Podmienky sú:

$$h(0) + h(1) = \sqrt{2} \qquad h(0)^2 + h(1)^2 = 1\,. \tag{2.33}$$

  Riešením je:

$$h(n) = \left\{\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}/2\right\}\,. \tag{2.34}$$

- 1. rádu — dĺžka $h(n)$ je 4. Má jeden stupeň voľnosti, ktorý môžeme parametrizovať parametrom α. Podmienky sú:

$$\begin{aligned} h(0) + h(1) + h(2) + h(3) &= \sqrt{2} \\ h(0)^2 + h(1)^2 + h(2)^2 + h(3)^2 &= 1 \\ h(0)\,h(2) + h(1)\,h(3) &= 0\,. \end{aligned} \tag{2.35}$$

  Riešením je:

$$h(0) = (1 - \cos(\alpha) + \sin(\alpha))\Big/\left(2\sqrt{2}\right) \quad h(1) = (1 + \cos(\alpha) + \sin(\alpha))\Big/\left(2\sqrt{2}\right) \tag{2.36}$$

$$h(3) = (1 + \cos(\alpha) - \sin(\alpha))\Big/\left(2\sqrt{2}\right) \quad h(2) = (1 - \cos(\alpha) - \sin(\alpha))\Big/\left(2\sqrt{2}\right)\,. \tag{2.37}$$

  Pozn:
  Ak $\alpha = 0,\ \pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2$ dostávame koeficienty mierky pre Haarov wavelet. Ak $\alpha = \pi/3 \rightarrow$ dostávame koeficienty mierky pre Daubechieovej wavelet s 2 nulovými momentmi (Db2).

- rádu R — dĺžka $h(n)$ je $2R + 2$, má R stupňov voľnosti.

Parametrizáciou získané riešenia majú zaručenú iba minimálnu regularitu. Vhodnou voľbou parametrov však môžeme dosiahnuť zlepšenie vlastností, prípadne ekvivalenciu (pri danej dĺžke $h(n)$) s ľubovoľným iným ortogonálnym waveletovým systémom.

2.4.2 Návrh waveletov s *K* nulovými momentmi

Metódy návrhu waveletov s K nulovými momentmi využívajú koncept K-regulárnych filtrov. V tejto časti uvádzame metódu (Daubechieová 1992) [18] na výpočet koeficientov mierky, ktoré generujú ortogonálne waveletové systémy s K nulovými momentmi waveletov.

Veta 2.4 *Nech $H(\Omega)$, DTFT postupnosti $h(n)$ s dĺžkou N má K núl v $\Omega = \pi$ a je v tvare:*

$$H(\Omega) = \sqrt{2}\left(\frac{1+e^{i\Omega}}{2}\right)^K L(\Omega)\ . \tag{2.38}$$

Potom $H(\Omega)$ spĺňa podmienku $|H(\Omega)|^2 + |H(\Omega+\pi)|^2 = 2$ vtedy a len vtedy, ak

$$|L(\Omega)|^2 = Q\left(\sin^2(\Omega/2)\right)\ , \tag{2.39}$$

kde

$$Q(y) = \sum_{k=0}^{K-1} \binom{K-1+k}{k} y^k + y^K R(1/2-y) \tag{2.40}$$

a $R(y)$ je antisymetrický polynóm taký, že $Q(y) \geq 0$ pre $y \in \langle 0, 1\rangle$.

Dôkaz: *Pozri napr. [23].*

Podľa tvrdenia 1 na str.41, je $h(n)$ impulzovou charakteristikou K-regulárneho filtra[10]. Ak $R(y) = 0$, potom dostávame wavelety s maximálnym počtom nulových momentov $K = N/2$, tzv. Daubechieovej wavelety nazývané aj „maximálne hladké“ ortogonálne wavelety. Ak $N > 2K$, potom $R(y)$ nám vyjadruje stupne voľnosti, ktoré môžeme použiť na modifikáciu vlastností waveletov.

Ako použiť vetu 2.4 na návrh waveletov? Naše požiadavky sformulujeme pomocou vhodného $R(y)$ a K. Následne vypočítame $Q(y)$ a spravíme substitúciu $y = \sin^2(\Omega/2)$. Pri tej je vhodnejšie použiť priamo ekvivalent v z-rovine (pri $z = e^{j\Omega}$):

$$\sin^2(\Omega/2) = \frac{1}{2}(1-\cos(\Omega)) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\left(e^{i\Omega} + e^{-i\Omega}\right)\right) = -\frac{1}{4}z + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z^{-1}\,. \tag{2.41}$$

Tým sa dostávame k ťažisku metódy a to je, ako nájsť $L(z)$ pri danom $Q(z)$, ak platí:

$$|L(z)|^2 = Q(z)\,. \tag{2.42}$$

Riešenie vzťahu (2.42) nie je jednoznačné. $L(z)$ získame tzv. *spektrálnou faktorizáciou* $Q(z)$ [22], [21], ktorú si vysvetlíme v nasledujúcej časti. Výsledné $H(z)$ dostaneme potom pomocou vzťahu (2.38). Konečné vyjadrenie $h(n)$ je triviálne.

Autokorelácia a spektrálna faktorizácia.

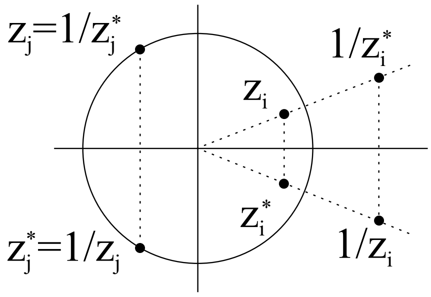
Autokoreláciou postupnosti $h(n)$ budeme nazývať postupnosť [21]:

$$p(n) = \langle h(k), h(k-n)\rangle\ . \tag{2.43}$$

Použitím DTFT dostávame:

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(n)\, e^{-i\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\, h^*(k-n)\, e^{-i\Omega n} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} h^*(k-n)\, e^{i\Omega(k-n)}\right) e^{-i\Omega k} = H^*(\Omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-i\Omega k} = \\ &= H^*(\Omega)\, H(\Omega) = |H(\Omega)|^2\ . \end{aligned} \tag{2.44}$$

[10] Aby sme dostali jeho prenosovú funkciu v obvyklom, kauzálnom tvare (2.13), stačí ju vynásobiť faktorom z^{-2K}.



Obr. 2.10. Príklady núl v z-rovine a poloha ich konjugácií a inverzií

T. j. $P(\Omega)$ je *reálna nezáporná* funkcia. Vyjadrením v z-rovine dostaneme:

$$P(z) = H_*\left(z^{-1}\right) H(z) \ , \tag{2.45}$$

kde dolný index $*$ znamená konjugáciu koeficientov, nie celej funkcie. Zo vzťahu (2.45) vidíme, že ak z_k je nula $P(z)$, potom nula je aj $1/z_k^*$, t. j. nuly sa vyskytujú iba v dvojiciach:

$$\{z_k, 1/z_k^*\} \, . \tag{2.46}$$

Naviac, ak $h(n)$ je reálne a $H(z)$ má nulu v z_k, potom nuly sú aj v z_k^*, $1/z_k$, $1/z_k^*$. Pre zobrazenie uvedených závislostí v z-rovine pozri obr. 2.10.

Predpokladajme, že pre dané $P(z)$ hľadáme vyhovujúce $H(z)$. Také $H(z)$ nazývame ***spektrálny faktor*** $P(z)$ a metódu jeho získania ***spektrálnou faktorizáciou*** [21], [22]. Spektrálne faktory nie sú jednoznačne určené a získame ich priradením vždy iba jednej nuly z dvojíc núl (2.46) do $H(z)$. Prepíšme $P(z)$ do tvaru [21]:

$$P(z) = \alpha \prod_{k=1}^{N_a} \left(\left(1 - z_{k_a} z^{-1}\right) (1 - z_{k_a}^* z)\right) \prod_{k=1}^{N_b} \left(\left(1 - z_{k_b} z^{-1}\right) \left(1 - z_{k_b}^* z\right)\right), \tag{2.47}$$

kde N_a je počet párov núl *na* jednotkovej kružnici (platí $|z_{a_k}| = 1$) a N_b je počet párov núl *mimo* jednotkovej kružnice (používame $|z_{b_k}| < 1$). Do $H(z)$ priradíme po jednej nule z každého z uvedených párov. Možné výsledné $H(z)$ majú rovnakú magnitúdovú charakteristiku, líšia sa iba vo fázovej charakteristike. Dôležité je riešenie s ***minimálnou fázou*** [7], kde pri vytváraní $H(z)$ použijeme iba nuly *v* a *na* jednotkovej kružnici. Potom:

$$H(z) = \sqrt{\alpha} \prod_{k=1}^{N_a} \left(1 - z_{a_k} z^{-1}\right) \prod_{k=1}^{N_b} \left(1 - z_{b_k} z^{-1}\right). \tag{2.48}$$

Aby koeficienty $h(n)$ boli reálne, musia sa vybrané nuly vyskytovať v komplexne združených pároch. Táto podmienka je pri návrhu ortogonálnych waveletových systémov zahrnutá vo vete 2.4, t. j. v tvare vstupného polynómu na faktorizáciu.

Príklad 2.1 *Zistite koeficienty $h(n)$, pre Daubechieovej wavelety s minimálnou fázou, ak $N = 6$.*

Riešenie: *Chceme max. počet nulových momentov, t. j. $K = 3$, $R = 0$.*
Potom

$$Q(y) = 1 + 3y + 6y^2 \tag{2.49}$$

a následne

$$Q(z) = \frac{3}{8}z^2 - \frac{9}{4}z^1 + \frac{19}{4} - \frac{9}{4}z^{-1} + \frac{3}{8}z^{-2} \tag{2.50}$$

$$\frac{8}{3}z^2 Q(z) = z^4 - 6z^3 + \frac{38}{3}z^2 - 6z^1 - 6z^0 . \tag{2.51}$$

Nájdeme nulové body

$$\begin{array}{ll} z_0 = 0.28725 - 0.15289i & z_1 = 2.71275 + 1.44389i = 1/z_0 \\ z_2 = 0.28725 + 0.15289i = z_0^* & z_3 = 2.71275 - 1.44389i = 1/z_0^* \end{array}$$

a pomocou nich spätne vyjadríme $Q(z)$

$$Q(z) = \tfrac{3}{8}z^{-2} \quad (z - z_0)(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = \tag{2.52}$$

$$= \tfrac{3}{8}z^{-2} \quad [z - (0.28725 - 0.15289i)]\,[z - (0.28725 + 0.15289i)] \tag{2.53}$$

$$[z - (2.71275 + 1.44389i)]\,[z - (2.71275 - 1.44389i)] \; . \tag{2.54}$$

Úpravami (prvé dva členy na pravej strane vynásobíme z^{-1}*, z druhých vyjmeme* z_2 *resp.* z_3*) dostávame:*

$$Q(z) = \alpha \quad \left[1 - z^{-1}(0.28725 - 0.15289i)\right]\left[1 - z^{-1}(0.28725 + 0.15289i)\right] \tag{2.55}$$

$$[1 - z/(2.71275 + 1.44389i)]\,[1 - z/(2.71275 - 1.44389i)] \; , \tag{2.56}$$

kde

$$\alpha = \frac{3}{8}(2.71275 + 1.44389i)(2.71275 - 1.44389i) = \frac{3}{8}9.443814 . \tag{2.57}$$

Vytvorme faktor s minimálnou fázou:

$$L_{min}(z) = \sqrt{\alpha}\left[1 - (0.28725 - 0.15289i)z^{-1}\right]\left[1 - (0.28725 + 0.15289i)z^{-1}\right] . \tag{2.58}$$

Potom:

$$H_{\min}(z) = \sqrt{2}\left(\frac{1+z}{2}\right)^3 L_{\min}(z) \; , \tag{2.59}$$

čo je numericky

$$H_{\min}(z) = \{0.33267z^3 + 0.80689z^2 + 0.45988z - 0.13501 - 0.08544z^{-1} + 0.03523z^{-2}\} . \tag{2.60}$$

Tento výsledok zodpovedá nekauzálnemu filtru. Kauzalitu dosiahneme vynásobením $H_{min}(z)$ *faktorom* z^{-3}*, t. j. oneskorením* $h(n)$ *o 3 takty. Potom*

$$h(n) = \{0.33267, 0.80689, 0.45988, -0.13501, -0.08544, 0.03523\} . \tag{2.61}$$

Pri výbere faktoru s maximálnou fázou by sme dostali:

$$H_{\max}(z) = 0.03523z^5 - 0.08544z^4 - 0.13501z^3 + 0.45988z^2 + 0.80689z^1 + 0.33267 , \tag{2.62}$$

t. j. otočenú a posunutú verziu filtra s minimálnou fázou.

Kapitola 3

Banky filtrov a viacrýchlostné systémy

V tejto kapitole sa budeme venovať problematike, ktorá súvisí s waveletmi (a s rozkladmi signálu všeobecne) v kontexte číslicového spracovania signálov. Od základných operácií postupne prejdeme k systémom, ktoré umožňujú počítať waveletovú transformáciu a jej rôzne modifikácie. Zároveň získavame jednoduché metódy na návrh waveletov a ich adekvátne použitie pri spracovaní signálov. Všetky uvedené možnosti získavame zavedením tzv. *bánk filtrov* (BF) [17], [21], [22]. Ich základným prvkom sú ***číslicové filtre*** [7], čo sú diskrétne systémy umožňujúce potláčať resp. meniť zložky signálu, t. j. signál ***filtrovať***.

Banky filtrov sú príkladom ***viacrýchlostných*** (VR) systémov (z angl. „multirate systems"), kde sú *vzorky signálu* spracovávané v častiach systému s rôznymi *vzorkovacími frekvenciami*. Zmeny vzorkovacej frekvencie sú uskutočnené operáciami *decimácie* a *interpolácie*. Všetky operácie vo VR systémoch môžeme ekvivalentne opisovať paralelne v časovej resp. frekvenčnej oblasti a z-rovine. Väčšinou budeme v ďalšom texte voliť opis v z-rovine (a to najmä pri komplikovanejších systémoch).

3.1 Základné operácie vo viacrýchlostných systémoch

V tejto časti predpokladajme, že VR systémy sú *lineárne* a *časovo invariantné* systémy [7]. Za základné operácie vo VR systémoch by sme mohli označiť nasledovné [17] (pozri obr. 3.1):

- ***filtrácia*** — konvolúcia signálu s impulzovou charakteristikou *číslicového filtra*

$$x(n) = s(n) * h(n) = \sum_k s(k)\, h(n-k) \qquad (3.1)$$

$$X(z) = S(z)H(z)\,, \qquad (3.2)$$

  kde $s(n)$ je vstupný, $x(n)$ výstupný signál, $h(n)$ impulzová charakteristika číslicového filtra a $S(z)$,$Y(z)$,$H(z)$ ich obrazy v z-rovine

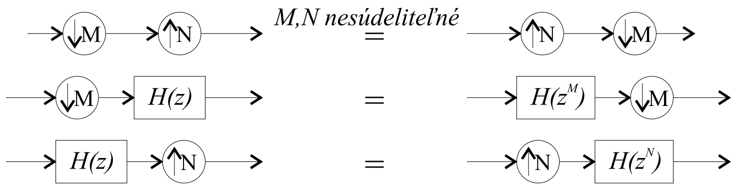
- ***podvzorkovanie*** — proces pri ktorom z pôvodného signálu zachovávame iba každú M-tú vzorku

- ***nadvzorkovanie*** — proces pri ktorom vkladáme $M-1$ nulových vzoriek medzi každé 2 vzorky pôvodného signálu

- ***decimácia*** je proces redukcie vzorkovacej frekvencie celočíselným faktorom M. Najprv je signál $s(n)$ frekvenčne obmedzený ***antialiasingovým***[1] prípadne ideálym DP filtrom s hranicou prepúšťania $\Omega_0 = \pi/M$ a impulzovou charakteristikou

[1] Antialiasingový filter je filter, ktorý zabezpečí, aby pri následnom podvzorkovaní signálu nevznikol (význačný) *aliasing*.

Obr. 3.1. Schématické označenie operácií vo VR systémoch a) decimácia b) interpolácia



Obr. 3.2. Základné ekvivalencie vo VR systémoch

$h(n)$ a potom je *podvzorkovaný*. Výsledok po decimácii je:

$$y\left(n\right)=\sum_{k}h\left(Mn-k\right)s\left(k\right)\ . \tag{3.3}$$

- ***interpolácia*** je proces zvýšenia vzorkovacej frekvencie signálu celočíselným faktorom M. Signál $x(n)$ je najprv *nadvzorkovaný* a následne vyhladený filtrom (napr. ideálnym DP s $\Omega_0 = \pi/M$) s impulzovou charakteristikou $g(n)$. Výsledný signál po interpolácii je:

$$v\left(n\right)=\sum_{k}g\left(n-Mk\right)x\left(k\right)\ . \tag{3.4}$$

Uvedené operácie sú znázornené na obr. 3.1. Platia pre ne základné ekvivalencie, ktoré sú znázornené na obr. 3.2 a je dôležité uvedomiť si ich platnosť. V ďalších častiach sa budeme tejto problematike venovať podrobnejšie.

3.1.1 Podvzorkovanie signálu

Pri podvzorkovaní s faktorom M vyberáme zo vstupného signálu $x(n)$ iba každú M-tú vzorku. Pre výstupný signál $y(n)$ platí

$$y(n) = x(Mn)\,. \tag{3.5}$$

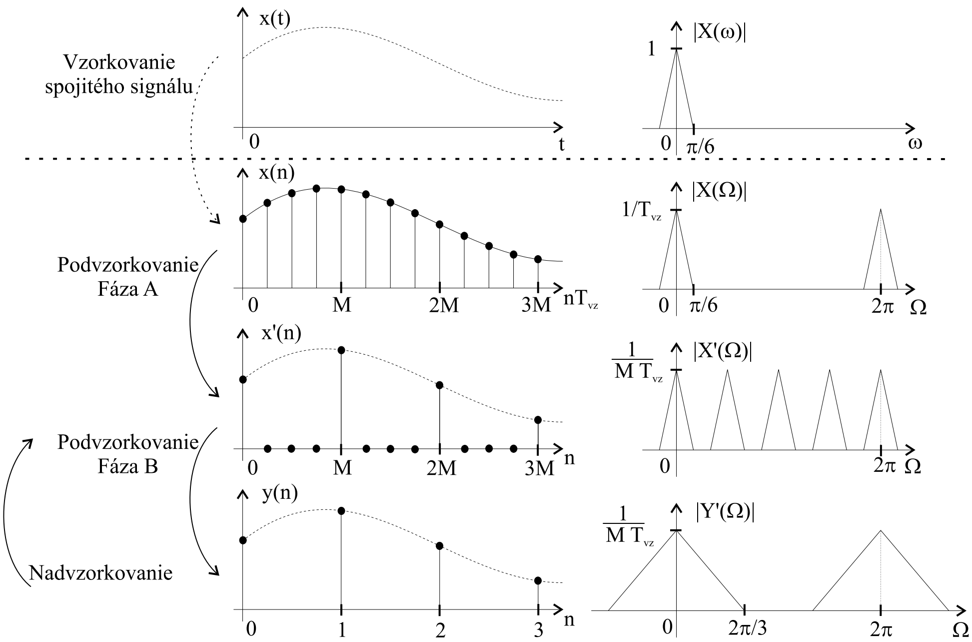
Vo frekvenčnej oblasti je podvzorkovanie znázornené (pre $M = 4$) na obr. 3.3. Proces podvzorkovania $x(n)$ môžeme popísať v dvoch fázach:

- **Fáza A** — vynulovanie nepotrebných zložiek (násobenie Kroneckerovými impulzami)

$$x'\left(n\right)=x\left(n\right)\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta\left(n-rM\right)=x\left(n\right)\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}e^{j\frac{2\pi}{M}nk}\,. \tag{3.6}$$

Z-transformáciou dostaneme:

$$X'\left(z\right)=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}Z\left\{x\left(n\right)\ \left(e^{j\frac{2\pi}{M}k}\right)^{n}\right\}=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}X\left(zW^{k}\right), \tag{3.7}$$



Obr. 3.3. Vplyv podvzorkovania a nadvzorkovania s faktorom $M = 4$ vo frekvenčnej oblasti. Vidíme, že ak by signál pred podvzorkovaním nebol frekvenčne obmedzený minimálne na $\Omega_{max} = \pi/4$ dochádzalo by k zlievaniu obrazov spektra signálu — ***aliasingu***. Hore je zobrazený aj prechod zo spojitej do diskrétnej oblasti pomocou vzorkovania. Platí $\Omega = \omega T_{vz}$, kde T_{vz} je vzorkovacia perióda.

kde $W = e^{-j2\pi/M}$. Tomu zodpovedá frekvenčná charakteristika (pri $z = e^{j\Omega}$)

$$X'(\Omega) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} X\left(\Omega - \frac{2\pi}{M}k\right), \tag{3.8}$$

t. j. vo výslednom spektre pribudlo $M-1$ posunutých obrazov pôvodného spektra.

- **Fáza B** — zmena mierky (M-násobné natiahnutie v čase a stiahnutie vo frekvencii)

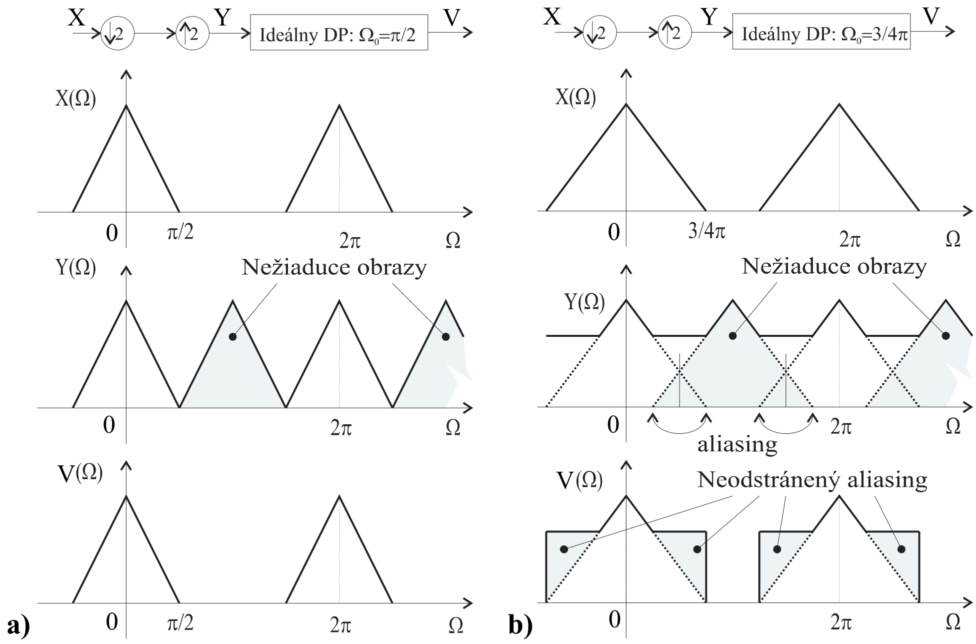
$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x'(Mn)z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{k} x'(k)\left(z^{\frac{1}{M}}\right)^{-k} = X'\left(z^{\frac{1}{M}}\right) \tag{3.9}$$

$$Y(\Omega) = X'(\Omega/M)\ . \tag{3.10}$$

Výsledkom podvzorkovania teda je:

$$Y(z) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} X\left(z^{\frac{1}{M}}W^k\right) \qquad Y(\Omega) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} X\left(\frac{\Omega - 2k\pi}{M}\right), \tag{3.11}$$

t. j. člen s $k = 0$ je M-násobne natiahnutou verziou spektra pôvodného signálu a ostatných $M-1$ členov sú posunuté obrazy nultého člena. Úlohou ***decimačného filtra*** je zabezpečiť, aby sa tieto obrazy s pôvodným spektrom *nezliali*, t. j. aby nevznikol tzv. ***aliasing***, resp. zliali tak, aby sme použitím doplnkovej informácie mohli zliatie odstrániť.



Obr. 3.4. Decimácia a interpolácia signálu pri $M = 2$ ak vstupný signál $X(\Omega)$ je **a**) dostatočne a **b**) nedostatočne obmedzený decimačným filtrom. Pri nedostatočne obmedzenom signáli vznikne aliasing, ktorý nevieme bez dodatočnej informácie eliminovať.

3.1.2 Nadvzorkovanie signálu a interpolačný filter

Pri nadvzorkovaní signálu vkladáme medzi jeho vzorky zakaždým $M - 1$ nulových vzoriek. Teda pre vstupný signál $x(n)$ je výstup daný:

$$y(n) = \begin{cases} x(n/M) & \text{ak} \quad n \; mod \; M = 0 \\ 0 & \text{ináč.} \end{cases} \tag{3.12}$$

Proces je opačný ako pri fáze B podvzorkovania, t. j. na intervale vznikne $M - 1$ obrazov spektra pôvodného signálu $x(n)$:

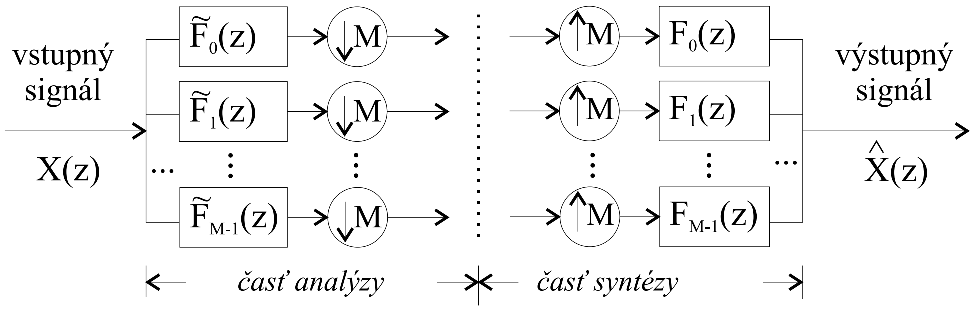
$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n/M) z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{k} x(k) \left(z^M\right)^{-k} = X\left(z^M\right) \tag{3.13}$$

$$Y(\Omega) = X(M\Omega) \; . \tag{3.14}$$

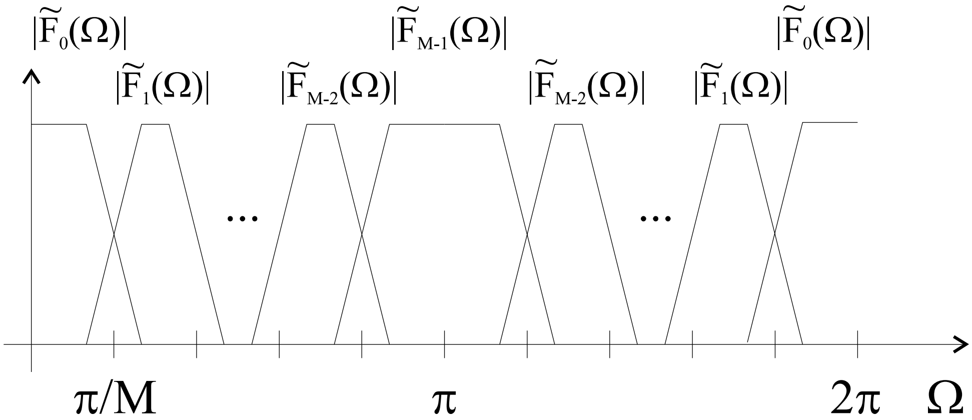
Úlohou ***interpolačného filtra*** je odstrániť týchto $M - 1$ obrazov.

3.1.3 Decimácia s následnou interpoláciou

Vidíme, že po decimácii a následnej interpolácii vieme bezchybne zrekonštruovať iba signál, ktorý bol pred podvzorkovaním frekvenčne ohraničený po $\Omega_0 = \pi/M$. Ináč vzniká aliasing, ktorý nevieme (ak nemáme k dispozícii ďalšiu informáciu) odstrániť. Celá situácia je zobrazená na obr. 3.4. Ako zrekonštruovať signál, keď nemáme k dispozícii ani ideálne filtre na jeho ohraničenie? Riešením je Banka filtrov (BF).



Obr. 3.5. Všeobecná schéma M-pásmovej banky filtrov s *kritickým podvzorkovaním* (v každom pásme je použité podvzorkovanie faktorom M, t. j. celkový počet vzoriek ostáva stále rovnaký)



Obr. 3.6. Schématické znázornenie typického rovnomerného delenia frekvenčného pásma na subpásma pri M-pásmovej banke filtrov s kritickým podvzorkovaním

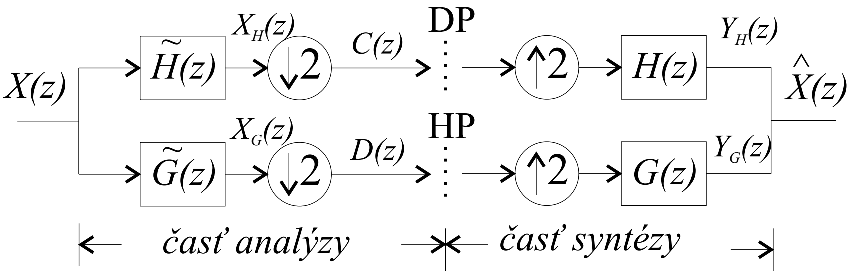
3.2 Banka filtrov

Banka filtrov (BF) je sústava, v ktorej filtre, použité v operáciach decimácie a interpolácie, umožňujú signál rozložit (tzv. ***analýza***) na *subpásma* a spätne zložiť (tzv. ***syntéza***).

Všeobecná schéma M-pásmovej banky filtrov s ***kritickým podvzorkovaním*** (z analyzačnej časti banky filtrov vychádza toľko vzoriek, koľko do nej vstupuje) je zobrazená na obr. 3.5. Signál je najprv rozdelený filtrami pre *analýzu* $\tilde{F}_k$ na M častí (subpásiem) a následne podvzorkovaný. Signál rekonštruujeme nadvzorkovaním subpásiem s následnou interpoláciou filtrami pre *syntézu* F_k a sčítaním interpolovaných signálov

Ak je výstupný signál identický so vstupným, potom hovoríme, že BF má vlastnosť ***perfektnej (úplnej) rekonštrukcie***. Keďže v BF používané filtre nie sú ideálne, vzniká pri analýze aliasing. Ten je však možné v konečnom súčte pri syntéze eliminovať, ak prenosové funkcie filtrov pre analýzu $\tilde{F}_k(z)$ a syntézu $F_k(z)$ spĺňajú isté podmienky (pozri ďalšiu časť).

Najčastejšie je v BF používané rovnomerné rozdelenie na subpásma v tvare na obr. 3.6. Najjednoduchším prípadom BF sú dvojpásmové BF, ktoré (ako neskôr uvidíme) zodpovedajú dyadickým waveletovým systémom.



Obr. 3.7. Základná schéma dvojpásmovej banky filtrov

3.3 Dvojpásmové banky filtrov

V dvojpásmovej banke filtrov je signál delený filtrami pre analýzu na dve časti, pričom jeden z filtrov má zvyčajne dolnopriepustný (DP) a druhý hornopriepustný (HP) charakter. Celková schéma dvojpásmovej banky filtrov je na obr. 3.7.

Popisom signálov v čase použitím vzťahu (3.3) pre decimáciu dostávame:

$$c\,(n) = \sum_k \tilde{h}\,(2n-k)\,x\,(k) \qquad d\,(n) = \sum_k \tilde{g}\,(n-2k)x\,(k)\ . \tag{3.15}$$

Analogicky, pomocou vzťahu (3.4) môžeme syntetizačnú časť BF popísať ako:

$$\hat{x}\,(n) = \sum_k h\,(n-2k)c\,(k) + \sum_k g\,(n-2k)d\,(k)\ . \tag{3.16}$$

Porovnajme tento výsledok zo vzťahmi (1.60), (1.62), alebo radšej so vzťahmi pre výpočet biortogonálnych WR a DWT (2.21), (2.22):

$$\begin{aligned} c_{m+1}\,(n) &= \sum_k \tilde{h}_{mr}\,(k-2n)\,c_m\,(k) \qquad\qquad d_{m+1}\,(n) = \sum_k \tilde{g}_{mr}\,(k-2n)\,c_m\,(k) \\ c_m\,(n) &= \sum_k h_{mr}\,(n-2k)\,c_{m+1}\,(k) + \sum_k g_{mr}\,(n-2k)\,d_{m+1}\,(k)\,. \end{aligned}$$

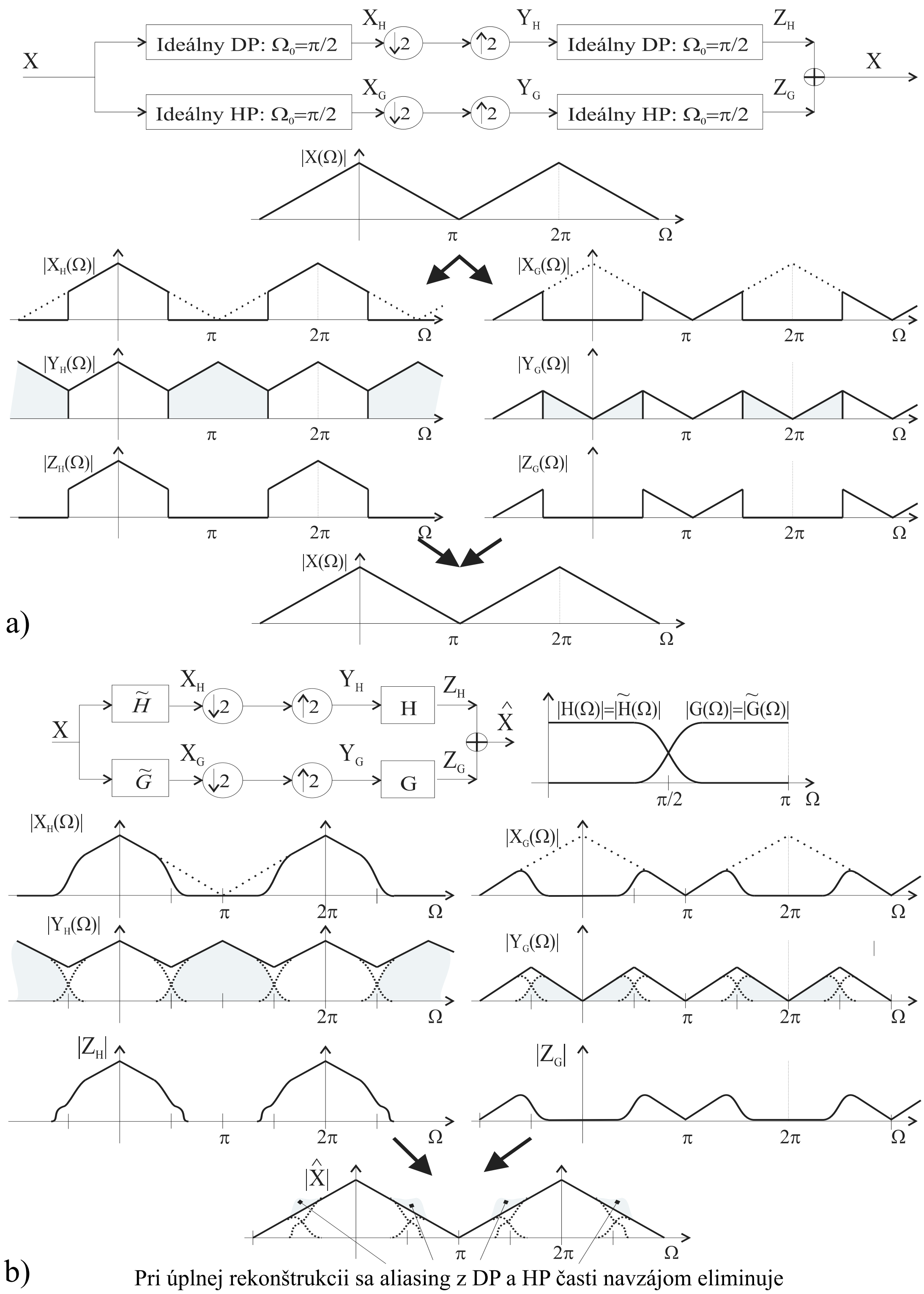
Vzťahy sú si podobné už na prvý pohľad. Pri podrobnejšom porovnaní zistíme, že analýza a syntéza v dvojpásmovej banke filtrov je *ekvivalentná* jednému stupňu rozkladu a rekonštrukcii signálu pri WR a DWT, ak platí:

$$\tilde{h}\,(n) = \tilde{h}_{mr}\,(-n) \qquad h\,(n) = h_{mr}\,(n) \tag{3.17}$$

$$\tilde{g}\,(n) = \tilde{g}_{mr}\,(-n) \qquad g\,(n) = g_{mr}\,(n)\ . \tag{3.18}$$

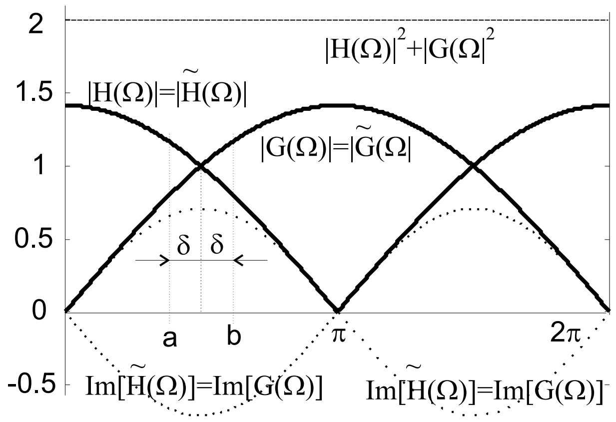
T. j. pri analýze je treba použiť časovo obrátené postupnosti duálnych dilatačných koeficientov. Potom budú vzťahy matematicky ekvivalentné. To ale znamená že podmienky na úplnú rekonštrukciu v banke filtrov formulované v kontexte ČSS musia mať svoj ekvivalent, formulovaný v podmienkach pre waveletové systémy.

Analyzujme teraz bližšie, za akých podmienok nám v dvojpásmovej BF dochádza k úplnej rekonštrukcii. Predpokladajme, že máme k dispozícii (reálne neexistujúce) ideálne DP a HP filtre. Zodpovedajúca BF je zobrazená na obr. 3.8a. Filtráciami vždy odstránime nepotrebnú polovicu spektra a pri pod- a nadvzorkovaní sa spektrá práve zaplnia, takže nevznikajú žiadne problémové situácie. „Väčšinou“ však máme k dispozíicii reálne filtre, ktoré po podvzorkovaní vytvárajú väčší či menší aliasing. Situácia je zobrazená na obr. 3.8b. Po nadvzorkovaní signály v oboch vetvách ostanú „zliate“, t. j.



Obr. 3.8. Realizácia dvojpásmovej banky filtrov pomocou **a)** ideálnych a **b)** reálnych filtrov a problém aliasingu

drobná deformácia signálu v oboch vetvách ostane aj po interpolačnom filtrovaní. Ak má BF úplnú rekonštrukciu, požadujeme, aby sa tieto deformácie pri konečnom súčte navzájom eliminovali. Filtre teda musia vytvárať deformácie vhodným spôsobom, ktorý elimináciu umožňuje.



Obr. 3.9. Frekvenčné charakteristiky filtrov v BF realizujúcej Haarovu DWT

Akým spôsobom sa aliasing eliminuje? Zoberme si najjednoduchší príklad, ktorým je Haarov wavelet (elementárny hrebeňový filter). Na základe (1.54), (1.55) a (3.17) môžeme v z-rovine písať:

$$\tilde{H}(z) = \tilde{H}_{mr}\left(z^{-1}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+z) \qquad H(z) = H_{mr}(z) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+z^{-1}\right) \tag{3.19}$$

$$\tilde{G}(z) = \tilde{G}_{mr}\left(z^{-1}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-z) \qquad G(z) = G_{mr}(z) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-z^{-1}\right). \tag{3.20}$$

Zodpovedajúce prenosové charakteristiky sú znazornené na obr. 3.9. Pokúsme sa teraz zistiť, aký bude prenos signálu $X(\Omega)$ sústavou v bode $X(a)$. Označme $F(\Omega) = \tilde{H}(\Omega)$. Z toho vyplýva:

$$H(\Omega) = F^*(\Omega) \qquad G(\pi/2 \pm \delta) = F(\pi/2 \mp \delta) \qquad \tilde{G}^*(\pi/2 \pm \delta) = F(\pi/2 \mp \delta)\,. \tag{3.21}$$

Potom platí (overte si, že to tak skutočne je):

	Po 1. filtrácii	po pod- a nadvzorkovaní	po 2. filtrácii
DP vetva	$X(a)F(a)$	$\frac{1}{2}\left[X(a)F(a)+X(a)F^*(b)\right]$	$\frac{1}{2}F^*(a)\left[X(a)F(a)+X(a)F^*(b)\right]$
HP vetva	$X(a)F^*(b)$	$\frac{1}{2}\left[X(a)F^*(b)+X(b)F^{(}a)\right]$	$\frac{1}{2}F^*(b)\left[X(a)F(a)+X(a)F^*(b)\right]$

Po konečnom sčítaní bude výsledkom:

$$\hat{X}(a) = X(a)\underbrace{\frac{1}{2}\left[F^*(a)F(a)+F^*(b)F(b)\right]}_{\text{prenos signálu}} + X(b)\underbrace{\frac{1}{2}\left[F^*(a)F^*(b)+F(a)F(b)\right]}_{\text{prenos aliasingu}}. \tag{3.22}$$

Prenos signálu bude jednotkový, lebo platí $|F(a)|^2 + |F(b)|^2 = 2$, pozri obr. 3.9. Aký je prenos aliasingu ľahko zistíme jeho vyjadrením v exponenciálnom tvare:

$$\text{aliasing} = X(b)\frac{1}{2}\left[|F_a|e^{-j(\pi/2-\delta)} * |F_b|e^{-j(\pi/2+\delta)} + |F_a|e^{j(\pi/2-\delta)} * |F_b|e^{j(\pi/2+\delta)}\right] = \tag{3.23}$$

$$= X(b)\frac{1}{2}\left[|F_a||F_b|e^{-j\pi} + |F_a||F_b|e^{j\pi}\right] = 0\,, \tag{3.24}$$

t. j. dostali sme výsledok v súlade so vzťahmi v tabuľke 2.1. To, za akých podmienok sa aliasing eliminuje a banka filtrov dosahuje úplnú rekonštrukciu je analyzované v časti 3.3.2. Najskôr však objasníme pojem *polpásmový filter*, ktorý budeme pri riešení týchto podmienok potrebovať.

3.3.1 Polpásmové a energeticky komplementárne filtre

Pri dvojpásmových bankách filtrov má dôležitú úlohu tzv. ***polpásmový filter***. Je to taký KIO filter s impulzovou charakteristikou $p(n)$ a prenosovou funkciou $P(z)$, pre ktorý platia nasledovné ekvivalentné podmienky [22]:

- v z-rovine
$$P(z) = P\left(z^{-1}\right) \quad P(z) + P(-z) = 2 \tag{3.25}$$
- vo frekvencii
$$P\left(e^{j\Omega}\right) = P\left(e^{-j\Omega}\right) \quad P\left(e^{j\Omega}\right) + P\left(e^{j(\Omega+\pi)}\right) = 2 \tag{3.26}$$
- v čase
$$p(n) = p(-n) \quad p(n) + (-1)^n p(n) = 2\delta(n)\,. \tag{3.27}$$

T. j. $P\left(e^{j\Omega}\right)$ je *reálna párna* funkcia Ω s nepárnou symetriou okolo bodu $\pi/2$. Zodpovedajúca impulzová charakteristika $p(n)$ je symetrická a platí pre ňu:

$$p(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \text{ je párne a } n \neq 0 \\ p(n) \in \mathcal{R} & n \text{ je nepárne }. \end{cases} \tag{3.28}$$

S polpásmovým filtrom úzko súvisí pojem tzv. ***energeticky komplementárnych*** filtrov. Filtre s prenosovými funkciami $H(z)$ a $G(z)$ nazývame *energeticky komplementárne*, ak platí:

$$\left|H\left(e^{j\Omega}\right)\right|^2 + \left|G\left(e^{j\Omega}\right)\right|^2 = 2\,. \tag{3.29}$$

3.3.2 Podmienky na úplnú rekonštrukciu

Pokúsme sa vyjadriť celkový prenos signálu bankou filtrov. Popisom signálov v oboch vetvách BF podľa obr. 3.7 s využitím vzťahov (3.11), (3.13) dostávame:

$$X_H(z) = X(z)\tilde{H}(z) \quad X_G(z) = X(z)\tilde{G}(z) \tag{3.30}$$

$$C(z) = \frac{1}{2}\left[X_H\left(z^{\frac{1}{2}}\right) + X_H\left(-z^{\frac{1}{2}}\right)\right] \quad D(z) = \frac{1}{2}\left[X_G\left(z^{\frac{1}{2}}\right) + X_G\left(-z^{\frac{1}{2}}\right)\right] \tag{3.31}$$

$$Y_H(z) = C\left(z^2\right)H(z) \quad Y_G(z) = D\left(z^2\right)G(z) \tag{3.32}$$

$$\hat{X}(z) = Y_H(z) + Y_G(z) = \ldots = \frac{1}{2}\left[R_p(z)X(z) + R_a(z)X(-z)\right], \tag{3.33}$$

kde $R_p(z)$ charakterizuje celkový prenos sústavou a $R_a(z)$ aliasing a sú v tvare:

$$R_p(z) = \tilde{H}(z)H(z) + \tilde{G}(z)G(z) \quad R_a(z) = \tilde{H}(-z)H(z) + \tilde{G}(-z)G(z)\,. \tag{3.34}$$

Postačujúce podmienky na úplnú rekonštrukciu (resp. neskreslený prenos) [21], [17] sú:

- aliasing musí byť eliminovaný
$$R_a(z) = 0 \tag{3.35}$$
- prenos je konštantný, pričom je povolené oneskorenie signálu
$$R_p(z) = 2z^{-l} \qquad l \in \mathcal{Z}\,. \tag{3.36}$$

Riešením podmienky eliminácie aliasingu (3.35) dostaneme riešenie v tvare:
$$H(z) = \pm cz^m \tilde{G}(-z) \quad G(z) = \mp cz^m \tilde{H}(-z)\ , \tag{3.37}$$
t. j. podmienky platia pre páry filtrov „do kríža". Hľadajme teraz riešenie podmienky na prenos (3.36). Označme $P_H(z) = \tilde{H}(z)\,H(z)$ a pomocou riešenia (3.37) vyjadrime podmienku (3.36) v závislosti od $P_H(z)$:
$$P_H(z) - P_H(-z)(-1)^m = 2z^{-l}\,. \tag{3.38}$$
Normovaním (centrovaním) $P_H(z)$ pomocou $P(z) = z^l P_H(z)$ dostávame výsledný tvar podmienky na celkový prenos sústavou:
$$P(z) + P(-z)(-1)^{m+l+1} = 2\,, \tag{3.39}$$
kde
$$P(z) = z^l \tilde{H}(z)\,H(z) \qquad P(-z) = z^l \tilde{G}(z)\,G(z)\ . \tag{3.40}$$
Vzťah (3.39) umožňuje formulovať podmienku na úplnú rekonštrukciu pomocou konceptu polpásmových filtrov (pozri vzťah 3.26) nasledovne:

> *Ak normovaný súčin prenosových funkcií DP filtrov v dvojpásmovej BF tvorí prenosovú funkciu polpásmového filtra a súčet m+l je nepárny, potom BF dosahuje úplnú rekonštrukciu.*

Ako využiť získaný výsledok pri návrhu bánk filtrov je vysvetlené v časti 3.5. Základom je získať vhodný polpásmový filter. Pre danú $P(z)$ a pre želané celkové oneskorenie l ľahko vypočítame potrebný posun m. Ak napríklad požadujeme sústavu s nulovým oneskorením $l = 0$, musí byť posun m medzi filtrami pre analzýzu a syntézu nepárny.

V nasledujúcej časti uvedieme najznámejšie riešenia dvojpásmových bánk filtrov. Všimnite si, ako je ošetrené splnenie podmienky (3.39).

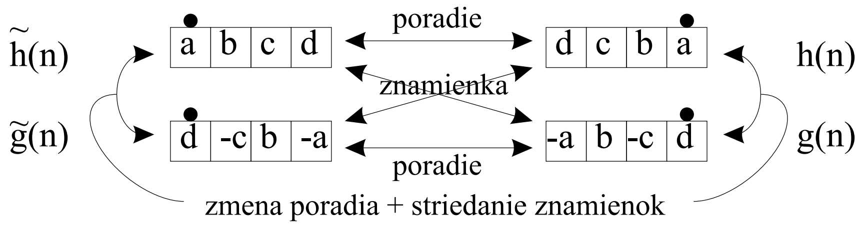
3.3.3 Riešenia dvojpásmových bánk filtrov

V predchádzajúcej časti sme si uviedli príklad všeobecného riešenia dvojpásmovej banky filtrov. Teraz si uvedieme konkrétne riešenia, ktoré sa používali, resp. používajú.

Riešenie vo forme kvadratúrnych zrkadlových filtrov (QMF)

Kvadratúrne zrkadlové filtre (QMF — Quadrature Mirror Filters) boli v bankách filtrov prvýkrát použité v r. 1977 (Esteban, Galand) voľbou:
$$H(z) = \tilde{H}(z) \quad \tilde{G}(z) = \tilde{H}(-z) \quad G(z) = -\tilde{H}(-z)\ . \tag{3.41}$$
Aliasing je odstránený, avšak takáto banka filtrov podmienku na prenos (3.36) iba aproximuje, t. j. nedosahuje úplnú rekonštrukciu.[2] Názov kvadratúrne zrkadlové filtre pochádza z vlastnosti, že $\tilde{H}(z)$ a $\tilde{G}(z)$ majú zrkadlové prenosové funkcie okolo $\Omega = \pi/2$, pričom sú *energeticky komplementárne*.

[2] Okrem trivialneho Haarovho prípadu.



Obr. 3.10. Príklad impulzových charakteristík filtrov a ich vzájomných závislostí v *ortogonálnej* BF s nulovým oneskorením. Bodkou sú označené koeficienty pri $n = 0$.

Ortogonálne (paraunitárne) riešenie

Nech $H_0(z)$ je prenosová funkcia a $h_0(n)$ impulzová charakteristika (s párnou dĺžkou $N = 2l$, $l \in \mathcal{Z}$) prototypového DP KIO filtra. Potom BF z neho odvodená vzťahmi:

$$\tilde{H}(z) = H_0(z) \quad H(z) = \pm z^{2l-1}\tilde{G}(-z) = \tilde{H}\left(z^{-1}\right) \tag{3.42}$$

$$\tilde{G}(z) = \mp z^{-(2l-1)}\tilde{H}\left(-z^{-1}\right) \quad G(z) = \mp z^{2l-1}\tilde{H}(-z) = \tilde{G}\left(z^{-1}\right) \tag{3.43}$$

dosahuje úplnú rekonštrukciu, ak pre $h_0(n)$ platí:

$$\sum_n h_0(n)h_0(n-2k) = \delta(k) \quad \sum_n h_0(n) = \sqrt{2}\,. \tag{3.44}$$

Takéto riešenie banky filtrov sa nazýva ***ortogonálne*** (Smith, Barnwell 1984) a vedie k ortogonálnym waveletom.[3] Vzájomnú závislosť koeficientov v impulzových charakteristikách filtrov znázorňuje obr. 3.10. Pre takéto riešenie banky filtrov platí:

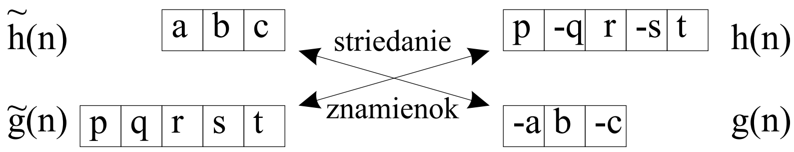
- Má nulové oneskorenie avšak obsahuje *nekauzálne* časti — filtre pre analýzu a syntézu v oboch vetvách majú impulzové charakteristiky časovo obrátené.
- Oneskorením nekauzálnych filtrov (vynásobením členom $z^{-(2l-1)}$) dostaneme *kauzálnu* BF s oneskorením $2l-1$.
- Filtre pre analýzu (a analogicky aj pre syntézu) sú ortogonálne navzájom a aj voči svojim párnym posunom.
- Ak sústavu začneme navrhovať od syntézy, t. j. $H(z) = H_0(z)$, výsledkom je zámena analyzačnej a syntetizačnej časti BF, t. j. vo vzťahoch na výpočet filtrov sa iba zamení označenie duálnosti.

Prečo sú filtre $H(z) = \tilde{H}(z^{-1})$, $G(z) = \tilde{G}(z^{-1})$, na rozdiel od QMF filtrov, navzájom časovo otočené? Je to potrebné, lebo ináč by filtre v DP a HP vetve netvorili polpásmové filtre ($p(n)$ by nebolo symetrické) a úplná rekonštrukcia by sa nedala dosiahnuť.

Biortogonálne riešenie

Biortogonálne riešenie umožňuje návrh dvojpásmových bánk filtrov s KIO filtrami s lineárnou fázou a rôznymi dĺžkami impulzovej charakteristiky filtrov pri analýze a

[3]Filtre v ortogonálom riešení banky filtrov bývajú označované aj ako ***konjugované kvadratúrne filtre*** (CQF — Conjugate Quadtrature Filters).



Obr. 3.11. Príklad impulzových charakteristík filtrov a ich vzájomných závislostí v *biortogonálnej* BF.

syntéze. Toto riešenie je limitované „iba“ tým, aby filtre spĺňali podmienku eliminácie aliasingu (3.37), ktorá je zvyčajne v tvare:

$$H(z) = z^m \tilde{G}(-z) \qquad G(z) = -z^m \tilde{H}(-z) \tag{3.45}$$

a podmienku konštantného prenosu formulovanú vzťahmi (3.39), (3.40):

$$P(z) + P(-z)(-1)^{m+l+1} = 2\,,$$

kde

$$P(z) = z^l \tilde{H}(z)\, H(z) \qquad P(-z) = z^l \tilde{G}(z)\, G(z)\ .$$

Sú možné tieto tvary riešení (formulované pre analyzačné filtre):

- oba filtre sú symetrické, majú nepárne dĺžky, ktoré sa líšia o nepárny násobok 2
- jeden filter je symetrický, druhý antisymetrický, oba majú párne dĺžky, rovnaké, alebo líšiace sa o párny násobok 2 (ortogonálne BF sú špeciálny prípad tohoto typu riešenia, samozrejme bez symetrie)
- jeden filter má nepárnu, druhý párnu dĺžku, oba majú nuly iba na jednotkovej kružnici. Oba sú symetrické alebo jeden je symetrický a druhý antisymetrický.

Ako sú principiálne od seba závislé koeficienty v impulzových charakteristikách filtrov je znázornené na obr. 3.11. Porovnajte tieto závislosti s tabuľkou 3.1.

Impulzové charakteristiky spĺňajú podmienky biortogonality, t. j. sú ortogonálne k párnym posunom svojich duálov a ortogonálne navzájom „do kríža“:

$$\sum_k h(k)\tilde{h}(2n-k) = \delta(k) \qquad \sum_k g(k)\tilde{g}(2n-k) = \delta(k) \tag{3.46}$$

$$\sum_k g(k+2m)\,\tilde{h}(2n-k) = \delta(k) \qquad \sum_k h(k+2m)\,\tilde{g}(2n-k) = \delta(k)\ . \tag{3.47}$$

Riešenie filtrov	analýza	syntéza
symetrické (B2.2)	$\tilde{h}(n) = \frac{\sqrt{2}}{8}(-1, 2, \dot{6}, 2, -1)$ $\tilde{g}(n) = (-1, 2, -1)$	$h(n) = \frac{\sqrt{2}}{4}(1, \dot{2}, 1)$ $g(n) = (-1, -2, 6, -2, -1)$
antisymetrické (B3.1)	$\tilde{h}(n) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(-1, 3, \dot{3}, -1\right)$ $\tilde{g}(n) = \frac{\sqrt{2}}{8}(-1, 3, -3, 1)$	$h(n) = \frac{\sqrt{2}}{8}\left(1, \dot{3}, 3, 1\right)$ $g(n) = \frac{\sqrt{2}}{4}(-1, -3, 3, 1)$

Tabuľka 3.1. Príklad impulzových charakteristík filtrov v biortogonálnej BF so symetrickými filtrami.

3.3.4 Maticový tvar dvojpásmovej BF

Pre dvojpásmovú banku filtrov podľa obr. 3.7 sme analýzu a syntézu v banke filtrov popísali vzťahmi (3.15), (3.16). Celý postup môžeme prepísať v maticovom tvare ako transformáciu, analogicky maticovému tvaru DWT v časti (1.7):

$$\bar{X} = T_a\bar{x} \quad \hat{\bar{x}} = T_s\bar{X}\,, \tag{3.48}$$

kde $\bar{x}$, $\bar{X}$, $\hat{\bar{x}}$ sú stĺpcové vektory vstupného, transformovaného, výstupného signálu a T_a, T_s sú transformačné matice pre analýzu, resp. pre syntézu. Predpokladajme konečnú dĺžku vstupného signálu a kruhovú konvolúciu v BF. Potom $\bar{x}$, $\bar{X}$, $\hat{\bar{x}}, T_a, T_s$ môžeme vyjadriť v tvare:

$$\bar{x} = (x(0), x(1), \ldots, x(N-1))^T \tag{3.49}$$

$$\bar{X} = (c(0), c(1), \ldots, c(N/2-1), d(0), d(1), \ldots, d(N/2-1))^T \tag{3.50}$$

$$\mathbf{T}_a = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{H}} \\ \tilde{\mathbf{G}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{h}(0) & \tilde{h}(-1) & \ldots & \ldots & \ldots & \tilde{h}(1) \\ \ldots & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(0) & \tilde{h}(-1) & \ldots & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(0) & \tilde{h}(-1) \\ \tilde{g}(0) & \tilde{g}(-1) & \ldots & \ldots & \ldots & \tilde{g}(1) \\ \ldots & \tilde{g}(1) & \tilde{g}(0) & \tilde{g}(-1) & \ldots & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \tilde{g}(1) & \tilde{g}(0) & \tilde{g}(-1) \end{pmatrix} \tag{3.51}$$

$$\mathbf{T}_s = \begin{pmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(0) & \vdots & \ldots & \vdots & g(0) & \vdots & \ldots & \vdots \\ h(1) & h(-1) & \ldots & \vdots & g(1) & g(-1) & \ldots & \vdots \\ \vdots & h(0) & & \vdots & \vdots & g(0) & \ldots & \vdots \\ \vdots & h(1) & \ldots & h(-1) & \vdots & g(1) & \ldots & g(-1) \\ \vdots & \vdots & \ldots & h(0) & \vdots & \vdots & \ldots & g(0) \\ h(-1) & \vdots & \ldots & h(1) & g(-1) & \vdots & \ldots & g(1) \end{pmatrix}. \tag{3.52}$$

Pri úplnej rekonštrukcii bez oneskorenia platí $\hat{\bar{x}} = \bar{X}$. Potom platí:

$$\mathbf{T_a T_s} = \mathbf{I}_N = \mathbf{T_s T_a}\,.$$

V uvedenom vzťahu môžeme rovnosti sprava a zľava interpretovať tak ako v časti 1.7:

- $\mathbf{I}_N = \mathbf{T_a T_s}$ — impulzové charakteristiky filtrov sú ortogonálne k párnym posunom svojich duálov a ortogonálne navzájom „do kríža“ = vyjadrenie biortogonality

- $\mathbf{I}_N = \mathbf{T}_s\mathbf{T}_a$ — vyjadruje podmienky pre elimináciu aliasingu v časovej oblasti.

Matice $\tilde{\mathbf{H}}$, $\tilde{\mathbf{G}}$ sa nazývajú ***decimačné*** a majú rozmery $N \times N/2$. Matice $\mathbf{H}$, $\mathbf{G}$ sú ***interpolačné*** matice s rozmermi $N/2 \times N$. Vznikli z tzv. ***konvolučných*** matíc $\tilde{\mathbf{H}}_{konv}$, $\tilde{\mathbf{G}}_{konv}$, $\mathbf{G}_{konv}$, $\mathbf{G}_{konv}$, ktoré majú rovnaký tvar a v tomto prípade reprezentujú kruhovú konvolúciu pri analýze a syntéze. Napríklad:

$$\tilde{\mathbf{H}}_{konv} = \begin{pmatrix} \tilde{h}(0) & \ldots & \ldots & \tilde{h}(3) & \tilde{h}(2) & \tilde{h}(1) \\ \tilde{h}(1) & \tilde{h}(0) & \ldots & \ldots & \tilde{h}(3) & \tilde{h}(2) \\ \tilde{h}(2) & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(0) & \ldots & \ldots & \tilde{h}(3) \\ \tilde{h}(3) & \tilde{h}(2) & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(0) & \ldots & \ldots \\ \ldots & \tilde{h}(3) & \tilde{h}(2) & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(0) & \ldots \\ \ldots & \ldots & \tilde{h}(3) & \tilde{h}(2) & \tilde{h}(1) & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \tilde{h}(3) & \tilde{h}(2) & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{3.53}$$

Ak konvolučnú maticu použijeme pri analýze, bude medzivýsledok v DP (a podobne aj v HP) vetve po konvolúcii $\bar{x}_h = \tilde{\mathbf{H}}_{konv}\bar{x}$ a výstup $\bar{c}$ dostaneme podvzorkovaním $\bar{x}_h$:

$$\bar{c} = \bar{x}_h \downarrow 2 = \left(\tilde{\mathbf{H}}_{konv}\bar{x}\right) \downarrow 2 = \left(\tilde{\mathbf{H}}_{konv} \underset{riadky}{\downarrow} 2\right) \bar{x} = \tilde{\mathbf{H}}\,\bar{x}\,. \tag{3.54}$$

Podvzorkovanie výstupu po filtrácii pri analýze zodpovedá odstráneniu každého druhého riadku konvolučnej matice.

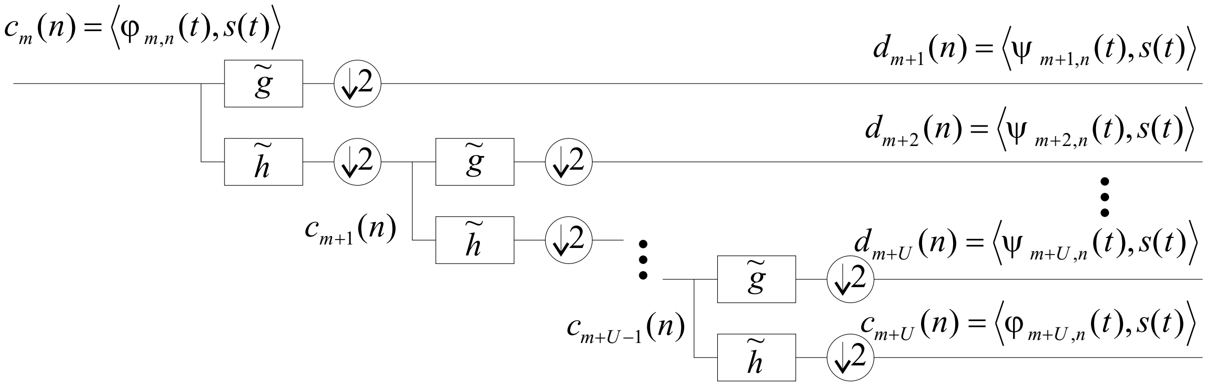
Analogicky, pri syntéze je signál najprv nadvzorkovaný a následne konvolvovaný, pre DP (a podobne pre HP) vetvu potom platí:

$$\hat{\bar{x}}_c = (\mathbf{H}_{konv})\,(\bar{c} \uparrow 2) = \left(\mathbf{H}_{konv} \underset{stpce}{\downarrow} 2\right) \bar{c} = \mathbf{H}\,\bar{c}\,.$$

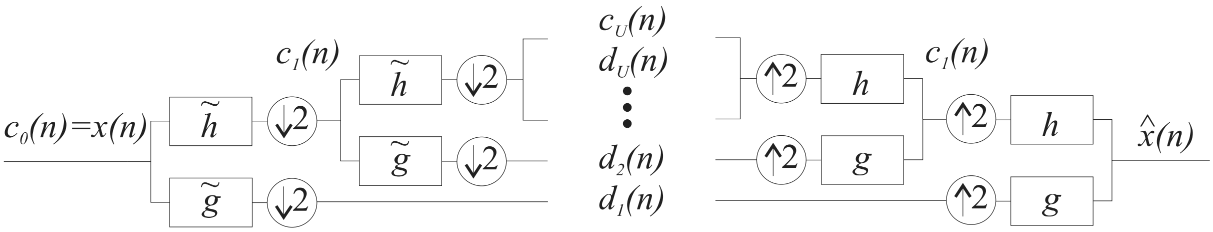
Nadvzorkovanie signálu pred filtráciu pri syntéze zodpovedá odstráneniu každého druhého stĺpca príslušnej konvolučnej matice.

3.4 Výpočet waveletových radov a DWT bankami filtrov

Podmienky na úplnú rekonštrukciu v ortogonálnom riešení banky filtrov sú zhrnuté v tabuľke 2.1. Analogicky môžeme konštatovať, že biortogonálne riešenie banky filtrov vyhovuje podmienkam v časti 2.2. Uvedomme si, že na to, aby dvojpásmové banky filtrov mohli počítať WR a DWT musia mať oba filtre v DP vetve aspoň jednu nulu pri $\Omega = \pi$ a naopak oba filtre v HP vetve jednu nulu pri $\Omega = 0$. Táto podmienka je nutná, jej postačujúcosť je však na hranici. To rýchlo zistíme pri výpočte WR a DWT. Doteraz sme totiž uvažovali iba rozklad na jednej úrovni rozlíšenia a pri výpočte WR a DWT potrebujeme opakovane rozkladať koeficienty v DP časti. Takéto kaskádovanie výpočtov vedie k tzv. ***iterovaným bankám filtrov***, kde sa nevhodné vlastnosti filtrov (napr. nízka K-regularita alebo neschopnosť úplnej rekonštrukcie) môžu veľmi ľahko prejaviť veľkou nepresnosťou a numerickou nestabilitou celého výpočtu. Pri návrhu bánk filtrov to predstavuje zásadný rozdiel oproti návrhu klasických (t. j. neiterovaných) bánk filtrov, ktorý je viac zameraný na rozdelenie subpásiem vo frekvenčnej oblasti, na selektivitu filtrov a na vznikajúci aliasing, pričom sa často úplná rekonštrukcia ani nepožaduje.



Obr. 3.12. Princíp realizácie výpočtu dyadických waveletových radov bankou filtrov



Obr. 3.13. Princíp realizácie výpočtu diskrétnej (dyadickej) waveletovej transformácie bankou filtrov.

Ako je bankami filtrov realizovaný výpočet WR znázorňuje obr. 3.12. Prvý krok predstavuje projekcia spojitého signálu, ďalej však výpočet pokračuje v banke filtrov na diskrétnej množine súradníc tejto projekcie. Pre DWT je situácia znázornená na obr. 3.13.

3.5 Dvojpásmová banka filtrov a spektrálna faktorizácia

V časti (2.4.2) sme faktorizovali prenosové funkcie vytvorené Daubechieovej metódou (pozri vetu 2.4) a hľadali ortogonálne riešenia na návrh K-regulárnych filtrov. Vo všeobecnosti nám stačí si *ľubovoľnou metódou* vytvoriť polpásmový filter s prenosovou funkciou $P(z)$, ktorý má nezápornú a reálnu $P(\Omega)$. Potom $P(z)$ je určite autokoreláciou nejakej *reálnej postupnosti*, t. j. $P(z)$ môžeme faktorizovať, pozri časť (2.4.2). Rôzne metódy na získanie vhodného $P(z)$ sú uvedené napr. v [22].

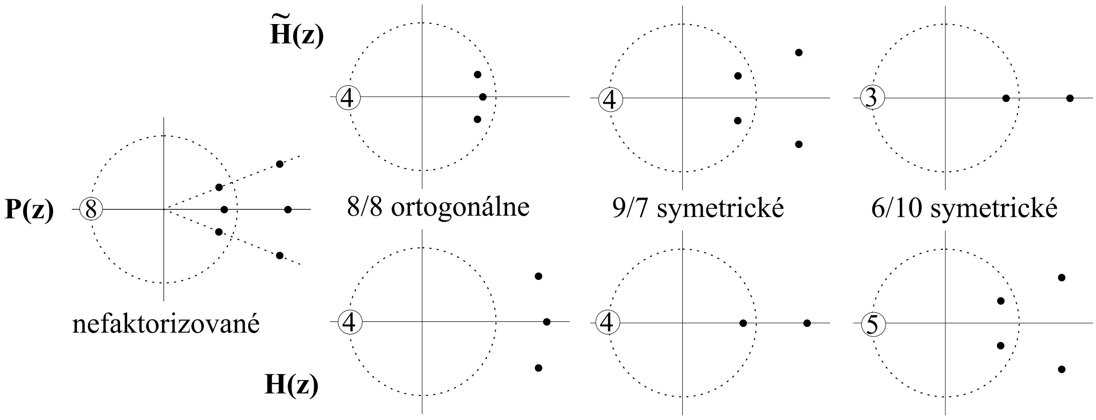
Najjednoduchším spôsobom, ako $P(z)$ s uvedenými vlastnosťami získať, je znovu použiť vetu 2.4, tentokrát však na vytvorenie nefaktorizovanej verzie vzťahu (2.38) [22, str. 169]:

$$P(z) = 2\left(\frac{1+z^{-1}}{2}\right)^K \left(\frac{1+z}{2}\right)^K Q(z)\ , \tag{3.55}$$

kde $Q(z)$ je dané vzťahmi (2.40), (2.41).

Predpokladajme všeobecné riešenie spektrálnej faktorizácie $P(z)$ v tvare:

$$P(z) = \tilde{H}(z)\, H(z)\ . \tag{3.56}$$



Obr. 3.14. Nuly prenosovej funkcie $P(z)$ vypočítanej pre maximálne hladké filtre pri $K = 7$ pomocou vzťahu (3.55) a príklady jej faktorizácie. Čísla $\tilde{N}/N$ udávajú dĺžku impulzových charakteristík $\tilde{h}(n)$ resp. $h(n)$

Nulové body $P(z)$ označme z_k. Potom platia nasledovné pravidlá pre vytváranie spektrálnych faktorov [22]:

1. aby $\tilde{H}(z)$ a $H(z)$ boli prenosové funkcie reálnych filtrov, musíme z_k a z_k^* použiť v pároch
2. aby $\tilde{H}(z)$ a $H(z)$ boli prenosové funkcie filtrov s *lineárnou fázou*, musíme z_k a $1/z_k$ použiť v pároch
3. aby $\tilde{H}(z)$ a $H(z)$ mohli tvoriť ortogonálne wavelety, musíme z_k a $1/z_k$ použiť oddelene.

Vidíme, že pravidlá 2 a 3 sa navzájom vylučujú, okrem jedného prieniku. Presnejšie sformulované [21]:

Symetrický KIO filter s prenosovou funkciou $H(z)$ spĺňajúci podmienky ortogonality (pozri tabuľku 2.1), môže mať maximálne 2 nenulové koeficienty, pričom platí:

$$H\left(z\right) = \left(1 + z^{-N}\right) \Big/ \sqrt{2} \qquad N \textit{ je nepárne}. \tag{3.57}$$

Na obr. 3.14 sú znázornené príklady možnej faktorizácie $P(z)$ so 14 nulami. Ak si zvolíme ortogonálnu faktorizáciu treba dbať na to, aby sme našli také $H(z)$, pre ktoré $P(z) = H(z)H(z^{-1})$ a postupovali podľa pravidiel 1 a 3. Pri ortogonálnom riešení spektrálnej faktorizácie (pozri časť 2.4.2) bolo požadovaným výsledkom $H(z)$ s minimálnou fázou. Po odštiepení tohoto faktora od $P(z)$ ostáva faktor $H(z^{-1})$, ktorý má fázu maximálnu (a magnitúdovú charakteristiku rovnakú). Takže k dispozícii máme automaticky oba extrémy.

Ak si zvolíme riešenie s lienárnou fázou, hľadáme faktorizáciu v tvare (3.56) pričom musíme postupovať podľa pravidiel 1 a 2. V tomto prípade sa samozrejme nami vybraté riešenia môžu od ostatných líšiť už aj magnitúdou.

Pri návrhu biortogonálnych spline (CDF) waveletov faktorizujeme $P(z)$ tak, aby jeden faktor obsahoval iba nuly v $z = -1$ a nič iné, t. j. aby bol maximálne K-regulárny:

$$H\left(z\right) = H_{S_M}\left(z\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1 + z^{-1}}{2}\right)^{M/2+1}\left(\frac{1 + z}{2}\right)^{M/2}. \tag{3.58}$$

K návrhu $P(z)$ môžeme pristupovať aj priamo (tzv. ***metóda priameho návrhu***). Na základe vlastností autokorelačnej funkcie (aby $P(z)$ bola reálna nezáporná funkcia) s K nulami pri $z = -1$, môžeme $P(z)$ napísať v tvare:

$$P(z) = (1 + z^{-1})^K (1 + z)^K R(z)\,, \tag{3.59}$$

kde $R(z)$ je funkcia symetrická ($R(z^{-1}) = R(z)$) a pozitívna na jednotkovej kružnici ($R(e^{j\Omega}) \geq 0$). Pri návrhu jednoducho hľadáme $R(z)$ také, aby $P(z)$ vyhovovalo rovnosti $P(z) + P(-z) = 2$. Ukážka takéhoto návrhu je v príklade 3.2.

Príklad 3.1 *Nájdime všetky možné faktorizácie vzťahu (3.55) pre $K = 2$ pri $R(y) = 0$.*

Riešenie: *Dosadením $K = 2$ a $R(y) = 0$ do (2.40) dostávame:*

$$Q(z) = -\frac{1}{2}z + 2 - \frac{1}{2}z^{-1} = \frac{2+\sqrt{3}}{2}\left[1 - \frac{\left(2-\sqrt{3}\right)}{z}\right]\left[1 - \frac{z}{\left(2+\sqrt{3}\right)}\right].$$

Potom

$$P(z) = 2\left(\frac{1+z^{-1}}{2}\right)^2\left(\frac{1+z}{2}\right)^2 Q(z)\,.$$

Ak chceme utvoriť riešenie s lineárnou fázou, môžeme vzhľadom na umiestnenie koreňov manipulovať iba s koreňmi v $z = -1$. Keďže $Q(z)$ ostane vcelku, bude jeden z faktorov vytvárať B-*spline. Môžeme vytvoriť faktorizácie:*

1. *B1.3:*

$$H(z) = \sqrt{2}\left(\frac{1+z^{-1}}{2}\right)^1 \qquad \tilde{H}(z) = \sqrt{2}\left(\frac{1+z^{-1}}{2}\right)^1\left(\frac{1+z}{2}\right)^2 Q(z)$$

$$H(z) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}z^{-1} \qquad \tilde{H}(z) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{8}z^2 + \frac{1}{8}z + 1 + z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2} - \frac{1}{8}z^{-3}\right)$$

2. *B2.2:*

$$H(z) = \sqrt{2}\left(\frac{1+z^{-1}}{2}\right)^2 \qquad \tilde{H}(z) = \sqrt{2}\left(\frac{1+z}{2}\right)^2 Q(z)$$

resp. centrované verzie

$$H(z) = \sqrt{2}\left(\frac{1+z^{-1}}{2}\right)\left(\frac{1+z}{2}\right) \qquad \tilde{H}(z) = \sqrt{2}\left(\frac{1+z^{-1}}{2}\right)\left(\frac{1+z}{2}\right) Q(z)$$

3. *B3.1:*

$$H(z) = \sqrt{2}\left(\frac{1+z^{-1}}{2}\right)^2\left(\frac{1+z}{2}\right)^1 \qquad \tilde{H}(z) = \sqrt{2}\left(\frac{1+z}{2}\right)^1 Q(z)\,.$$

Ak chceme vytvoriť ortogonálnu faktorizáciu, pridelíme po jednom faktore z $Q(z)$ obom filtrom v páre. Jeden bude s minimálnou a druhý s maximálnou fázou:

$$\begin{aligned} H(z) &= \sqrt{2}\left(\frac{1+z^{-1}}{2}\right)^2 \frac{1+\sqrt{3}}{2}\left[1 - \frac{\left(2-\sqrt{3}\right)}{z}\right] \\ \tilde{H}(z) &= \sqrt{2}\left(\frac{1+z}{2}\right)^2 \frac{1+\sqrt{3}}{2}\left[1 - \frac{z}{\left(2+\sqrt{3}\right)}\right]. \end{aligned}$$

Príklad 3.2 *Pomocou vedomostí o tvare autokorelačnej funkcie zostrojte metódou priameho návrhu maximálne hladké filtre s dĺžkou $N = 4$.*

Riešenie: *Z vlastností maximálne hladkých filtrov vyplýva že pri $N = 4$ majú $K = 2$ nulové momenty. Potom $P(z)$ má tvar:*

$$P(z) = (1 + z^{-1})^2 (1 + z)^2 R(z) = H(z)H(z^{-1})\,.$$

Keďže platí $P(z) + P(-z) = 2$, všetky koeficienty v $P(z)$ pri párnych mocninách z okrem z^0 musia byť nulové (pri z^0 je koeficient jednotkový). Predpokladajme kauzálne $H(z)$. Pri $N = 4$ je v ňom najväčšia mocnina z^{-3}. Súčin $H(z)H(z^{-1})$ bude mať teda mocniny rádu z^{-3} až z^3. Stačí teda hľadať $R(z)$ v tvare:

$$R(z) = az + b + az^{-1}\,.$$

Potom z $P(z) = (1 + z^{-1})^2 (1 + z)^2 (az + b + az^{-1})$ vytvoríme sústavu rovníc v ktorej budeme hľadať neznáme a, b porovnávaním koeficientov pri párnych *mocninách z:*

$$\begin{array}{ll} \text{pri } z^0 & 1 = 6a + 6b \\ \text{pri } z^{-2} & 0 = 4a + b \end{array} \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{16}, \quad b = \frac{1}{4}\,.$$

Takže $R(z)$ bude

$$R(z) = -\frac{1}{16}z + \frac{1}{4} + -\frac{1}{16}z^{-1}\,.$$

Následne vytvoríme P(z) a jeho ortogonálnou faktorizáciu dostaneme výsledok:

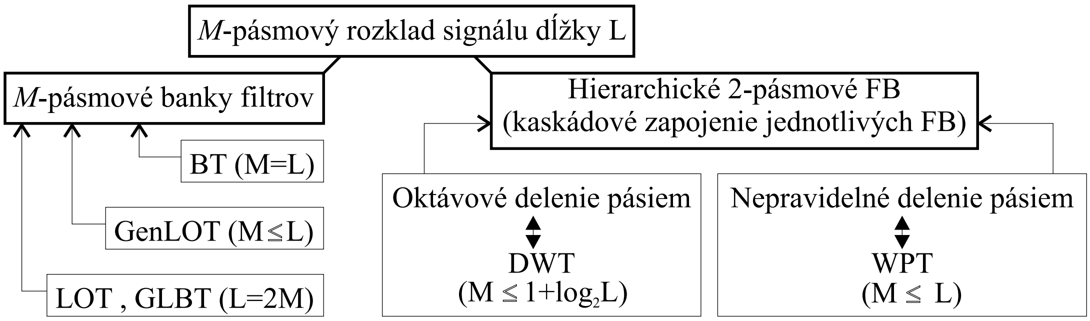
$$H(z) = \left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)\left[(1+\sqrt{3}) + (1+\sqrt{3})z^{-1} + (3-\sqrt{3})z^{-2} + (1-\sqrt{3})z^{-3}\right]\,.$$

3.6 Banka filtrov a rozklad signálov

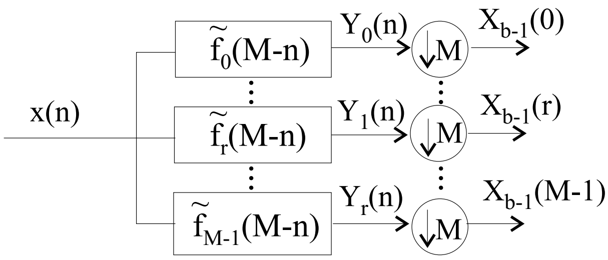
Zmena reprezentácie signálu je zväčša uskutočnená transformáciou. Najbežnejším spôsobom rozkladu signálu v kontexte spracovania signálu je rozklad pomocou diskrétnych lineárnych transformácií (DLT) [3], kde sú priestory, v ktorých sa pracuje, tvorené lineárnou kombináciou bázových funkcií resp. bázových vektorov. Ak transformácie pracujú so signálom v dávkach resp. po blokoch, hovoríme o blokových transformáciách (BT). Ich nedostatkom je, že neodstraňujú medziblokovú koreláciu a naviac vzniká rušivý „blokový efekt“. Tento s výhodou odstraňujú transformácie s prekryvom blokov — tzv. prekryvné (angl. Lapped) transformácie [4], či už ortogonálne (LOT, GenLOT), alebo biortogonálne (GLBT). Špeciálnym druhom sú transformácie pracujúce na princípe viacúrovňového rozlíšenia signálu bankou filtrov, t. j. waveletové transformácie, ktoré pojem bloku ani nepotrebujú. Prekryvy sú v nich totiž skryté už v samotných bázových funkciách na jednej úrovni rozlíšenia a následne aj v hierarchickej štruktúre bázy, pozri obr. 1.9 a obr. 1.20.

Všetky spomenuté transformácie sú špeciálnym prípadom použitia banky filtrov na rozklad signálu, pozri obr. 3.15. Presnejšie sformulované:

> *Každá diskrétne lineárna transformácia je ekvivalentná rozkladu v M-pásmovej BF, v ktorej časovo reverzné impulzové odpovede jednotlivých filtrov pre analýzu a syntézu zodpovedajú jednotlivým bázovým vektorom DLT.*



Obr. 3.15. M-pásmový rozklad signálu dĺžky L a jeho známe špeciálne prípady.



Obr. 3.16. Princíp výpočtu blokovej transformácie M-pásmovou bankou filtrov

3.6.1 Implementácia Blokových transformácií (BT) bankami filtrov

Implementujme blokovú transformáciu v nasledovnom tvare. Rozdeľme vstupný signál $x(n)$ na neprekrývajúce sa bloky veľkosti M. Transformačnú maticu veľkosti $M \times M$ označme $\tilde{\mathbf{F}}$. Potom pre výstupy $X(n)$ platí:

$$\bar{X}_b = \tilde{\mathbf{F}}\,\bar{x}_b\,, \tag{3.60}$$

kde

$$\begin{array}{lll} \bar{x}_b = (x_b(0), x_b(1), \ldots, x_b(M-1))^T & x_b(n) = x(bM+n) & n = 0,1,\ldots,M-1 \\ \bar{X}_b = (X_b(0), X_b(1), \ldots, X_b(M-1))^T & X_b(n) = X(bM+n) & n = 0,1,\ldots,M-1\,. \end{array}$$

Označme riadkové vektory v riadkoch r matice $\tilde{\mathbf{F}}$ ako $\bar{\tilde{f}}_r$. Považujme ich za kauzálne signály. Takúto blokovú transformáciu môžeme implementovať nasledovnou kauzálnou M-pásmovou bankou filtrov. V nej majú impulzové charakteristiky jednotlivých filtrov hodnoty ako časovo otočené a o M vzoriek oneskorené riadky transformačnej matice $\tilde{\mathbf{F}}$, pozri obr. 3.16. Pre signály $Y_r(n)$ po konvolúcii platí:

$$Y_r(n) = \tilde{f}_r(M-n) * x(n)\,. \tag{3.61}$$

Následným podvzorkovaním vyberáme vzorky vždy až v okamihu, keď je signál práve na mieste bázovej funkcie:

$$\bar{X}_b(r) = Y_r((b+1)M))\;. \tag{3.62}$$

V čase nula, pri prvom podvzorkovaní ešte nie je banka filtrov naplnená. Prvý relevantný výstup dostaneme až v čase M. Preto je výstup na obr. 3.16 s indexom $b-1$.

Kapitola 4

Rozšírenia waveletovej transformácie a ich výpočet

Ak odhliadneme od SWT, pre waveletové rady a DWT sme v doterajších častiach spomenuli ich rôzne riešenia na základe ortogonality waveletového systému resp. zodpovedajúceho typu banky filtrov. Vstupný signál sme buď považovali za nekonečne dlhý, alebo sme ho speriodifikovali. Pracovali sme iba s jednorozmerným vstupným signálom a používali sme dyadické wavelety. V tejto kapitole sa budeme venovať najznámejším rozšíreniam uvedených základných prípadov:

- wavelety pri konečnej dĺžke vstupného signálu
- wavelety vo viacerých rozmeroch
- M-pásmové wavelety
- multiwavelety
- waveletové pakety

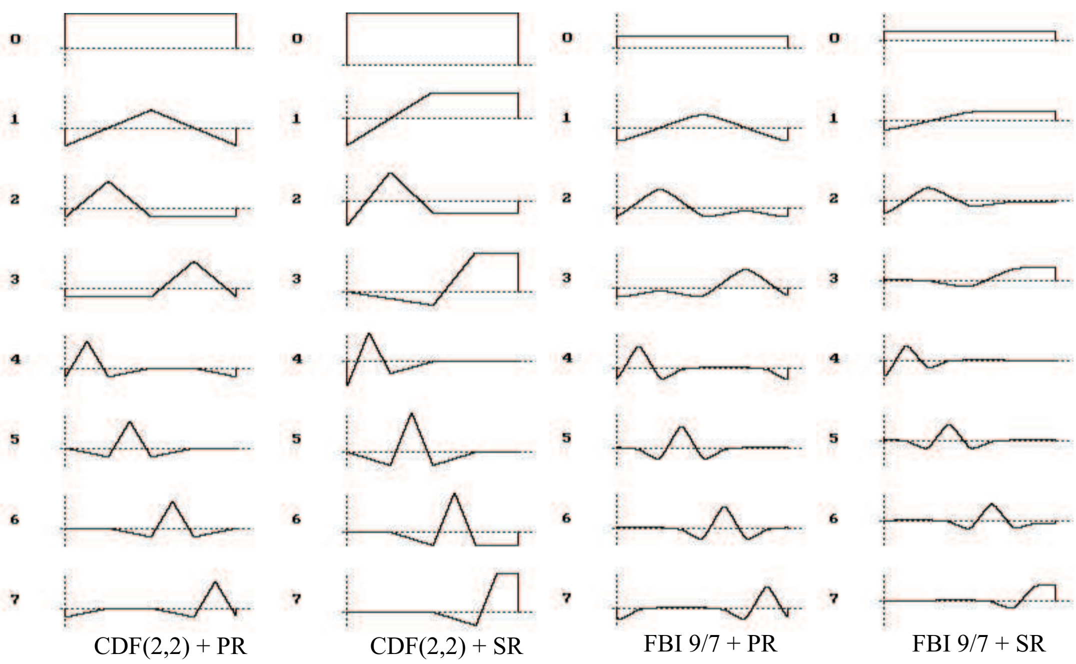
4.1 Riešenia pri konečnej dĺžke vstupného signálu

Pri práci so spojitým signálom máme k dispozícii SWT a waveletové rady. S tým, že má signál konečné trvanie v čase sa ráta (patrí do $L^2(\mathcal{R})$), priam je to výhodné, lebo jeho reprezentácia bude kompaktnejšia a bude zodpovedať jeho nosiču. Ak však máme diskrétny signál konečnej dĺžky, pri DWT sa objavuje problém, čo robiť pri transformácii na jeho okraji. Ak ho jednoducho doplníme nulami a budeme počítať DWT použitím vzťahov (1.60), (1.61) bude sa nám veľkosť reprezentácie postupne zväčšovať. To je pre mnohé účely nevhodné až neprijateľné. Známe sú viaceré štandardné metódy riešiace uvedený problém, ktoré si v krátkosti preberieme. Je dôležité uvedomiť si, že hoci riešime úlohy v diskrétnej oblasti, výsledky majú vplyv aj na oblasť spojitú.

Štandardný prístup k riešeniu sa formuluje ako hľadanie vhodného „rozšírenia" signálu, t. j. jeho dodefinovanie mimo pôvodného nosiča. Pri voľbe rozšírenia signálu a jeho prevedení treba mať na zreteli (a prípadne robiť kompromisy):

- chceme alebo nechceme získať nadbytočnú reprezentáciu ?
- ak je transformácia ortogonálna, chceme jej ortogonalitu zachovať ?
- do akej miery chceme ovplyvniť vlastnosti výslednej reprezentácie ?

Odpovede na uvedené otázky sa môžu rôzniť podľa toho, za akým účelom transformáciu robíme a čo máme k dispozícii. Napr. ak použijeme biortogonálny systém, najlepšie je symetrické rozšírenie (pozri časť 4.1.2).



Obr. 4.1. Porovnanie vplyvu periodického (PR) a symetrického (SR) rozšírenia na tvar bázových funkcií DWT na okrajoch. Zobrazených je prvých osem bázových funkcií, veľkosť bázy je $N = 128$. Nultá bázová funkcia je zliata funkcia mierky.

4.1.1 Periodické rozšírenie signálu

Periodifikácia signálu je štandardný spôsob rozšírenia signálu, známy aj z Fourierovej analýzy. Pri použití periodického rozšírenia signálu dĺžky N pri výpočte DWT a WR platí:

- transformačné matice sú v tvare (1.78) resp. (3.51), čo zodpovedá tzv. *kruhovej konvolúcii* [7] v banke filtrov a *cirkulačným* konvolučným maticiam v tvare (3.49)
- párna dĺžka vstupného signálu pri každom rozklade. Je to nutná podmienka, ináč by boli porušené podmienky ortogonality resp. biortogonality párnych posunov koeficientov v štruktúre transformačných matíc
- zachováva ortogonalitu
- vnáša do signálu „body nespojitosti“.

Vplyv periodického rozšírenia signálu na tvar bázových funkcií je zreteľne vidieť na obr. 4.1. Aj bázové funkcie zodpovedajúcej spojitej reprezentácie, sú poprekladané. Ak pri bázovej funkcii nastalo ovplyvnenie, hovoríme o ***okrajovej funkcii***. Ak okrajové funkcie po preložení zasahujú sami do seba, sú príslušné funkčné hodnoty sčítané. Napr. nech základný wavelet má kompaktný nosič na intervale $\langle 0,3\rangle$ pričom pracujeme na konečnom intervale $\langle 0,4\rangle$. Potom $\psi(t-2)$ je okrajová funkcia s nosičom $\langle 2,5\rangle$, ktorého časť, interval $\langle 4,5\rangle$ sa preloží na interval $\langle 0,1\rangle$. Pre $\psi(t/2-2)$ už musíme rátať so sčítaním funkčných hodnôt[1].

[1]Limitou $m \longrightarrow \infty$ sčítavacieho procesu $x(2^{-m}t-n)$ je konštantná funkcia, ktorá sa v prípade waveletu rovná 0 a v prípade funkcie mierky sa rovná 1.

4.1.2 Symetrické rozšírenie signálu

Symetrickým rozšírením signálu pridávame k signálu dĺžky N jeho zrkadlový obraz a až túto dvojicu následne speriodifikujeme. Pridaním zrkadlového obrazu vzrastie aj veľkosť bázy, v ktorej je dvojica pri transformácii reprezentovaná. Ak sú však bázové funkcie symetrické, je polovica spektrálnych koeficientov rovnaká, t. j. k zväčšeniu reprezentácie z pôvodných N koeficientov nedôjde. Pri symetrickom rozšírení platí [22]:

- rozšírením nevznikajú v signáli body nespojitosti, ale iba v jeho prvej derivácii
- vstupný signál môže mať ľubovoľnú dĺžku (aj nepárnu)
- neredundantná reprezentácia je možná iba ak sú bázové funkcie symetrické (biortogonálne systémy)
- bázové funkcie v spojitom aj diskrétnom prípade sú na okraji signálu preložené späť a sčítané sami so sebou.

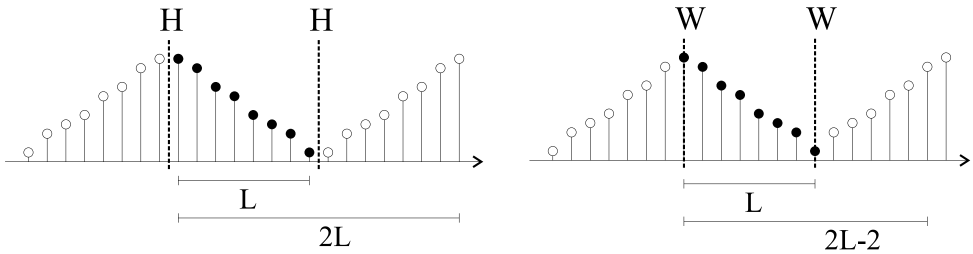
Presná situácia pri symetrickom rozšírení sa jednoduchšie ako v maticovom tvare popíše schématicky. Pred rozšírením je treba zistiť typ symetrie dilatačných koeficientov, resp. impulzových charakteristík zodpovedajúcich filtrov (pozri obr. 4.2):

- polbodová symetria (H symetria, z angl. half) — $h(n)$, $g(n)$ majú párnu dĺžku
- celobodová symetria (W symetria, z angl. whole) — $h(n)$, $g(n)$ majú nepárnu dĺžku

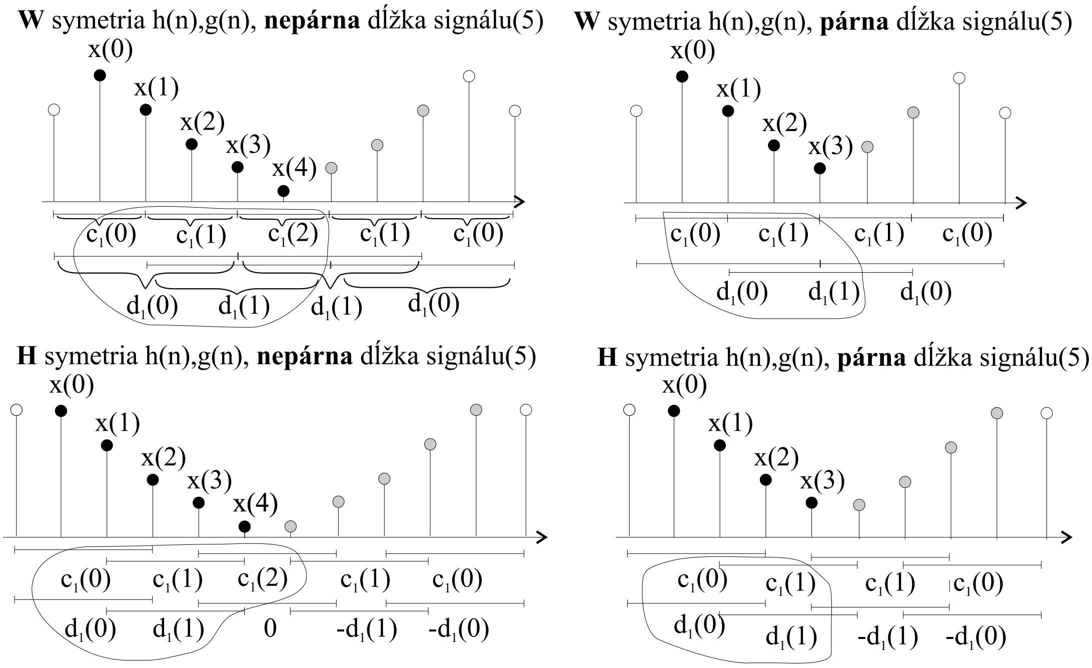
Kľúčom k neredundantej reprezentácii signálu pri symetrickom riešení je:

Typ symetrického rozšírenia signálu musí byť zhodný s typom symetrie dilatačných koeficientov.

Podrobnejšia analýza situácie pri oboch druhoch symetrií a párnej resp. nepárnej dĺžke signálu je znázornená na obr. 4.3. Vidíme, že na reprezentáciu stačí toľko koeficientov mierky a waveletových koeficientov, koľko bolo vzoriek vstupného signálu.



Obr. 4.2. Schématické znázornenie (periodického) signálu s polbodovou (H) resp. celobodovou (W) symetriou



Obr. 4.3. Situácia na okrajoch signálu pri transformácii používajúcej symetrické rozšírenie signálu. Pre koeficienty mierky a waveletové koeficienty je naznačené, váhovaním ktorých koeficientov vznikli. V príklade sú použité dĺžky impulzových charakteristík $\tilde{h}(n)/\tilde{g}(n)$: 3/5 a 4/4.

4.1.3 Doplnenie nulami a priama extrapolácia signálu

Doplnenie signálu nulami na jeho okrajoch je najpriamočiarejším riešením problému reprezentácie časovo ohraničeného signálu. Vnáša však výrazné diskontinuity na okrajoch signálu. Aby výsledná reprezentácia signálu nebola nadbytočná je potrebné prijať isté opatrenia. Pre jednoduchosť predpokladajme ortogonálnu DWT v maticovom tvare, pozri časť 1.7. Utvorme maticu $\mathbf{A}$ ako ekvivalent matice $\mathbf{T}_A^{(m)}$, avšak s týmto prestriedaním riadkov matíc $\mathbf{H_m}$, $\mathbf{G_m}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} h(0) & h(1) & h(2) & h(3) & 0 & 0 & 0 & \\ g(0) & g(1) & g(2) & g(3) & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & h(0) & h(1) & h(2) & h(3) & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & g(0) & g(1) & g(2) & g(3) & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h(0) & h(1) & h(2) & \\ & & & \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

Jednoduchým ukončením matice po dosiahnutí veľkosti N by sme dostali singulárnu maticu. Vynechajme prvý stĺpec matice A a označme takúto maticu A_z. Ľahko sa dá overiť, že A_z párnej veľkosti je regulárna. Neplatí však $A^{-1} = A^{*^T}$, t. j. stratili sme ortogonalitu.

Uvedené rozšírenie je základným prípadom tzv. priamej extrapolácie signálu. Pri ňom sa snažíme signál ukončiť za jeho hranicami polynómom rádu p a zodpovedajúcim počtom (minimálne $p-1$) koeficientov [22]. Aby nedošlo k zvyšovaniu dĺžky signálu, bolo by vhodné toto ukončenie reprezentovať v transformačnej matici.

Ukážeme si riešenie pre prípad, že *dilatačné koeficienty sú antisymetrické* [22, str. 293]. Označme si n-tý stĺpec matice $\mathbf{A}$ ako $\mathbf{a}_n$. Extrapoláciu môžeme vyjadriť takto (vyjadrené pre prvé stĺpce, analogicky to bude pre posledné stĺpce):

Doplnenie nulami
1. vynecháme $\mathbf{a}_1$, (prvý stĺpec matice $\mathbf{A}$)

Konštantná extrapolácia
1. vynecháme $\mathbf{a}_1$
2. $\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1$ (pridáme $\mathbf{a}_1$ k $\mathbf{a}_2$)

Lineárna extrapolácia
1. vynecháme $\mathbf{a}_1$
2. $\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_1$
3. $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_1$

Kvadratická extrapolácia
1. vynecháme $\mathbf{a}_1$
2. $\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_1$
3. $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_3 - 3\mathbf{a}_1$
4. $\mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_1$

4.1.4 Okrajové filtre a wavelety na intervale

Na celú situáciu na okrajoch signálu sa môžeme pozrieť aj z iného uhla. Manipuláciu na okrajoch signálu môžeme ošetriť pomocou cielene navrhnutých tzv. *okrajových filtrov*. Teda navrhujeme transformačnú maticu $\mathbf{A}_b$ (b-boundary) v tvare ako vo vzťahu (4.1), avšak môžeme naviac zachovať ortogonalitu. Okrajové filtre potom predstavujú prvé a posledné riadky v matici $\mathbf{A}_b$. Predpokladajme, že chceme ortogonálny systém. Ak dĺžka filtrov je 4, je matica A_b v tvare [22]:

$$A_b = \begin{pmatrix} r & s & t & 0 & \dots & \dots & & & & & & \\ u & v & w & 0 & \dots & \dots & \dots & & \dots & & & \\ 0 & a & b & c & d & 0 & & & & & & \\ 0 & -d & c & -b & a & 0 & & & & & & \\ & & & \vdots & & & \ddots & & \vdots & & & \\ & & & & & & & 0 & a & b & c & d & 0 \\ & & & \dots & & & \dots & 0 & -d & c & -b & a & 0 \\ & & & & & & & 0 & 0 & 0 & e & f & g \\ & & & & & & & 0 & 0 & 0 & x & y & z \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Prvé dva riadky musia byť ortogonálne na ostatné (stačí na druhé dva), v ostatných sú prvé 3 koeficienty nulové. Hľadáme teda vektory (r, s, t) a (u, v, w) ortogonálne navzájom a zároveň na $(0, a, b)$ a $(0, -d, c)$. Vektory $(0, a, b)$ a $(0, -d, c)$ sú lineárne závislé (h(n) je ortogonálny na svoje párne posuny, t. j. $ac + bd = 0$). Takže stačí nájsť (r, s, t) a (u, v, w) ortogonálne navzájom a na $(0, a, b)$, napr. Gramm-Schmidtovým (GS) algoritmom [21]. Po ňom zostáva 1 stupeň voľnosti , použijeme ho napr. na zabezpečenie, aby wavelet mal aspoň minimálnu regularitu, t. j. $u + v + w = 0$. Situáciu riešime analogicky pre vektory (e, f, g) a (x, y, z). Príklad riešenia pre Db2 je:

$$\begin{array}{ll} (r,s,t) = (\ \ 0.93907, 0.29767, -0.17186) & (e,f,g) = (0.40245, 0.69879, \ \ 0.59069) \\ (u,v,w) = (-0.34372, 0.81326, -0.46954) & (x,y,z) = (0.25535, 0.51155, -0.80690) \end{array}. \tag{4.3}$$

Uvedený postup môžeme jednoducho zautomatizovať. Ľavý horný roh (analogicky aj pravý dolný) transformačnej matice môžeme vyjadriť v tvare:

$$\mathbf{A_b} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

kde $\mathbf{B}$ vznikne úpravou matice $\mathbf{B}^*$:

$$\mathbf{B}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_D & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{pmatrix} \mathbf{L} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

kde $\mathbf{L}$ je matica rozmerov $[(N-2)/2] \times (N-2)$ ortogonálna k $\mathbf{A}$ získaná napr. GS ortogonalizačným procesom. Parametrom D môžeme plynulo zväčšovať prechodovú oblasť návratu k pôvodným filtrom. Hraničné filtre vo vzťahu (4.3) sú príkladom matice $\mathbf{B}$, ktorá vznikla z (4.5) pri $D=1$ a $N=4$ a úpravou pre podmienku $u+v+w=0$.

Zaujímavou otázkou je, ako dostať jednoducho matice $\mathbf{L}$ aj bez GS procesu. Definujme maticu $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\,. \tag{4.6}$$

Vzhľadom na vlastnosti matice $\mathbf{A}$ má matica $\mathbf{P}$ tvar:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P_{lava}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{P_{prava}} \end{pmatrix}, \tag{4.7}$$

pričom lineárne nezávislé vektory z matíc $\mathbf{P}_{lava}$ a $\mathbf{P}_{prava}$ sú zároveň ortogonálne na riadky matice $\mathbf{A}$, t. j. môžeme ich použiť ako riadky matice $\mathbf{L}$.

Všetky uvedené (aj v predchádzajúcich častiach) spôsoby manipulácie so signálom na jeho hraniciach vedú k spojitým prípadom waveletovej analýzy na nejakom intervale. T. j. okrem neovplyvnených waveletov a funkcií mierky v „strede“ intervalu máme okrajové funkcie, ktoré nám riešia problém ohraničenosti analýzy v $L^2(\mathcal{R})$. Ak sú pritom zachované pôvodné vlastnosti, ako napr. ortogonalita alebo regularita, hovoríme o ***waveletoch na intervaloch***. Vo forme v akej sa vyskytujú v strede intervalu ich môžeme nájsť kaskádovými algoritmami. Pri krajoch, kde sú dilatačné rovnice výrazne ovplyvnené, ich môžeme korektne získať použitím inverznej transformácie zo spektra, kde bude príslušný spektrálny koeficient jednotkový a ostatné nulové (takýto postup bol použitý aj na obr. 4.1).

Príklad 4.1 *Vypočítajte Okrajové filtre pre Db2 s a) $D=1$ b) $D=3$.*

Riešenie: *Z dilatačných koeficientov (resp. z filtrov pre analýzu) vytvorme maticu $\boldsymbol{A}$ (stačí s veľkosťou 6) a z nej následne pomocou vzťahu (4.7) maticu $\boldsymbol{P}$:*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0.4830 & 0.8365 & 0.2241 & -0.1294 & 0 & 0 \\ -0.1294 & -0.2241 & 0.8365 & -0.4830 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4830 & 0.8365 & 0.2241 & -0.1294 \\ 0 & 0 & -0.1294 & -0.2241 & 0.8365 & -0.4830 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0.2500 & 0.4330 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4330 & 0.7500 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7500 & -0.4330 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4330 & 0.2500 \end{pmatrix}.$$

Vektory $(0.2500, 0.4330)$ a $(0.4330, 0.7500)$ v matici $\boldsymbol{P}$ sú lineárne závislé, t. j. matica $\boldsymbol{L} = (0.2500, 0.4330)$ bude mať rozmery 1×2. Matice $\boldsymbol{B}^*$ potom budú v tvaroch:

$$\boldsymbol{B}^*_{D=1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0,25 & 0,4330 & 0 & \dots \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B}^*_{D=4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0,25 & 0,4330 & 0 & \dots \end{pmatrix}.$$

Okrajové filtre pre Db2 by sme získali vhodnou úpravou matíc $\boldsymbol{B}^*_{D=1}$ a $\boldsymbol{B}^*_{D=4}$. Dokončenie je ponechané na čitateľa.

4.2 Wavelety vo viacerých rozmeroch

Rozšírenie waveletov do viacerých rozmerov je úzko zviazané s konceptom viacrozmerných bánk filtrov [21]. Vo všeobecnosti môžeme viacrozmerné waveletové systémy riešiť buď priamym návrhom, alebo transformáciou z jednorozmerného (1D) prípadu. Triviálne, ***separovateľné prípady*** viacrozmerných waveletov môžeme vytvoriť pomocou tenzorového súčinu použitím 1D prototypov týmito spôsobmi [8]:

- *Štandardný prípad* — tenzorovým súčinom 1D bázových funkcií. Výsledná 2D báza bude teda tvorená súčinmi $\varphi_{i,n}$ a $\psi_{j,n}$, $i,j,n \in \mathcal{Z}$. Napr. pri počiatočnej úrovni rozlíšenia 0 a pri U úrovniach rozkladu bude výsledkom $(U+1)^2$ množín funkcií, pomocou ktorých bude signál reprezentovaný:

$$\begin{array}{cc} \varphi_{U,n}(x)\times\varphi_{U,n}(y) & \psi_{j,n}(x)\times\varphi_{1,n}(y) \\ \varphi_{1,n}(x)\times\psi_{i,n}(y) & \psi_{j,n}(x)\times\psi_{i,n}(y) \end{array} \quad n\in\mathcal{Z}, \quad i,j = 1\ldots U\,. \tag{4.8}$$

- *Neštandardný prípad* — tenzorovým súčinom analýz s viacúrovňovým rozlíšením (AVR) [18]. V 2D prípade sú potom bázové funkcie tvorené zmenami mierky a posunmi troch základných waveletov $\psi\varphi(x,y)$, $\varphi\psi(x,y)$, $\psi\psi(x,y)$ a funkcie mierky $\varphi\varphi(x,y)$:

$$\varphi\varphi(x,y) = \varphi(x)\varphi(y) \qquad \psi\varphi(x,y) = \psi(x)\varphi(y) \tag{4.9}$$

$$\varphi\psi(x,y) = \varphi(x)\psi(y) \qquad \psi\psi(x,y) = \psi(x)\psi(y)\,. \tag{4.10}$$

Realizácia oboch prípadov v dvoch rozmeroch a tvar výsledného spektra sú znázornené na obr. 4.4. Predpokladali sme rovnaký spôsob ukladania spektrálnych koeficientov, resp. tvar výsledného spektra 1D signálu ako je na obr. 1.18.

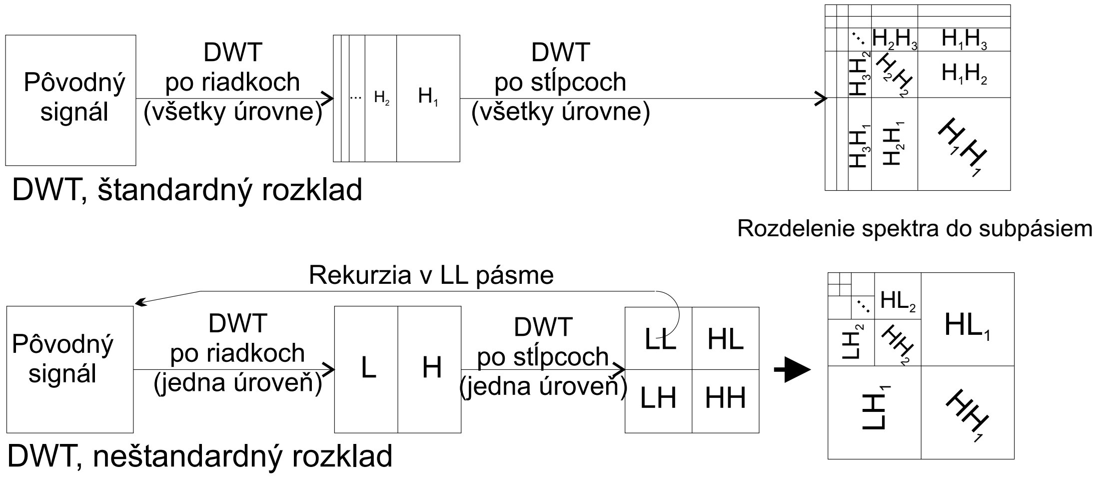
Pri štandardnom rozklade najprv spravíme úplnú transformáciu (t. j. všetky rozklady) v jednom smere (napr. v riadkoch) a následne úplnú transformáciu v druhom smere (t. j. v stĺpcoch).

Pri neštandardnom rozklade vykonáme v jednom a následne aj druhom smere iba jeden rozklad a potom tento postup opakujeme, ale iba v ľavej hornej štvrtine. Príklad neštandardného rozkladu aplikovaného na obrazové dáta je znázornený na obr. 4.5. Pri práci s 2D signálmi sa častejšie používa neštandardný prípad, ktorý má oproti štandardnému viaceré výhody, ako napríklad rýchlejší výpočet a efektívnejšiu reprezentáciu.

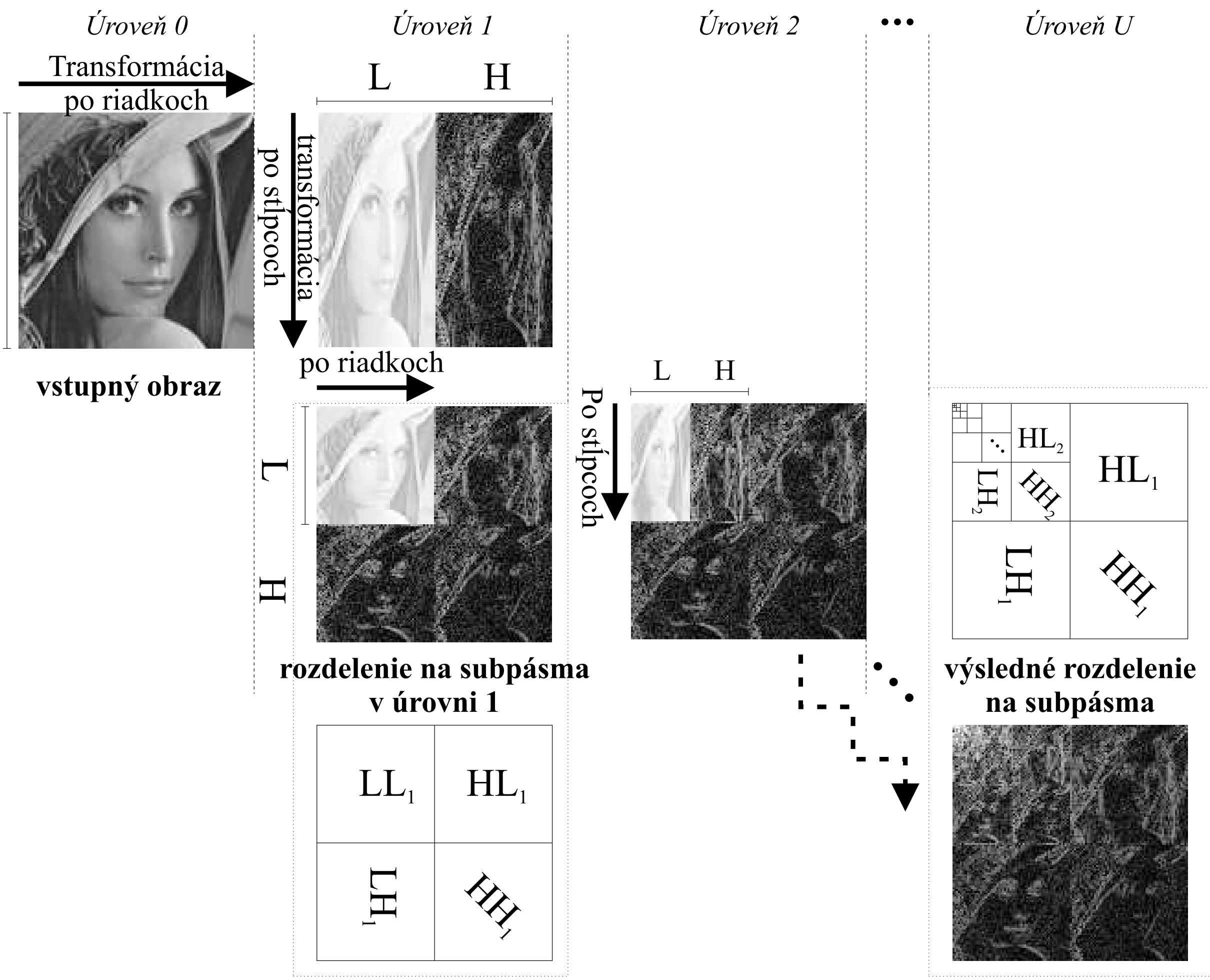
Pri neseparovateľných prípadoch viacrozmerných waveletov môžeme dosiahnuť vyššiu anizotropiu bázových funkcií a tým aj lepšie zachytiť lokálnu koncentráciu energie v signáli, pozri obr. 4.6a. Cenou za neseparovateľnosť systému je vyšší počet operácií pri transformácii. Transformácia sa obvykle rieši [41], [8] 2D filtráciou signálu vzorkovaného pomocou neseparovateľnej vzorkovacej mriežky (v 2D prípade zvyčajne tzv. *Quincunx* [17]). Príkladom neseparovateľných filtrov vhodných na 2D DWT sú tzv. Nevillove interpolačné filtre [41]. Príklady základných waveletov v separovateľnom a neseparovateľnom systéme sú znázornené na obr. 4.6a (jednorozmerné ekvivalenty dvoch z nich sú znázornené na obr. 4.1). Akým spôsobom sa prejaví anizotropia v separovateľnom systéme pri aproximácii obrazu je znázornené na obr. 4.6b.

4.2.1 Wavelety a kompresia obrazov

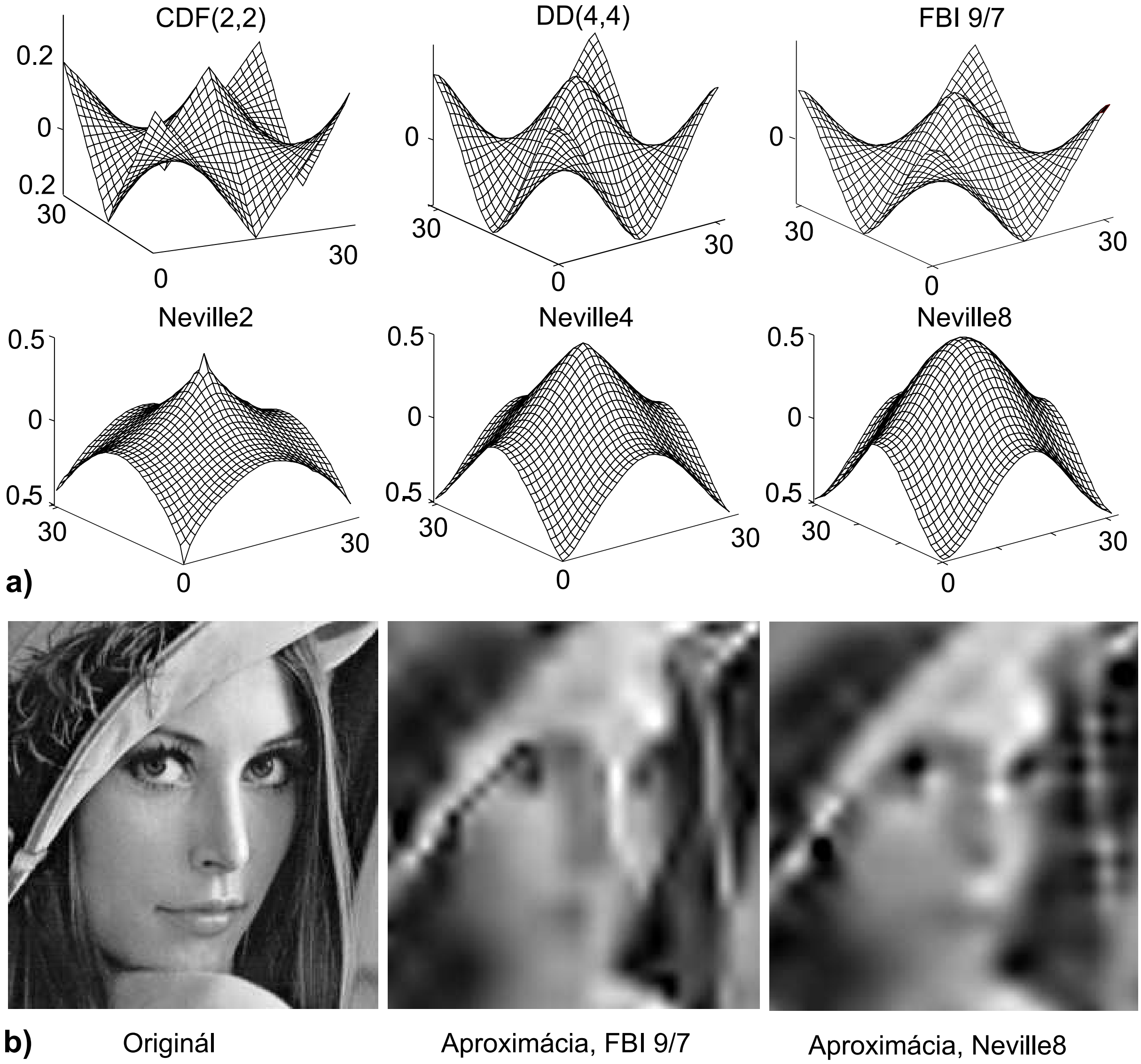
Dvojrozmerná waveletová transformácia sa dá efektívne využiť pri kompresii obrazu. V tejto oblasti je momentálne najúspešnejšia a je štandardizovaná v kompresnom



Obr. 4.4. Štandardný a neštandardný rozklad 2D signálu pomocou separovateľnej 2D DWT — výsledné tvary spektier a spôsoby ich výpočtu

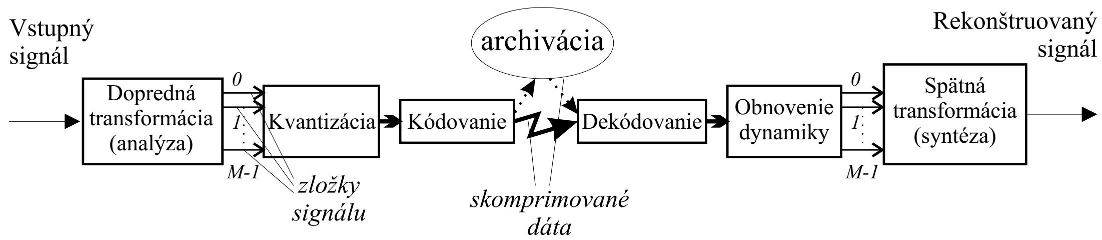


Obr. 4.5. Spôsob získania spektra obrazu pri separovateľnej 2D DWT s neštandardným rozkladom



Obr. 4.6. Separovateľné a neseparovateľné 2D wavelety a ich schopnosť aproximovať 2D signál: **a)** Základné wavelety v separovateľných systémoch (horný riadok, už známe wavelety a DD4 — Desalerious-Dubuc wavelet 4. rádu) a neseparovateľných systémoch (dolný riadok, založené na Nevillových filtroch 2., 4. a 8. rádu). Wavelety boli získané inverznou DWT na matici veľkosti 32×32. **b)** Porovnanie aproximačných vlastností separovateľného systému s FBI 9/7 waveletom a neseparovateľného systému s Nevillovými waveletmi 8.rádu. Výsledky sú zobrazené pri zachovaní 1/800 pôvodnej informácie a použití kompresného algoritmu SPIHT.

postupe JPEG 2000. Všeobecná schéma kompresného postupu využívajúceho transformáciu je znázornená na obr. 4.8. Najprv je vykonaná transformácia vstupného signálu (obrazu), aby sme ho mohli reprezentovať množinou jeho spektrálnych koeficientov, ktoré potom môžeme efektívne kvantovať (t. j. mapovať do menšej množiny diskrétnych symbolov, čo má za následok stratu informácie). Úlohou transformácie je predovšetkým dekorelovať obraz (oddeliť významnú zložku od nevýznamnej) a uľahčiť zohľadnenie percepčných kritérií pri následnej kvantizácii. Signál treba transformovať



Obr. 4.7. Všeobecná schéma transformačného kompresného/dekompresného postupu

tak, aby kvantizátor mohol odstrániť pokiaľ možno iba nepodstatnú resp. nadbytočnú informáciu. Posledným stupňom transformačného kódera je kóder symbolov, ktorý vykonáva reverzibilné mapovanie zdrojových symbolov do výstupného prúdu symbolov resp. bitov, pri súčasnom minimalizovaní bitovej náročnosti. Tento stupeň sa snaží odstrániť zbytkové korelácie prítomné medzi zdrojovými symbolmi. 2D DWT transformáciu zvyčajne interpretujeme ako rozklad na subpásma. Najdôležitejšie požiadavky na filtre resp. banku filtrov, ktorá implementuje danú transformáciu, môžeme potom zhrnúť [8]:

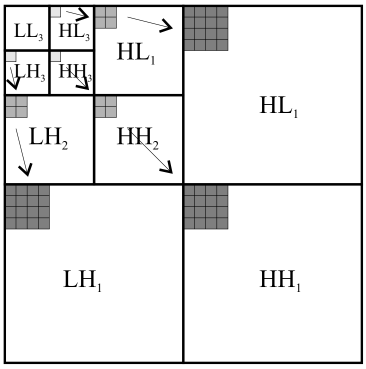
1. *Maximalizácia kompakcie energie* — keď transformácia rozkladá signál na M subpásiem, ktoré majú disperzie σ_j^2, môžeme definovať ***zisk transformačného kódovania*** ako [17]:
$$G_{TC} = \frac{\frac{1}{M}\sum_{j=0}^{M-1}\sigma_j^2}{(\prod_{j=0}^{M-1}\sigma_j^2)^{1/M}}. \tag{4.11}$$
G_{TC} udáva pomer rekonštrukčných chýb pri PCM kódovacej schéme a aktuálnom *transformačnom kódovaní* (TC) pri rovnakom objeme výstupných dát. Vyšší zisk kódovania podmieňuje spravidla vyššia K-regularita filtrov.

2. *Minimalizácia energie aliasingu* — v BF sú za normálnych okolností zaručené podmienky na elimináciu aliasingu. Ak sa však pri syntéze nepoužijú všetky subpásma, alebo v subpásmach je rôzny kvantizačný šum, bude rekonštruovaný signál naďalej obsahovať nežiaduce komponenty.

3. *Dĺžka filtrov a „efekt zvonenia“* - dobré oddelenie subpásiem alebo vysoká regularita vyžaduje dlhé filtre. Ich nevýhodou je, že šíria kódovacie chyby, čo na hranách v obraze spôsobuje tzv. „***efekt zvonenia***“ (dôsledok striedania znamienok v impulzových charakteristikách filtrov). Hrany v obrázku reprezentujeme jednotkovým skokom [21]. Potom je cieľom minimalizovať rozdiel medzi jednotkovým skokom a odpoveďou filtra na jednotkový skok.

Pri kódovaní obrazu treba relatívne krátke a „hladké“ filtre s určitou regularitou [8]. Ak v biortogonálnych systémoch nie je možné dosiahnuť regularitu pri analýze aj syntéze, je lepšie použiť regulárnu syntézu, čím zabránime tzv. „šachovnicovému“ efektu.

V čom spočíva výnimočnosť waveletovej transformácie? Oproti transformáciám Fourierovského typu má štrukturovanú bázu. Následkom toho umožňuje reprezentáciu signálu na rôznych úrovniach rozlíšenia a postupný prenos tejto informácie až po želanú kvalitu reprezentácie. Naviac existujú v 2D waveletovom spektre hierarchie koeficientov, ktoré zodpovedajú približne rovnakej priestorovej oblasti v obraze,



Obr. 4.8. Tvar spektra pri 2D DWT s neštandardným rozkladom. Vyznačené sú hierarchické závislosti medzi magnitúdami koeficientov vypovedajúcich o tej istej časti pôvodného signálu.

pozri obr. 4.8. V týchto hierarchiach existujú výrazné závislosti medzi hodnotami spektrálnych koeficientov. Avšak nejde o závislosti lineárne (wavelety skutočne odstraňujú lineárne závislosti veľmi účinne), ale o výrazné závislosti v *magnitúdach koeficientov*. Túto vlastnosť spektra DWT využívajú viaceré algoritmy na kompresiu obrazu, napr. SPIHT [49] a JPEG 2000 [50]. Hierarchie s nevýznačnými koeficientmi sa nazývajú ***stromy núl*** [48]. Algoritmy využívajúce hierarchické závislosti sa snažia stromy núl vyhľadávať a následne ich obchádzať pri kódovaní (zakódovať iba ich polohu).

Pri kódovaní obrazu je často dôležitá schopnosť tzv. ***postupného prenosu informácie***, kde vyžadujeme prednostný prenos informácie, ktorá nám najviac redukuje chybu pri rekonštrukcii. Potom hovoríme o tzv. ***progresívnych kóderoch***.

Označme body pôvodného obrazu $\mathbf{p}$, spektrálne waveletové koeficienty $\mathbf{d}$ a ich rekonštruované verzie $\hat{\mathbf{p}}$, resp. $\hat{\mathbf{d}}$. Potom miera skreslenia E v zmysle strednej kvadratickej chyby (MSE) je pre ortonormálne transformácie invariantná, t. j.:

$$\frac{\sum_i \sum_j (p_{i,j} - \hat{p}_{i,j})^2}{N} = E_{mse}(\mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}}) = E_{mse}(\mathbf{d} - \hat{\mathbf{d}}) = \frac{\sum_i \sum_j (d_{i,j} - \hat{d}_{i,j})^2}{N}, \tag{4.12}$$

kde N je počet spektrálnych koeficientov. Zo vzťahu 4.12 je zrejmé, že vyslanie presnej hodnoty $d_{i,j}$ do dekódera zníži MSE o $|d_{i.j}|^2/N$. Z toho vyplýva, že koeficienty s väčšou magnitúdou by mali byť prenesené prvé, lebo obsahujú viac informácií.

Tento postup sa dá ešte zefektívniť, ak sa pozrieme priamo na binárnu reprezentáciu $|d_{i.j}|^2/N$ a v zmysle predchádzajúcich úvah budeme prenášať ako prvé ich najdôležitejšie bity a až potom menej význačné bity. Ide v istom zmysle o kódovanie bitových rovín.

Uvedené princípy sú bližšie popísané v nasledujúcej časti na príklade algoritmu SPIHT. Kódovací algoritmus v štandarde JPEG 2000 pracuje na rovnakých princípoch.

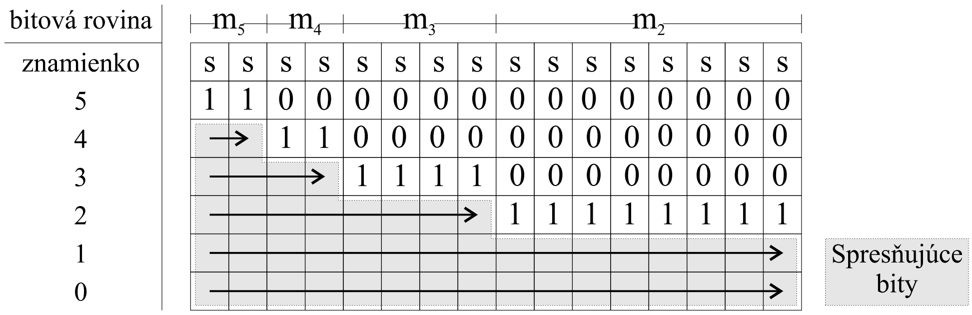
Algoritmus SPIHT

Algoritmus SPIHT (Set Partitioning In Hierarchical Trees) z r. 1996 [49] je progresívny kóder umožňujúci stratovú aj bezstratovú kompresiu. Pri stratovej používa biortogonálnu DWT s FBI 9/7 filtrami a pri bezstratovej celočíselnú S+P DWT (pozri časť 5.2.5). SPIHT je založený na troch konceptoch:

1. čiastočné zoradenie koeficientov podľa magnitúdy s prenosom pozičnej informácie pomocou algoritmu na triedenie do množín (algoritmus je duplikovaný v dekóderi)

2. postupný prenos zoradených bitových rovín

3. využitie hierarchickej štruktúry spektra DWT



Obr. 4.9. Príklad koeficientov utriedených podľa magnitúdy

Podstatné sú najmä procesy ako sú množiny koeficientov delené a ako je informácia o význačnosti koeficientov prenášaná. Nech koeficienty sú zoradené podľa počtu bitov potrebných na binárnu reprezentáciu ich magnitúdy (pozri obr. 4.9). Dekóder potrebuje na rekonštrukciu koeficientov:

1. informáciu o zoradení (neprenáša sa, v dekóderi je tvorená duplikovaním triediaceho algoritmu)

2. čísla μ_n zodpovedajúce počtu koeficientov $d_{i,j}$ takých, že $2^n \leq |d_{i,j} < 2^{n+1}|$

3. spresňujúce bity.

Zjednodušená implementácia progresívneho prenosu informácií je potom nasledovná:

1. pošli $n = \lfloor log_2(max_{(i,j)}|d_{i,j}|) \rfloor$ do dekódera

2. pošli μ_n a znamienko pre každý zodpovedajúci koeficient (triediaci krok)

3. pošli n-tý najvýznačnejší bit pre všetky koeficienty $d_{i,j}$ pre ktoré $|d_{i,j}| \geq 2^{n+1}$ (spresňujúci krok)

4. zmenši n o 1 a choď na krok 2.

Celý algoritmus má pri kódovaní a dekódovaní rovnakú zložitosť. Príjemná vlastnosť je, že dekóder môže byť identický s kóderom, pričom namiesto „pošli“ vykonáme „načítaj“.

Čísla μ_n sú prenášané nepriamo pomocou koeficientov význačnosti. Tie sú ďalej kódované pomocou adaptívneho aritmetického kódera. Znamienka a spresňovacie bity nie sú ďalej kódované. Reprezentatívny výsledok použitia algoritmu SPIHT a štandardu JPEG [47] pri vyšších kompresných pomeroch je na obr. 4.10.

a) Originál
256 x 256 bodov, 8 bpp

b) JPEG 5.2 (quality 4)
0.138 bpp, MSE = 212.2

c) SPIHT
0.138 bpp, MSE = 117.6

Obr. 4.10. Príklad kompresie statického obrazu pomocou algoritmu SPIHT a štandardom JPEG pri kompresnom pomere 58 : 1

4.3 *M*-pásmové wavelety

Koncept M-pásmových waveletov predstavuje zovšeobecnenie systémov dyadických waveletov. V AVR pri dyadických waveletoch bola dilatačná rovnica pre funkciu mierky daná vzťahom (1.51). Jej M-pásmovým zovšeobecnením je vzťah:

$$\varphi(t) = \sqrt{M} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n)\, \varphi(Mt - n) \qquad M \in \mathcal{Z} \quad M > 2\,. \tag{4.13}$$

Čo platí pre $h_{mr}(n)$, ak báza tvorená pomocou takýchto $\varphi(t)$ je ortonormálna? Označme $h_{mr}(n) = h(n)$. Analogicky ako pri vlastnostiach ortonormálnych DWT platí [23]:

$$\sum_n h(n) = \sqrt{M} \tag{4.14}$$

$$\sum_n h(Mn + m) = 1/\sqrt{M} \qquad H(2\pi\, l/M) = 0 \qquad l = 0, 1, \ldots, M-1 \tag{4.15}$$

$$\sum_n h(n + Mm)\, h(n) = \delta(m) \qquad \sum_n h(n)^2 = 1 \tag{4.16}$$

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega + 2\pi/M)|^2 + \ldots + |H(\omega + 2\pi(M-1)/M)|^2 = M\,. \tag{4.17}$$

Aká je situácia so zodpovedajúcimi waveletmi? Nemáme jeden základný wavelet, ale $M-1$ základných waveletov $\psi_k(t)$:

$$\psi_k(t) = \sqrt{M} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_k(n)\, \varphi(Mt - n) \qquad k = 0, 1, \ldots, M-1\,. \tag{4.18}$$

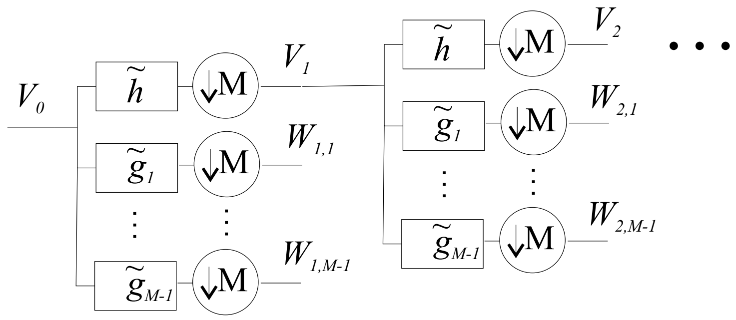
Čomu na každej úrovni rozlíšenia zodpovedá $M-1$ diferenčných priestorov $\mathcal{W}_{m,l}$. T. j. pre AVR platí:

$$\mathcal{V}_m = \mathcal{V}_{m+1} \oplus \mathcal{W}_{m+1,1} \oplus \mathcal{W}_{m+1,2} \oplus \ldots \oplus \mathcal{W}_{m+1,M-1}\,. \tag{4.19}$$

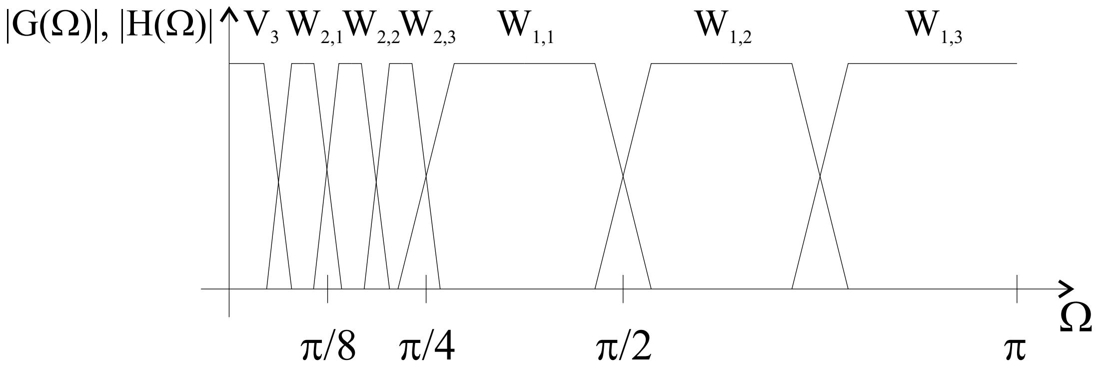
Všetky základné wavelety sú ortogonálne k funkcii mierky, t. j. :

$$\int \varphi(t-n)\, \psi_k(t-m) = 0 \qquad \sum_n h(n)\, g_k(n - Mk) = 0 \qquad k = 0, 1, \ldots, M-1\,. \tag{4.20}$$

Čo sme získali zovšeobecnením dyadických waveletov na M-pásmové ?



Obr. 4.11. Realizácia M-pásmovej DWT bankami filtrov (schématické znázornenie analyzačnej časti) pre $M = 4$



Obr. 4.12. M-pásmová DWT, schématické znázornenie častí frekvenčného spektra zodpovedajúce jednotlivým podpriestorom v AVR pre $M = 4$

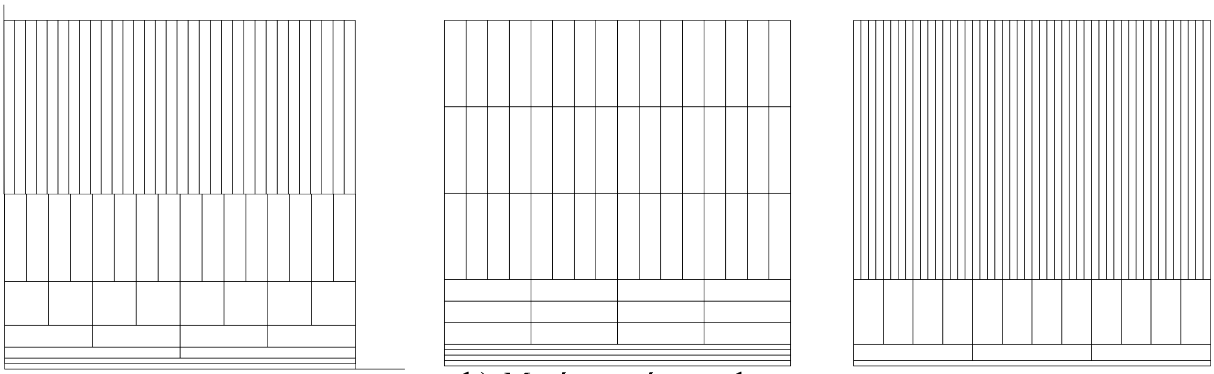
- Stupne voľnosti — je veľa rôznych ortogonálnych waveletov k danej funkcii mierky
- Časovo-frekvenčnú rovinu môžeme deliť lineárne aj logaritmicky (prípadne kombináciou oboch)

> *M-adické wavelety dostaneme, ak pri M-pásmových waveletoch zvolíme $M - 1$ waveletov rovnakých. Vznikne čisto logaritmické delenie TF roviny vo frekvencii pri najhustejšom delení v čase.*

M-pásmová waveletová transformácia (ako je už zrejmé z názvu) je realizovaná M-pásmovou bankou filtrov, pozri obr. 4.11.Schématické znázornenie častí frekvenčného spektra zodpovedajúce jednotlivým podpriestorom v AVR je znázornené na obr. 4.12. Možnosti delenia TF roviny a ich porovnanie s delením TF roviny pri dyadických waveletoch je na obr. 4.13.

4.4 Multiwavelety (*R*-wavelety)

Multiwavelety [36], [37], nazývané aj ***R-wavelety*** sú zovšeobecnením M-pásmových waveletov v tom zmysle, že síce máme v AVR jednu hierarchiu aproximačných pod-



a) dyadické wavelety

b) M-pásmové wavelety (max. delenie vo frekvencii)

c) M-pásmové wavelety (identické wavelety) = M-adické wavelety

Obr. 4.13. Porovnanie delenia TF roviny pri dyadických a štvorpásmových waveletoch: **a)** dyadické wavelety **b)** štvorpásmové wavelety (3 rôzne wavelety zaberajúce svojimi posunmi rôzne frekvenčné pásma) **c)** štvorpásmové wavelety a ich špeciálny prípad 4-adické wavelety — všetky 3 wavelety sú rovnaké, získali sme najlepšie rozlíšenie v čase.

priestorov:

$$\{0\} \ldots \subset \mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_{-1} \subset \mathcal{V}_{-2} \ldots L^2(\mathcal{R}) , \tag{4.21}$$

avšak bázy priestorov $\mathcal{V}_m$ sú tvorené pomocou R funkcií mierky $\varphi_k\,(t)$:

$$\left\{\varphi_{k,m,n}\,(t) = 2^{-m/2}\varphi_k\left(2^{-m}t - n\right), \, n \in \mathcal{Z}\right\} \quad k = 0, \ldots, R-1\,. \tag{4.22}$$

Keďže $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_0$, pre vektor funkcií mierky $\Phi\,(t) = [\varphi_0\,(t)\,, \ \ldots\,, \ \varphi_{R-1}\,(t)]^T$ platí:

$$\Phi\,(t) = \sqrt{2}\sum_n \mathbf{H}\,(n)\Phi\,(2t-n)\ , \tag{4.23}$$

kde $H(n)$ je postupnosť štvorcových matíc rozmeru RxR. Z vlastností AVR vyplýva, že existuje vektor základných waveletov $\Psi\,(t) = [\psi_0\,(t)\,, \ \ldots\,, \ \psi_{R-1}\,(t)]^T$, pre ktorý platí:

$$\Psi\,(t) = \sqrt{2}\sum_n \mathbf{G}\,(n)\Phi\,(2t-n)\ , \tag{4.24}$$

kde $G(n)$ je postupnosť štvorcových matíc rozmeru $R \times R$.

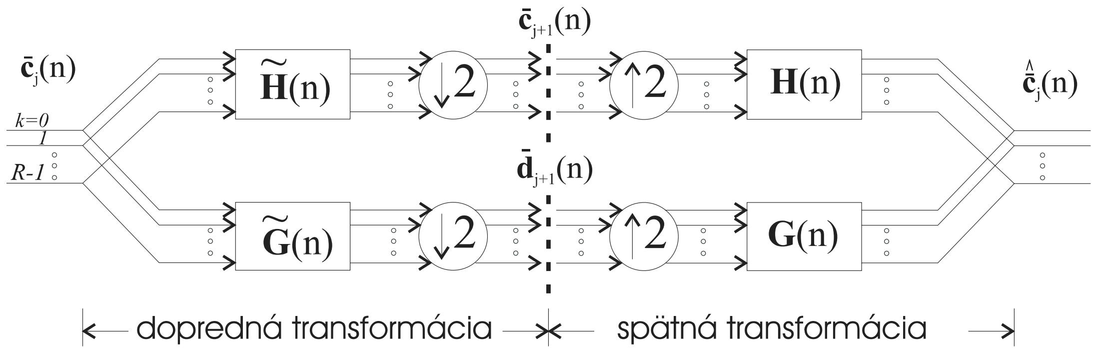
Pri multiwaveletových radoch a diskrétnej multiwaveletovej transformácii je možné symetrické a zároveň ortogonálne riešenie.

Ako počítame ***multiwaveletové rady*** (MWR)?

1. Zvolíme počiatočné $\mathcal{V}_m$ tak, aby bol vstupný signál $s(t)$ aproximovaný s dostatočnou presnosťou.

2. Počiatočné koeficienty mierky vytvoríme ako vektor počiatočných projekcií signálu $x(t)$ do $\mathcal{V}_m$ takto:

$$\mathbf{C}_m\,(n) = [c_{0,m}\,(n)\,, \ \ldots\,, \ c_{R-1,m}\,(n)]^T\ , \tag{4.25}$$



Obr. 4.14. Princíp výpočtu multiwaveletovej transformácie vektorovou bankou filtrov

kde

$$c_{i,m}\left(n\right) = \left\langle s\left(t\right), \varphi_{i,m,n}\left(t\right)\right\rangle \,. \tag{4.26}$$

3. Ďalej pokračujeme ich rozkladom:

$$\mathbf{C}_{m+1}\left(k\right) = \sqrt{2}\sum_{n}\tilde{\mathbf{H}}\left(n\right)\mathbf{C}_{m}\left(2k+n\right) \quad \mathbf{D}_{m+1}\left(k\right) = \sqrt{2}\sum_{n}\tilde{\mathbf{G}}\left(n\right)\mathbf{C}_{m}\left(2k+n\right)\,, \tag{4.27}$$

kde

$$\tilde{\mathbf{H}}\left(n\right) = \mathbf{H}\left(-n\right) \tilde{\mathbf{G}}\left(n\right) = \mathbf{G}\left(-n\right)\,. \tag{4.28}$$

Pri rekonštrukcii platí:

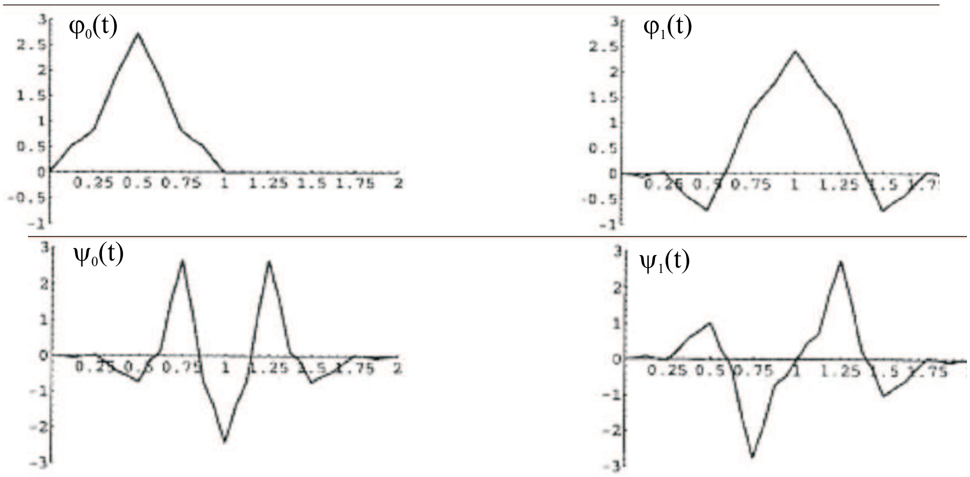
$$\mathbf{C}_{m}\left(n\right) = \sqrt{2}\sum_{k}\left[\mathbf{H}\left(k\right)\mathbf{C}_{m}\left(2k+n\right) + \mathbf{G}\left(k\right)\mathbf{D}_{m}\left(2k+n\right)\right]. \tag{4.29}$$

Ako vypočítame ***diskrétnu multiwaveletovú transformáciu*** (MDWT)? Pomocou tzv. vektorových bánk filtrov, pozri obr. 4.14. Pritom platí:

- signál spracúvame paralelne v dávkach o veľkosti R
- pri inicializácii nemôžeme jednoducho zobrať susedné vzorky signálu ako vstup pre jednu dávku (ako pri klasických waveletoch), lebo naše $\varphi_k(t)$ existujú v čase naraz, takže je potrebná predfiltrácia zodpovedajúca projekcii.

Ako príklad praktickej realizácie multiwaveletov si uveďme Geronimo-Hardin- Massopust (GHM) multiwavelety (pozri, obr. 4.15). Ich vlastnosti môžeme zhrnúť takto:

- množiny $\{\varphi_0\left(t-n\right), \ldots, \varphi_{R-1}\left(t-n\right)\}$, $\{\psi_0\left(t-n\right), \ldots, \psi_{R-1}\left(t-n\right)\}$, $n \in \mathcal{Z}$ sú ortogonálne
- bázové funkcie sú symetrické
- funkcie mierky sú schopné reprodukovať lineárne funkcie.



Obr. 4.15. Geronimo-Hardin-Massopust (GHM) multiwavelety a ich funkcie mierky pri $R = 2$

Nech $R = 2$, potom GHM postupnosti matíc $H(n)$ a $G(n)$ majú dĺžku 4:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{H}(0) = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4\sqrt{2}}{5} \\ -\frac{1}{10\sqrt{2}} & -\frac{3}{10} \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}(1) = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{9}{10\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \mathbf{H}(2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{9}{10\sqrt{2}} & -\frac{3}{10} \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}(3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{10\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \\
&\mathbf{G}(0) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -3 \\ 1 & 3\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{G}(1) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} \frac{9}{\sqrt{2}} & -10 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \mathbf{G}(2) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} \frac{9}{\sqrt{2}} & -3 \\ 9 & -3\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{G}(3) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} .
\end{aligned}
\tag{4.30}
$$

4.5 Waveletové pakety

Doteraz sme pri waveletoch a ich rozšíreniach rozkladali v priebehu transformácie iba koeficienty v aproximačných priestoroch $\mathcal{V}_m$. Waveletová paketová transformácia (WPT) rozklad v *nezmenenej podobe* aplikuje aj na diferenčné podpriestory $\mathcal{W}_m$ [23]. Tým sa celá situácia v AVR mení, vznikajú nové „diferenčné“ podpriestory. V prípade dyadických waveletov sa celá situácia najlepšie znázorní binárnym stromom, pozri obr. 4.16a. Aproximačné priestory sú na ľavej strane binárneho stromu, ktorý je vpravo *neohraničený*. Reprezentácia signálu celým stromom je výrazne nadbytočná. Stačí použiť iba jeho malú, vhodne vybranú časť, ako je to aj na obrázku naznačené. Tomu, v akých podpriestoroch je signál reprezentovaný zodpovedá špecifické delenie časovo-frekvenčnej roviny, pozri obr. 4.16b. WPT umožňuje adaptívne resp. optimalizované delenie časovo-frekvenčnej roviny a teda použitie iba istej, optimalizovanej časti kompletného waveletového paketového stromu na reprezentáciu signálu, pozri 4.16c. Výber najvhodnejšej stromovej štruktúry je ekvivalentný s hľadaním ***najlepšej bázy*** [35]. Najbežnejšie kritérium pre výber najlepšej reprezentácie signálu, formulované pomocou tzv. *nákladovej funkcie* λ, je minimalizácia entropie reprezentácie signálu (Wickerhauser, Coifman). Ak dĺžka signálu je N, potom pre α, počet možných WPT báz platí:

$$\alpha \geq 2^{N/2} \,. \tag{4.31}$$

Ako teda vyberať najlepšiu bázu, keď ich je tak veľa? Najjednoduchšie je rozhodovať sa priamo počas rozkladov. T. j. pomocou nákladovej funkcie λ sa rozhodujeme, či rozklad realizujeme alebo nie, podľa toho, či by náklady rozložením vzrástli alebo klesli. Kritériom musí byť taká nákladová funkcia, ktorej aditivita sa rozkladom pri DWT zachováva, napríklad Shannonova entropia E [34]. Označme $s(n)$ ako vstupný signál, potom:

$$E\left(s\right) = -\sum_{n} s\left(n\right)^{2} \log\left[s\left(n\right)^{2}\right] \tag{4.32}$$

s konvenciou $0\log(0) = 0$. Kritérium teda je:

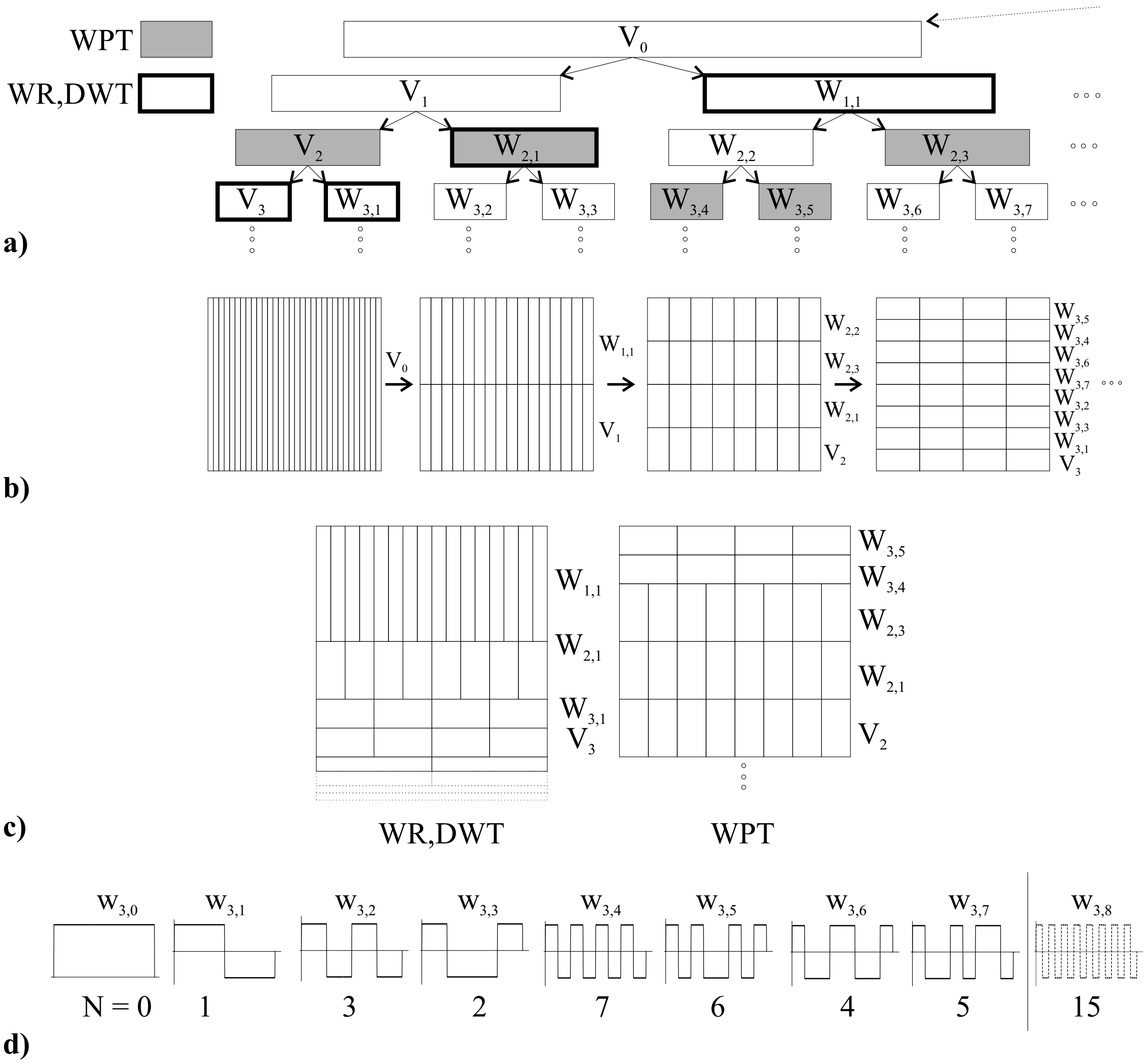
Ak suma Shannonových entropií 2 subpásiem, ktoré vznikli rozdelením pôvodného subpásma, je menšia ako entropia pôvodného subpásma, je výhodné rozdelenie uskutočniť.

Aká je situácia s bázovými funkciami pri WPT? Tým že rozkladáme aj diferenčné priestory, vznikajú bázové funkcie poskladané viacerými spôsobmi z waveletov a funkcií mierok, ktoré sa nazývajú ***waveletové pakety***. Označme ich $w(t)$. Bázy priestorov $\mathcal{W}_{m,k}$ sú potom tvorené posunmi $w_{m,n}(t)$. Ďalej stotožníme priestor $\mathcal{V}_m$ s priestorom $\mathcal{W}_{m,0}$. Uvedomme si, že platí:

$$w_{m,0}(t-n) = \varphi_m(t-n) \qquad\qquad w_{m,1}(t-n) = \psi_m(t-n) \,. \tag{4.33}$$

Waveletové pakety sa môžu od waveletov a funkcií mierky podstatne líšiť. Situácia je najvypuklejšia pri *úplnom rozklade*, pozri obr. 4.16d. Vidíme, že všetky bázové funkcie majú nosič na celom intervale, čo je ekvivalentné úplnej strate rozlíšenia v čase v TF rovine (analogicky ako je to pri DFT). Ak si vyjadríme počet prechodov nulou pre Haarove $w_{m,k}$ v závislosti od k, dostaneme postupnosť $0, 1, 3, 2, 7, 6, 4, 5$. Z počtu prechodov nulou môžeme usúdiť na polohu frekvenčného pásma, ktoré približne zodpovedá posunom $w_{m,k}$. Vidíme, že pri úplnom rozklade vo WPT nie sú frekvenčné pásma zoradené vzostupne, t. j. v prirodzenom poradí. Ich poradie sa nazýva Palleyho a späť do prirodzeného poradia ich môžeme preusporiadať pomocou Grayovho kódu a reverziou bitov. V prípade Haarovej WPT s úplným rozkladom dostávame transformáciu ekvivalentnú s Walshovou transformáciou v Palleyho poradí [6].

Na obr. 4.16d je znázornený aj paket $w_{3,8}$. Vidíme, že jeho znázornenie v TF rovine by bolo mimo oblasti zobrazenej na obr. 4.16a a na obr. 4.16b. Je dôležité si uvedomiť, že rastom indexu k, sa hýbeme horizontálnym rezom v celom binárnom strome priestorov $\mathcal{W}_{m,k}$. Pri aktuálnej polohe v reze teda môžeme mať predchodcov, ktorým zodpovedá v TF rovine úplne iná poloha.



Obr. 4.16. Princíp delenia podpriestorov v AVR pri dyadickej waveletovej paketovej transformácii: **a**) Umiestnenie podpriestorov v binárnom strome podpriestorov pri WR resp. DWT a príkladu WPT **b**) Spôsob delenia TF roviny zodpovedajúce zobrazenej časti binárneho stromu **c**) Reprezentácia priestorov v TF rovine pre WR a príklad WPT z časti (a) **d**) príklad Haarových waveletových paketov a rast počtu N ich prechodov nulou

Kapitola 5

Liftingová schéma a polyfázový rozklad

Liftingová schéma [38], [39] predstavuje výhodný spôsob realizácie výpočtov v bankách filtrov. Jednoducho opisuje závislosti medzi pármi filtrov, ktoré zdieľajú ten istý HP, resp. DP filter. Poskytuje postup ako môžeme začať z triviálneho prípadu „lenivého“ waveletu a postupne vybudovať pár filtrov (a zodpovedajúce AVR) s požadovanými vlastnosťami. Odtiaľ pochádza aj názov „***lifting***“, t. j. „dvíhanie“ vlastností waveletov. Pomocou liftingu získané wavelety sa zvyknú nazývať aj wavelety druhej generácie [39]. Liftingová schéma umožňuje efektívne realizovať klasické WT s nasledovnými výhodami:

- urýchlenie implementácie WT (napr. v 1D prípade až dvojnásobne)
- jednoduchý návrh vlastných WT (naviac so zaručenou invertovateľnosťou)
- možnosť realizovať *každú* WT ako celočíselnú
- možnosť vykonať výpočty bez použitia prídavnej pamäte (t. j. „in-place“)

Zároveň však liftingová schéma svojou štruktúrou umožňuje jednoduché a výrazné rozšírenia klasickej WT, ktoré môžeme zhrnúť v týchto bodoch:

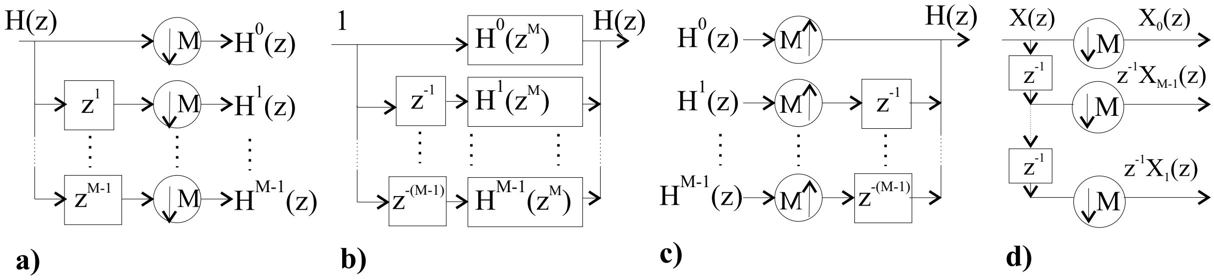
- konštrukcia nelineárnych WT [46]
- použitie WT pre nerovnomerne vzorkované signály
- konštrukcia WT na intervaloch, krivkách, povrchoch [44]

Matematické základy liftingovej schémy sú založené na koncepte polyfázovej reprezentácie bánk filtrov, ktorej sa budeme venovať v nasledujúcej časti. Interpretácia jednotlivých krokov v liftingovej schéme je úzko spätá s predikciou signálov. Použitím konceptu predikcie signálu vysvetlíme štruktúru liftingovej schémy v časti 5.2. Ďalej analyzujeme realizáciu bánk filtrov liftingovou schémou zlúčením oboch konceptov — predikčného a polyfázovej reprezentácie bánk filtrov.

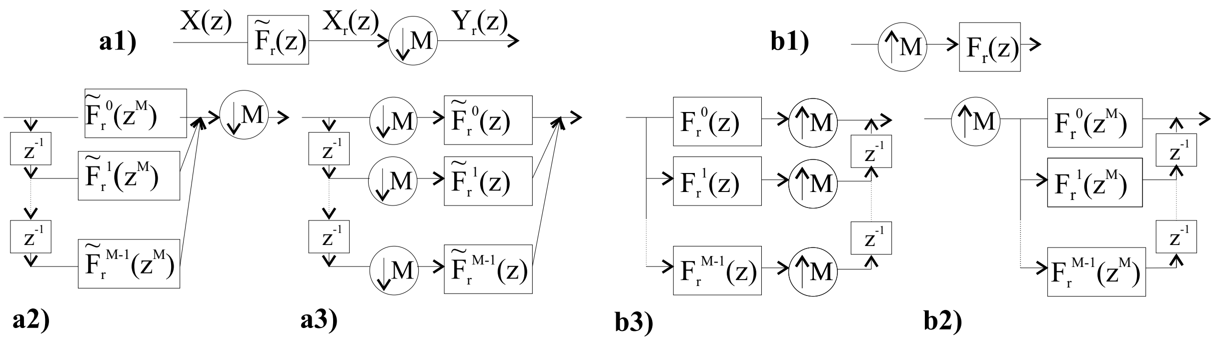
5.1 Polyfázová reprezentácia bánk filtrov

Pri systémoch s rôznym taktovaním je často vhodné reprezentovať filtre (ale aj signály) ich tzv. ***polyfázovými zložkami***. Filter s prenosovou funkciou $H(z)$ a impulzovou charakteristikou $h(n)$ môžeme rozložiť na M polyfázových zložiek $H^k(z)$ pomocou vzťahu:

$$H^k(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(k + Mn)\, z^{-n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, M-1\,, \tag{5.1}$$



Obr. 5.1. Polyfázová reprezentácia prenosovej funkcie $H(z)$: **a**) rozklad na M polyfázových zložiek $H^k(z)$ **b**) spätné zloženie prenosovej funkcie zodpovedajúce vzťahu (5.2) **c**) ekvivalent (b), avšak v tvare, keď vyniká jeho dualita s rozkladom (a) **d**) Tvar polyfázového rozkladu, ak chceme použiť iba oneskorenia, porovnaj s (a).



Obr. 5.2. Polyfázové ekvivalencie pri decimácii a interpolácii: **a1) – a3)** ekvivalencie pre decimáciu **b1) – b3)** ekvivalencie pre interpoláciu

resp. prenosovú funkciu z nich môžeme spätne zložiť pomocou:

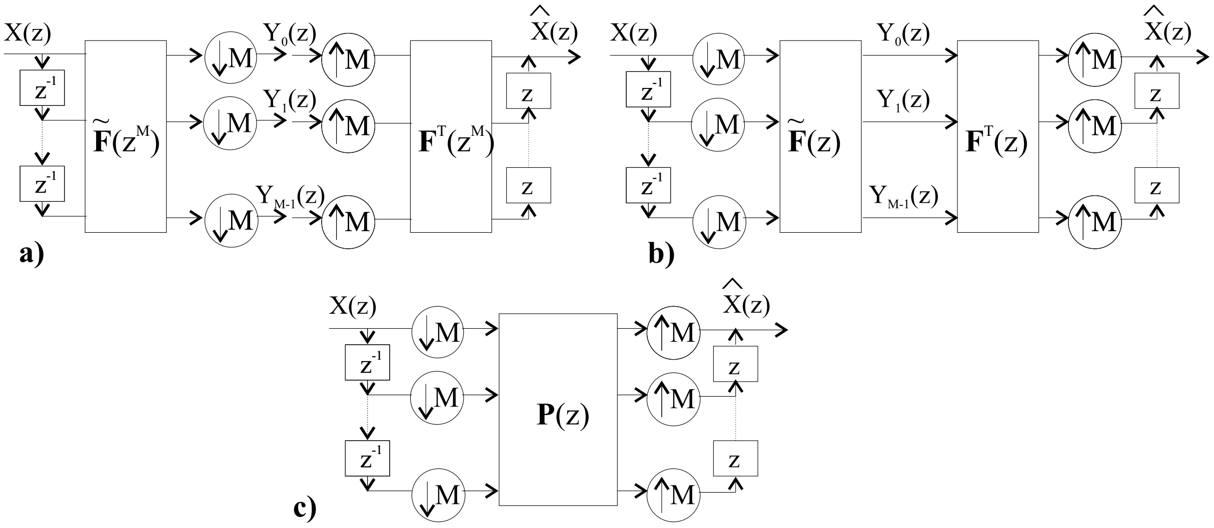
$$H\left(z\right)=\sum_{k=0}^{M-1} z^{-k} H^{k}\left(z^{M}\right). \tag{5.2}$$

Potom hovoríme o ***polyfázovej reprezentácii*** $H(z)$ pomocou jej polyfázových zložiek $H^k(z)$. Rozklad na polyfázové zložky je schématicky zobrazený na obr. 5.1a a spätné zloženie prenosovej funkcie na obr. 5.1b. Použitím vzťahu (3.13) môžeme zloženie vyjadriť aj v tvare ako na obr. 5.1c, v ktorom vynikne jeho dualita s rozkladom obr. 5.1a.

Na základe obr. 5.1 s použitím základných ekvivalencií vo VR systémoch (3.2) môžeme operáciu decimácie a interpolácie znázorniť v tvaroch ako na obr. 5.2. Vidíme, že vďaka mocninám z^M môžeme filtráciu presúvať za podvzorkovanie a pred nadvzorkovanie.

Skúsme pomocou polyfázového rozkladu zapísať M-pásmovú banku filtrov (obr. 3.5). Každú vetvu v analyzačnej časti môžeme reprezentovať pomocou obr. 5.2a2. Pre signály v jednotlivých vetvách po filtrácii ($X_r(z)$), platí:

$$\begin{pmatrix} Y_0\left(z\right) \\ Y_1\left(z\right) \\ \vdots \\ Y_{M-1}\left(z\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{F}_0^0\left(z^M\right) & \tilde{F}_0^1\left(z^M\right) & \cdots & \tilde{F}_0^{M-1}\left(z^M\right) \\ \tilde{F}_1^0\left(z^M\right) & \tilde{F}_1^1\left(z^M\right) & \cdots & \tilde{F}_1^{M-1}\left(z^M\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{F}_{M-1}^0\left(z^M\right) & \tilde{F}_{M-1}^1\left(z^M\right) & \cdots & \tilde{F}_{M-1}^{M-1}\left(z^M\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ z^{-1} \\ \vdots \\ z^{-(M-1)} \end{pmatrix} X(z) =$$



Obr. 5.3. Polyfázová reprezentácia M-pásmovej banky filtrov: **a)** použité polyfázové matice pre analýzu a syntézu **b)** presunuté pod- a nadvzorkovanie **c)** zlúčenie polyfázových matíc

$$= \quad \tilde{\mathbf{F}}_{\mathbf{p}}(\mathbf{z}^{\mathbf{M}})\tilde{\mathbf{Z}}_{\mathbf{M}}\mathbf{X}(\mathbf{z}) \, , \tag{5.3}$$

kde $\tilde{\mathbf{F}}_p$ je ***polyfázová matica*** pre analýzu a $\tilde{F}_r^k(z)$ je k-ta polyfázová zložka r-teho filtra pre analýzu. Tvar matice $\tilde{\mathbf{Z}}_{\mathbf{M}}$ vyplýva z reprezentácie na obr. 5.1d. Po decimácii, môžeme signály $Y_r(z)$ na základe obr. 5.2a3 vyjadriť v jednotlivých vetvách pomocou polyfázovej matice a polyfázových zložiek signálu $X(z)$ takto:

$$\begin{pmatrix} Y_0(z) \\ \vdots \\ Y_{M-1}(z) \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{F}}_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & z^{-1} \\ 0 & 0 & \iddots & 0 \\ 0 & z^{-1} & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^0(z) \\ \vdots \\ X^{M-1}(z) \end{pmatrix} . \tag{5.4}$$

Polyfázová matica pre syntézu F_p má rovnaký tvar ako $\tilde{\mathbf{F}}_p$, sú v nej však použité polyfázové zložky $F_{r,k}(z)$ filtrov pre syntézu. Celú banku filtrov môžeme použitím tohoto prístupu prepísať do tvarov schématicky znázornených na obr. 5.3. Z vlastností BF vyplýva, že F_p je treba v syntéze používať v transponovanom tvare. Podmienku úplnej rekonštrukcie potom môžeme formulovať v tvare:

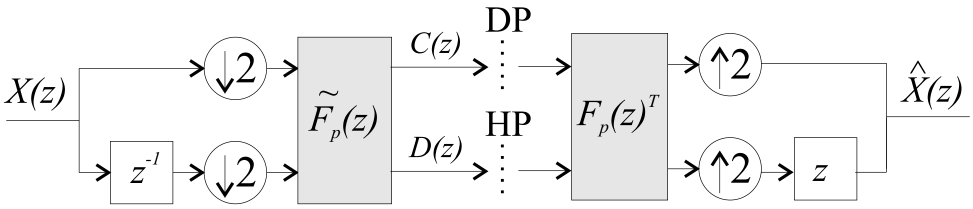
$$\tilde{\mathbf{F}}_p(z)\,\mathbf{F}_p^T(z) = \mathbf{P}(z) = \mathbf{I}\,z^l \quad l \in \mathcal{Z} \, . \tag{5.5}$$

Analýza M-pásmových bánk filtrov v polyfázovom tvare je náročná (pozri napr. [17], [21]) a pre naše účely nie je potrebná. V ďalšej časti sa budeme bližšie venovať dvojpásmovej banke filtrov.

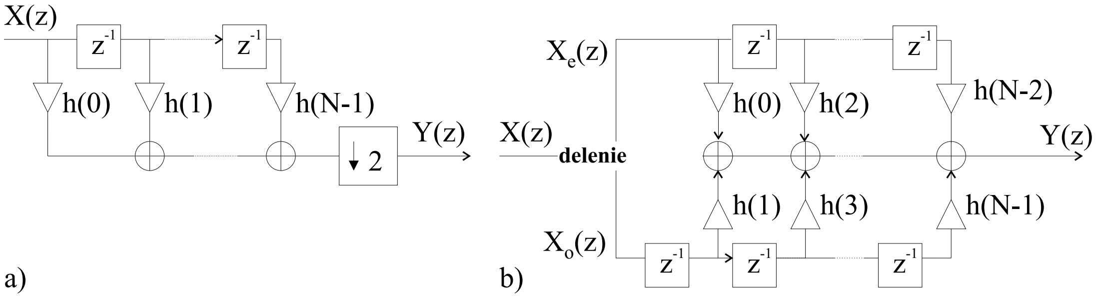
5.1.1 Polyfázová reprezentácia dvojpásmovej banky filtrov

V prípade dvojpásmovej banky filtrov rozkladáme prenosové funkcie filtrov a signály na dve polyfázové zložky, párnu (***e*** — z angl. even) a nepárnu (***o*** — z angl. odd). Pre prenosovú funkciu $H(z)$ potom platí:

$$H(z) = H_e\left(z^2\right) + z^{-1}H_o\left(z^2\right) \tag{5.6}$$



Obr. 5.4. Polyfázová reprezentácia dvojpásmovej banky filtrov



Obr. 5.5. Model sústavy pre decimáciu signálu: **a)** klasický prístup **b)** polyfázový rozklad

$$H_e(z) = \sum_n h(2n)\, z^{-n} \quad H_o(z) = \sum_n h(2n+1)\, z^{-n} . \tag{5.7}$$

Analogicky môžeme rozdeliť v BF aj filtre $G(z)$, $\tilde{H}(z)$, $\tilde{G}(z)$ a vstupný signal $X(z)$.

Na základe vedomostí z predchádzajúcej časti môžeme polyfázovú reprezentáciu dvojpásmovej banky filtrov schématicky znázorniť ako na obr. 5.4. Ako však k nej prejsť od klasickej reprezentácie dvojpásmovej BF (pozri obr. 3.7) a nájsť jej presnú matematickú formuláciu? Začnime s operáciou decimácie v hornej vetve, pre ktorú platí:

$$\begin{aligned} C(z) &= \left(X(z)\tilde{H}(z)\right)\downarrow 2 = \left[X(z)\tilde{H}(z)\right]_e = \left[\left(X_e(z^2)+z^{-1}X_o(z^2)\right)\left(\tilde{H}_e(z^2)+z^{-1}\tilde{H}_o(z^2)\right)\right]_e = \\ &= \left[X_e(z^2)\tilde{H}_e(z^2)+z^{-2}X_o(z^2)\tilde{H}_o(z^2)+z^{-1}\left(X_o(z^2)\tilde{H}_e(z^2)+X_e(z^2)\tilde{H}_o(z^2)\right)\right]_e . \end{aligned}$$

Operátor $()_e$, t. j. získanie párnych zložiek, je ekvivalentný podvzorkovaniu. Spôsobí, že nepárne mocniny z zaniknú a párne mocniny budú polovičné, lebo platí, pozri (3.11), že $C(z)\downarrow 2 = 1/2\left[C\left(z^{1/2}\right)+C\left(-z^{1/2}\right)\right]$. Výsledkom teda bude:

$$C(z) = \tilde{H}_e(z)\,X_e(z) + z^{-1}\tilde{H}_o(z)\,X_o(z) . \tag{5.8}$$

Celá situácia pri decimácii je schématicky znázornená na obr. 5.5. Pri klasickom spôsobe vypočítame konvolúciou všetky hodnoty a pri následnom podvzorkovaní polovicu z nich vyradíme. Pri polyfázovej reprezentácii nič nevyraďujeme, výpočet je efektívnejší a je priamym obrazom vzťahu (5.8).

Pre výstup z analyzačnej časti banky filtrov platí [8]:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(z) &= \begin{pmatrix} C(z) \\ D(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[\tilde{H}(z)\,X(z)\right]_e \\ \left[\tilde{G}(z)\,X(z)\right]_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{H}_e(z)\,X_e(z)+z^{-1}\tilde{H}_o(z)\,X_o(z) \\ \tilde{G}_e(z)\,X_e(z)+z^{-1}\tilde{G}_o(z)\,X_o(z) \end{pmatrix} = \\ &= \tilde{\mathbf{F}}_p(z)\,\tilde{\mathbf{Z}}(z)\,\mathbf{X}(z) , \end{aligned} \tag{5.9}$$

kde

$$\tilde{\mathbf{F}}_p(z) = \begin{pmatrix} \tilde{H}_e(z) & \tilde{H}_o(z) \\ \tilde{G}_e(z) & \tilde{G}_o(z) \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{Z}}(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} \quad \mathbf{X}(z) = \begin{pmatrix} X_e(z) \\ X_o(z) \end{pmatrix} . \tag{5.10}$$

T. j. výstup sme vyjadrili pomocou polyfázovej matice analyzačných filtrov a polyfázových zložiek vstupného signálu (pozri obr. 5.4). Popisom signálov v syntéze dostaneme (predpokladáme nekauzálne filtre):

$$\hat{\mathbf{X}}(z) = \begin{pmatrix} \hat{X}_e(z) \\ \hat{X}_o(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_e(z) + G_e(z) \\ zH_o(z) + zG_o(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C(z) \\ D(z) \end{pmatrix} = \mathbf{Z}(z)\,\mathbf{F}_p^T(z)\,\mathbf{Y}(z) , \tag{5.11}$$

kde

$$\mathbf{Z}(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \quad \mathbf{F}_p(z) = \begin{pmatrix} H_e(z) & H_o(z) \\ G_e(z) & G_o(z) \end{pmatrix} . \tag{5.12}$$

Invertovaním vzťahu pre analýzu dostaneme:

$$\mathbf{X}(z) = \mathbf{Z}(z)\left(\tilde{\mathbf{F}}_p(z)\right)^{-1}\mathbf{Y}(z) . \tag{5.13}$$

Porovnaním vzťahov (5.11) a (5.13) zistíme, že pre úplnú rekonštrukciu bez oneskorenia $\hat{\mathbf{X}}(z) = \mathbf{X}(z)$, treba aby platilo:

$$\left(\tilde{\mathbf{F}}_p(z)\right)^{-1} = \mathbf{F}_p^T(z) . \tag{5.14}$$

Platí nasledovná veta [17]:

Veta 5.1 *Pre kriticky vzorkovanú Banku filtrov s KIO filtrami je úplná rekonštrukcia možná vtedy a len vtedy, keď* $\det\left(\tilde{\mathbf{F}}_p(z)\right)$ *je mononóm.*

Dôkaz pre túto vetu neuvedieme, avšak je zrejmé, že veta nám zaručuje, že pri výpočte filtrov pre syntézu z filtrov pre analýzu pomocou vzťahu (5.14) pri inverzii matice nevznikne člen, ktorý by spôsobil vznik NIO filtrov. Napr. pri $\det\left(\tilde{\mathbf{F}}_p(z)\right) = 1$ platí:

$$\tilde{H}_e(z) = G_o\left(z^{-1}\right) \quad \tilde{G}_e(z) = -H_o\left(z^{-1}\right) \tag{5.15}$$

$$\tilde{H}_o(z) = -G_e\left(z^{-1}\right) \quad \tilde{G}_e(z) = -H_o\left(z^{-1}\right) , \tag{5.16}$$

t. j. dostávame závislosti známe už z biortogonálneho riešenia banky filtrov v časti 3.3.3

$$\tilde{H}(z) = -z^{-1}G\left(-z^{-1}\right) \quad \tilde{G}(z) = z^{-1}H\left(-z^{-1}\right) . \tag{5.17}$$

Ortogonálne riešenie BF dostaneme ak je matica $\tilde{\mathbf{F}}_\mathbf{p}(\mathbf{z})$ *paraunitárna*, t.j:

$$\left(\tilde{\mathbf{F}}_p(z)\right)^{-1} = \tilde{\mathbf{F}}_p^T\left(z^{-1}\right) . \tag{5.18}$$

Definícia 5.1 *Matica* $\mathbf{F}(\mathbf{z})$ *je* **unitárna**, *ak sa jej inverzná matica rovná transponovanej konjugovanej matici (rozšírenie ortonormality).* **Paraunitarita** *znamená, že matica* $\mathbf{F}(\mathbf{z})$ *je unitárna pre všetky* $|z| = 1$.

Potom platí:

$$\mathbf{F}_p(z) = \tilde{\mathbf{F}}_p\left(z^{-1}\right) . \tag{5.19}$$

V triviálnom prípade, keď platí $\tilde{\mathbf{F}}_p(z) = \mathbf{I}$, je realizovaná tzv. „lenivá“ waveletová transformácia, ktorá signál iba rozdelí na párne a nepárne zložky.

Komplementárne filtre

Filtre $\tilde{H}(z)$ a $\tilde{G}(z)$ nazývame ***komplementárne***, ak pri ich použití v analyzačnej resp. syntetizačnej časti BF je možné dosiahnuť úplnú rekonštrukciu.

Veta 5.2 *Keď sú komplementárne $\tilde{H}(z)$ a $\tilde{G}(z)$, potom sú komplementárne aj $H(z)$ a $G(z)$.*

Veta 5.3 *K danému kauzálnemu KIO filtru $\tilde{H}(z)$ existuje komplementárny filter $\tilde{G}(z)$ vtedy a len vtedy, ak polyfázové zložky $\tilde{H}(z)$ sú nesúdeliteľné.*

Dôkaz: *Podľa vety 5.1 musí byť determinant polyfázovej matice týchto filtrov mononóm. Nesúdeliteľnosť $\tilde{H}_e(z)$ a $\tilde{H}_o(z)$ je nutná, ináč by sa ich spoločný faktor vyskytoval v determinante. Postačujúcosť vyplýva s Euklidovho algoritmu:*
Ak máme nesúdeliteľné polynómy $a(z)$ a $b(z)$, potom $a(z)p(z) + b(z)q(z) = c(z)$ má jednoznačné riešenie. Voľbou získané riešenie $p(z)$, $q(z)$ predstavuje polyfázové zložky $\tilde{G}(z)$.

Vidíme, že pri komplementárnych filtroch, resp. polyfázovej reprezentácii banky filtrov, sú dôležitým pojmom súdeliteľné a nesúdeliteľné polynómy. Kedy sú polynómy nesúdeliteľné je vysvetlené v časti 6.3 na str. 116.

5.2 Liftingová schéma a jej realizácia

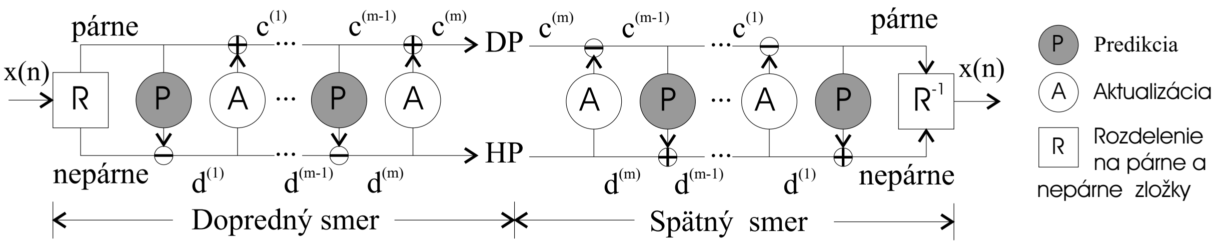
Stručná charakteristika liftingovej schémy bola uvedená už na začiatku kapitoly. Teraz by sme si v krátkosti priblížili princípy na základe ktorých pracuje. Waveletovú transformáciu implementovanú liftingovou schémou môžeme prekresliť podľa obr. 5.6. Sú v ňom vyznačené základné bloky liftingovej schémy pri jednej úrovni rozkladu — rozdelenie, predikcia a aktualizácia [38]:

- ***Rozdelením*** získavame dve množiny — párne a nepárne vzorky signálu.
- ***Predikciou*** sa na základe hodnôt párnych vzoriek snažíme predpovedať, ako vyzerajú nepárne vzorky a tento odhad od nich odčítame. Cieľom je získanie čo najmenších hodnôt v HP časti po doprednej transformácii.
- ***Aktualizáciou*** sa snažíme zmeniť hodnoty párnych vzoriek na základe nepárnych tak, aby čo najvernejšie odzrkadľovali vlastnosti *celého* pôvodného signálu, t. j. aby predikcia bola účinná aj pri ďalších krokoch. T. j. cieľom je zachovanie charakteru signálu v jeho DP časti po doprednej transformácii.

Pri liftingovej schéme začínajú vystupovať do popredia vlastnosti waveletov resp. koeficientov mierky z hľadiska schopnosti reprezentácie a aproximácie polynómov (pozri časť 2.1.3). Tieto schopnosti sú totiž explicitne vyjadrené *prediktormi* v *priečkach* pri liftingovej schéme. Napríklad prediktory môžu byť schopné na základe N párnych vzoriek vynulovať polynómy stupňa $N-1$ v nepárnych vzorkách.

Výpočet v liftingovej schéme postupuje po priečkach, pričom v každej ďalšej priečke využívame výsledky z predchádzajúcich priečok. Tým môžeme v konečnom dôsledku ušetriť až polovicu operácií.

Priečková štruktúra nám zároveň zaručuje invertovateľnosť všetkého, čo v operáciách predikcie a aktualizácie pričítame k signálu. Stačí to len v opačnom poradí odčítať (pozri ľavú a pravú časť obr. 5.6). Vlastnosť úplnej rekonštrukcie a tým aj



Obr. 5.6. Analýza a syntéza v dvojpásmovej banke filtrov realizovanej pomocou liftingovej schémy

biortogonalita zodpovedajúcej banky filtrov je automaticky zaručená. Preto môžeme použiť napríklad aj nelineárne a celočíselné prediktory.

Uveďme si teraz niekoľko príkladov na realizáciu waveletových transformácií pomocou liftingovej schémy a analyzujme ich funkčnosť a účelovosť. Na otázku „prečo?“ budeme odpovedať až v častiach 5.2.1 — 5.2.3.

„Lenivá“ waveletová transformácia

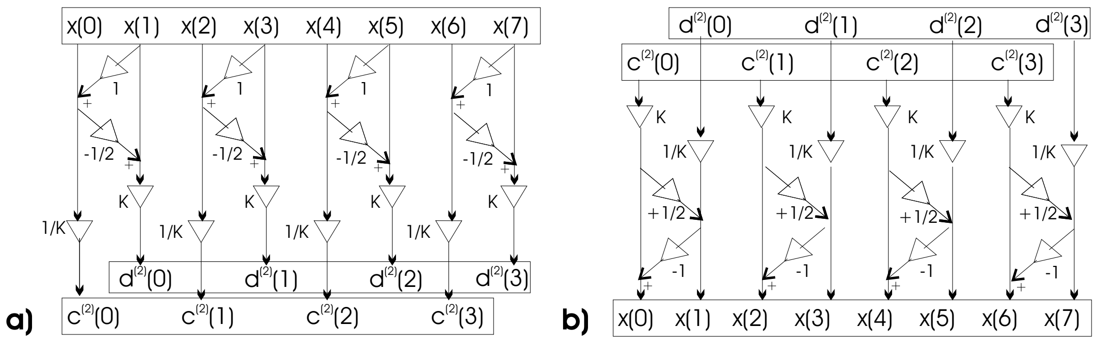
S touto transformáciou sme sa už stretli v časti 5.1.1. Vstupný signál je pri nej iba rozdelený na párne a nepárne zložky, pričom charakter oboch zložiek signálu je rovnaký. Rekonštrukcia je síce úplná, ale o nejakých vylepšeniach v zmysle predikcie a aktualizácie nemôže byť ani reč.

Haarova waveletová transformácia

Haarova (waveletová) transformácia, tak ako sme sa s ňou doteraz stretli, sa vlastne snaží v DP časti dostať priemer susedných vzoriek, v HP časti zase rozdiel. Ak je teda transformovaný signál po častiach konštantný, dostávame v HP časti nulové vzorky. Realizácia Haarovej transformácie liftingovou schémou zodpovedajúca jednej úrovni rozkladu v banke filtrov je nasledovná (pozri aj obr. 5.7):

1. Signál si rozdelíme na párne a nepárne časti:
$$c^{(0)}(n) = x(2n) \quad d^{(0)}(n) = x(2n+1)\ . \tag{5.20}$$
2. Najprv aktualizujeme priemer (zatiaľ nie je normovaný pomocou $1/2$, je to jednoducho súčet):
$$c^{(1)}(n) = c^{(0)}(n) + d^{(0)}(n)\ . \tag{5.21}$$
3. A potom na základe „priemeru“ predikujeme HP časť:
$$d^{(1)}(n) = d^{(0)}(n) - 0.5c^{(1)}(n)\ . \tag{5.22}$$
4. Normalizujeme ($K = \sqrt{2}$):
$$d^{(2)}(n) = Kd^{(1)}(n) = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\left(x(2n) - x(2n+1)\right) \tag{5.23}$$
$$c^{(2)}(n) = \tfrac{1}{K}c^{(1)}(n) = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\left(x(2n) + x(2n+1)\right) \tag{5.24}$$
.

Vidíme, že výsledné váhovanie koeficientov $x(n)$ pri výpočte $c(n)$ a $d(n)$ je ekvivalentné váhovaniu vo vzťahoch (1.54), (1.55).



Obr. 5.7. Kroky liftingu pri realizácii jednej úrovne Haarovej DWT **a)** rozklad **b)** rekonštrukcia (všimnite si, akým spôsobom je dosiahnutá úplná rekonštrukcia)

DWT s CDF(2,2) waveletom

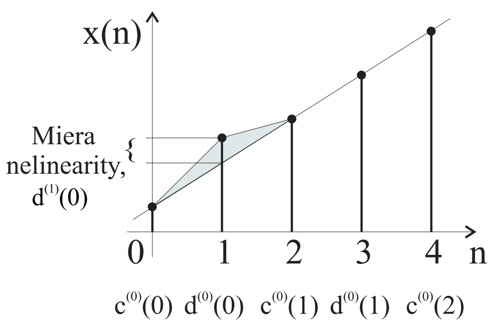
Waveletový systém s CDF(2,2) waveletom je schopný reprodukovať po častiach lineárne funkcie, pozri časť 2.3.3, vzťah (3.58), tabuľku 3.1 a systém B2.2 na obr. 2.8. Realizácia zodpovedajúceho rozkladu signálu pri liftingovej reprezentácii je takáto:

1. Najprv si rozdelíme signál na párne a nepárne časti:

$$c^{(0)}(n) = x(2n) \quad d^{(0)}(n) = x(2n+1)\ . \tag{5.25}$$

2. Waveletové koeficienty nám určujú mieru, ako sa náš signál líši od lineárneho (pozri obr. 5.8):

$$d^{(1)}(n) = d^{(0)}(n) - \tfrac{1}{2}\left[c^{(0)}(n) + c^{(0)}(n+1)\right]\ . \tag{5.26}$$



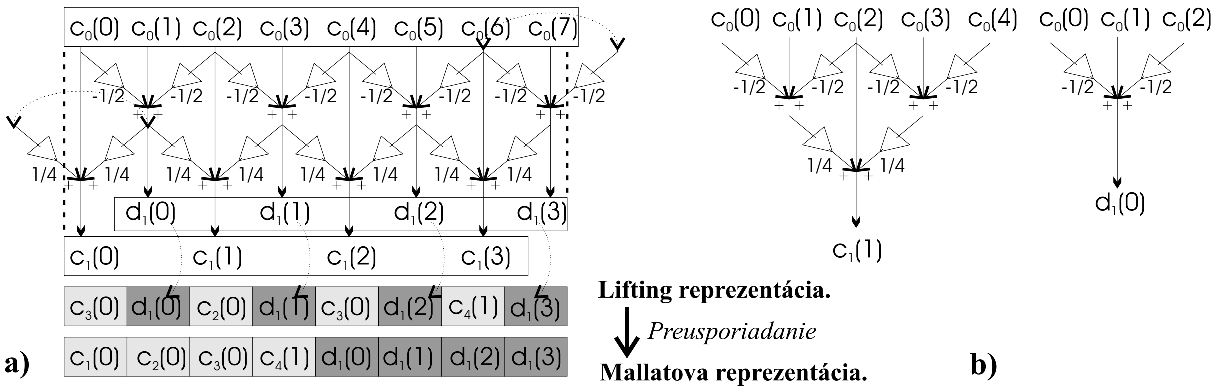
Obr. 5.8. V systéme s CDF(2,2) waveletom vyjadruje HP časť signálu mieru nelinearity, t. j. mieru, ako sa analyzovaný signál líši od (po častiach) nelineárneho signálu

3. V DP časti chceme zachovať aspoň priemer, t. j. jednosmernú zložku signálu. Hľadáme riešenie v tvare:

$$c^{(1)}(n) = c^{(0)}(n) + A\left[d^{(1)}(n) + d^{(1)}(n-1)\right]\ . \tag{5.27}$$

Ak uvážime, že koeficientov $c(n)$ je polovičný počet ako $x(n)$, musí platiť:

$$\sum_n c^{(1)}(n) = \tfrac{1}{2}\sum_n x(n)\ . \tag{5.28}$$



Obr. 5.9. Realizácia jednej úrovne rozkladu s CDF(2,2) waveletovým systémom **a)** kroky liftingu a výsledné preusporiadanie **b)** ekvivalencia výpočtu s konvolúciou s filtrami pre analýzu

Riešením tejto rovnice s použitím vzťahov (5.25) — (5.27) dostaneme hodnotu $A = 1/4$.

Ak náš vstup stotožníme s množinou $c_0(n)$, naše výstupy budú reprezentovať množiny $c_1(n)$ a $d_1(n)$. Realizáciu výpočtu potom môžeme zobraziť v tvare ako na obr. 5.9a. Uvedomme si, že aby sme výsledok dostali v klasickom tzv. „Mallatovom“ tvare, je ho treba preusporiadať. Pomocou obr. 5.9b si ľahko môžeme skontrolovať, že náš výstup zodpovedá konvolúciám s nenormovanými CDF(2,2) filtrami pre analýzu:

$$\tilde{h}(n) = \left(-\tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{8}\right) \qquad \tilde{g}(n) = \left(-\tfrac{1}{2}, 1, -\tfrac{1}{2}\right) . \tag{5.29}$$

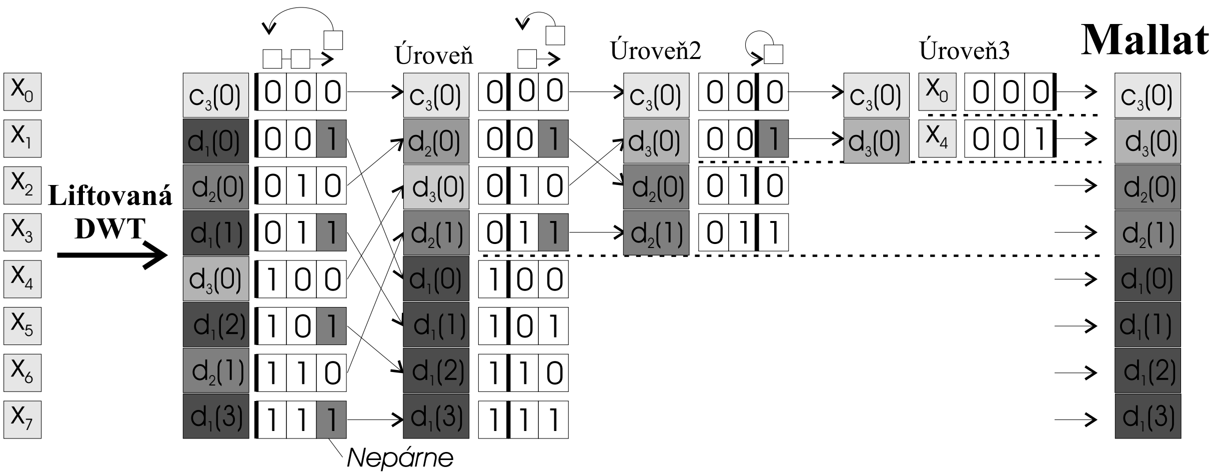
Pri výpočte rozkladu bolo použité *symetrické rozšírenie signálu*. Na obr. 5.9 je znázornené, ako elegantne sa to rieši v prípade liftingu. Stačí jednoducho zdvojenie *váhy* zrkadlového koeficientu vnútri signálu (t. j. príslušné koeficienty na okraji sú váhované -1 namiesto $-1/2$ a $1/2$ namiesto $1/4$)

Preusporiadanie koeficientov a výpočet „in-place“

Reprezentáciu signálu nemusíme po každom stupni rozkladu preusporiadávať do klasickej, tzv. Mallatovej reprezentácie (pozri obr. 1.18), ako sme predviedli na obr. 5.9. Všetky operácie na signáli môžeme vykonať pomocou jeho logického rozdelenia na párne a nepárne koeficienty. Tie sú následne navzájom sčítavané *priamymi* váhovanými súčtami v oddelených krokoch liftingu. Na výpočet takto nepotrebujeme žiadnu prídavnú pamäť na medzivýpočty, ako je tomu pri klasickom výpočte konvolúcie (a to ešte nevravíme o podvzorkovaní). Ak chceme výsledné spektrum preusporiadať do Mallatovej reprezentácie, musíme výsledné pole preindexovať reverziou bitov ich indexov. Tento proces je znázornený na obr. 5.10.

5.2.1 Kroky liftingu a polyfázové matice

Ako bolo spomenuté na začiatku kapitoly, existuje silné spojenie medzi polyfázovou reprezentáciou bánk filtrov a liftingovou schémou. A to je, že *prediktory* a *„aktualizátory“* v priečkovej štruktúre liftingovej schémy môžeme získať tzv. ***faktorizáciou*** polyfázových matíc F_p.



Obr. 5.10. Spôsob preusporiadania spektrálnych koeficientov reverziou bitov pri prechode medzi Mallatovou a liftingovou reprezentáciou

Začnime najprv z opačného smeru. Vychádzajme z triviálnych komplementárnych filtrov a postupne vylepšujme ich vlastnosti. Nech $\tilde{H}(z)$ a $\tilde{G}(z)$ v BF sú komplementárne, t. j. $\det\left(\tilde{\mathbf{F}}_p(z)\right) = z^{-l}$. Potom platí:

- každý nový KIO filter $\tilde{H}_{new}(z)$ resp. $\tilde{G}_{new}(z)$ komplementárny k $\tilde{G}(z)$ resp. $\tilde{H}(z)$ môžeme vyjadriť tzv. ***liftingom*** z pôvodného filtra ako:

$$\tilde{H}^{new}(z) = \tilde{H}(z) + S\left(z^2\right)\tilde{G}(z)\ . \tag{5.30}$$

  Potom platí:

$$\tilde{\mathbf{F}}_p^{new}(z) = \begin{pmatrix} 1 & S(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_p \qquad \mathbf{F}_p^{new}(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -S\left(z^{-1}\right) & 1 \end{pmatrix} \mathbf{F}_p \tag{5.31}$$

$$G^{new}(z) = G(z) - S\left(z^{-2}\right)H(z) \tag{5.32}$$

- každý nový KIO filter $\tilde{H}_{new}(z)$ resp $\tilde{G}_{new}(z)$ komplementárny k $\tilde{H}(z)$ resp. $\tilde{G}(z)$ môžeme vyjadriť tzv. ***duálnym liftingom*** z pôvodného filtra ako:

$$\tilde{G}^{new}(z) = \tilde{G}(z) + T\left(z^2\right)\tilde{H}(z)\ . \tag{5.33}$$

  Potom platí:

$$\tilde{\mathbf{F}}_p^{new}(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T(z) & 1 \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_p \qquad \mathbf{F}_p^{new}(z) = \begin{pmatrix} 1 & -T\left(z^{-1}\right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{F}_p \tag{5.34}$$

$$H^{new}(z) = H(z) - T\left(z^{-2}\right)G(z)\ , \tag{5.35}$$

kde

$$S(z) = \sum_n s(n)\, z^{-n} \qquad T(z) = \sum_n t(n)\, z^{-n} \tag{5.36}$$

sú prenosovými funkciami KIO filtrov a môžu byť interpretované ako prediktory. Uveďomme si, že nové filtre zachovávajú komplementaritu, lebo determinanty matíc $\tilde{\mathbf{F}}_p(z)$

a $\tilde{\mathbf{F}}_p^{new}(z)$ ostávajú mononómami (pri dôkaze sa využíva, $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$). Pri odvodzovaní dôsledkov sme využívali tieto vlastnosti (formulované pre $S(z)$):

$$\left[S\left(z^2\right)\tilde{G}(z)\right]_e = \tilde{G}_e(z)\,S(z) \qquad \left[S\left(z^2\right)\tilde{G}(z)\right]_o = \tilde{G}_o(z)\,S(z) \tag{5.37}$$

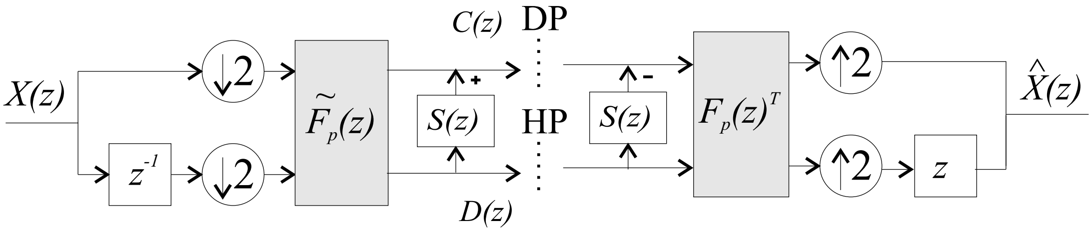
$$\mathbf{P}(z) = \mathbf{F}_p^T(z)\,\tilde{\mathbf{F}}_p(z) = \mathbf{F}_p^T \begin{pmatrix} 1 & -S(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & S(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_p = \tag{5.38}$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -S\left(z^{-1}\right) & 1 \end{pmatrix} \mathbf{F}_p \right)^T \begin{pmatrix} 1 & S(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_p\,. \tag{5.39}$$

Platia teda tieto skutočnosti:

1. Modifikácia $\tilde{H}(z)$ resp. $\tilde{G}(z)$ má za následok modifikáciu $G(z)$ resp. $H(z)$ (ak chceme úplnú rekonštrukciu).
2. Analýzu a syntézu môžeme zameniť, keďže sú vzájomne inverzné.

Pristúpme teraz k interpretácii uvedených výsledkov. Liftingom (5.30) sme „zlepšili“ vlastnosti $H(z)$. V priečkovej štruktúre je také niečo možné len aktualizáciou. Skutočne, vzťah (5.31) zodpovedá *aktualizácii* párnych koeficientov z nepárnych pomocou $S(z)$. Maticu $\tilde{\mathbf{F}}_p^z$ násobíme zľava, teda táto operácia bude na signáli pri rozklade vykonaná ako posledná, pozri obr. 5.11. Pri rekonštrukcii zas bude táto operácia (pozri vzťah 5.38) prvá a s opačným znamienkom. Analogicky, duálnemu liftingu zodpovedá predikcia pomocou $T(z)$.



Obr. 5.11. Polyfázová reprezentácia dvojpásmovej banky filtrov s analyzačným DP filtrom „vylepšeným“ pomocou aktualizácie párnych koeficientov

Zlepšovaním vlastností $\tilde{H}(z)$ a $\tilde{G}(z)$, t. j. striedaním krokov *liftingu* a *duálneho liftingu* postupne budujeme systém so žiadanou priečkovou štruktúrou. Začať môžeme napr. s lenivým waveletom, pre ktorý platí $\tilde{\mathbf{F}}_p(z) = \mathbf{I}$, t. j.:

$$\begin{pmatrix} C(z) \\ D(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_e(z) \\ z^{-1}X_o(z) \end{pmatrix}. \tag{5.40}$$

Striedaním *liftingu* a *duálneho liftingu* s finálnym ***normovaním*** potom dostaneme polyfázovú maticu pre analýzu v tvare:

$$\tilde{\mathbf{F}}_p(z) = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 1/K \end{pmatrix} \prod_{i=m}^{1} \left\{ \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T_i(z) & 1 \end{pmatrix}}^{\text{duálny lifting}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & S_i(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{lifting}} \right\}. \tag{5.41}$$

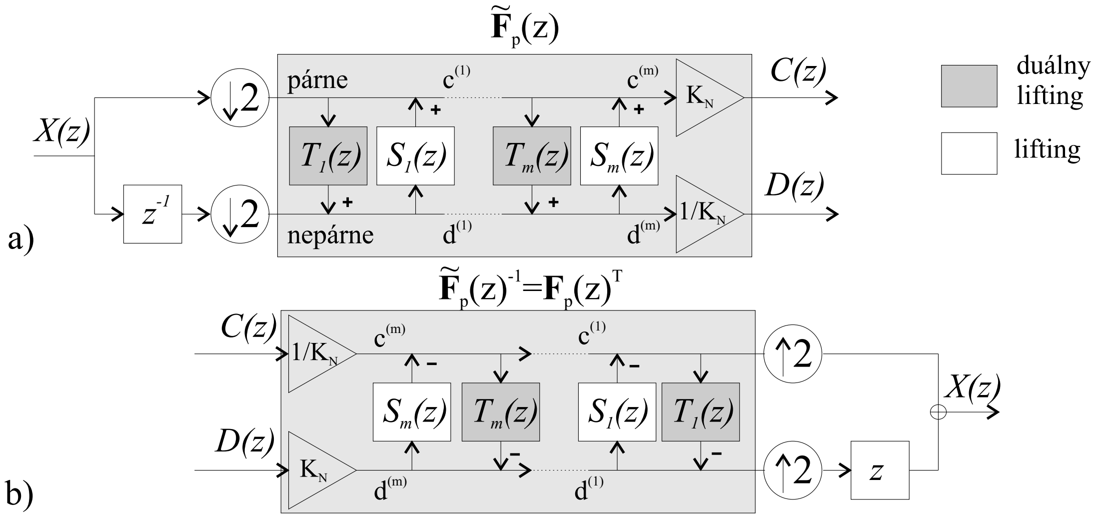
Zodpovedajúcu polyfázovú maticu pre syntézu dostaneme[1] inverziou a transponovaním (5.41):

$$\mathbf{F}_p^T = \tilde{\mathbf{F}}_p^{-1}(z) = \prod_{i=1}^{m}\left\{\begin{pmatrix} 1 & -S_i(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -T_i(z) & 1 \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} 1/K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} \tag{5.42}$$

$$\mathbf{F}_p = \begin{pmatrix} 1/K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}\prod_{i=m}^{1}\left\{\begin{pmatrix} 1 & -T_i(z^{-1}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -S_i(z^{-1}) & 1 \end{pmatrix}\right\}. \tag{5.43}$$

Realizácia uvedených kaskádových štruktúr je znázornená na obr. 5.12.

Úloha 5.1 *Dokážte, že determinant* $\tilde{\mathbf{F}}_p^{new}(z)$ *po krokoch liftingu a duálneho liftingu zostane monoróm.*



Obr. 5.12. Úplná reprezentácia dvojpásmovej banky filtrov priečkovou štruktúrou liftingovej schémy

5.2.2 Faktorizácia polyfázovej matice

Polynómy, ktoré sa vyskytujú v polyfázovej matici, môžeme považovať za Laurentove polynómy premennej z, pozri časť 6.3. Pri *faktorizácii polyfázovej matice* $\mathbf{F}_p(z)$ hľadáme rozklad danej matice $\mathbf{F}_p(z)$ na dolné a horné trojuholníkové matice. Tento postup je analogický s Euklidovým algoritmom na hľadanie najväčšieho spoločného deliteľa (NSD) Laurentových polynómov. Tie sú v našom prípade prenosovými funkciami filtrov v z-rovine. S ohľadom na časť 6.3 platí:

- Pre Laurentove polynómy nie je NSD jednoznačne určený.
- Pri faktorizácii odštiepujeme striedavo polynómy $T_i(z)$ (duálny lifting) a $S_i(z)$ (lifting), ktoré nám efektívne znižujú Laurentove dĺžky polyfázových zložiek.
- Striedaním týchto dvoch krokov sa snažíme dopracovať k diagonálnej matici s *konštantami na diagonále*, čím je výpočet skončený.

[1] Treba použiť pravidlá pre transponovanie a inverziu súčinu matíc a uvedomiť si, aký tvar majú inverzné a transponované matice pre S_i a T_i, pozri vzťah (5.38).

Začnime hľadať faktorizáciu od začiatku, bez ohľadu na vedomosti z predchádzajúcej časti. Za akých podmienok bude existovať, v akom bude tvare a ako ju realizovať?

Veta 5.4 *Pre dané komplementárne filtre $H(z)$, $G(z)$ vždy existujú Laurentove polynómy $S_i(z)$, $T_i(z)$ a taká konštanta K, že platí 5.41 resp. 5.43.*

Dôkaz: *Keďže k $H(z)$ existuje komplementárny filter, sú jeho polyfázové zložky nesúdeliteľné a použitím Euklidovho algoritmu dostaneme ich rozklad v tvare:*

$$\begin{pmatrix} H_e(z) \\ H_o(z) \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} Q_i(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{5.44}$$

kde vhodnou voľbou kvocientov môžeme vďaka nejednoznačnosti delenia dostať $A_n(z) =$ konštanta $= C$. K danému filtru $H(z)$, vždy môžeme nájsť komplementárny filter $G_0(z)$, aby pre polyfázovú maticu $\mathbf{F}_{p0}$ tejto dvojice platilo:

$$\mathbf{F}_{p0}^T(z) = \begin{pmatrix} H_e(z) & G_{0e}(z) \\ H_o(z) & G_{0o}(z) \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} Q_i(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 1/C \end{pmatrix} = \tag{5.45}$$

$$= \prod_{i=1}^{n/2} \begin{pmatrix} 1 & Q_{2i-1}(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Q_{2i}(z) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 1/C \end{pmatrix}. \tag{5.46}$$

Ďalej môžeme ľubovoľný $G(z)$ (napríklad náš pôvodný), komplementárny k $H(z)$, dostať z $G_0(z)$ jedným liftingom, napr.:

$$\mathbf{F}_p(z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -S(z^{-1}) & 1 \end{pmatrix} \mathbf{F}_{p0}(z)\ . \tag{5.47}$$

Kombináciou uvedených vzťahov a substitúciami: $C = 1/K$, $Q_{2i-1}(z) = -S_i(z)$ a $Q_{2i}(z) = -T_i(z)$ je vyjadrené ${\mathbf{F_p}}^T$ vo vzťahu (5.42). Transponovaním by sme dostali (5.43) a inverziou (5.41), čím je veta dokázaná.

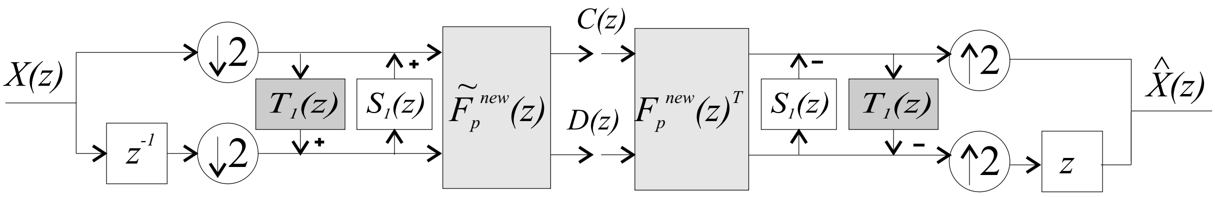
Dôsledkom predchádzajúcej vety je, že ak filtre tvoriace polyfázovú maticu sú komplementárne, potom faktorizácia *existuje* a je v tvare (5.41) resp. (5.42). Aká však bude jej konkrétna realizácia? Začnime s polyfázovou maticou pre analýzu $\tilde{\mathbf{F}}_p(z)$ a ukážme, čo by sa stalo, keby sme od nej odštiepili $T_i(z)$ alebo $S_i(z)$

$$\tilde{\mathbf{F}}_p(z) = \begin{pmatrix} \tilde{H}_e(z) & \tilde{H}_o(z) \\ \tilde{G}_e(z) & \tilde{G}_o(z) \end{pmatrix} = \left\langle \begin{array}{l} \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{H}_e^{new}(z) & \tilde{H}_o(z) \\ \tilde{G}_e^{new}(z) & \tilde{G}_o(z) \end{pmatrix}}_{\text{zvyšok po odštiepení}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T_i(z) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{H}_e(z) - \tilde{H}_o(z) T_i(z) & \tilde{H}_o(z) \\ \tilde{G}_e(z) - \tilde{G}_o(z) T_i(z) & \tilde{G}_o(z) \end{pmatrix} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{H}_e(z) & \tilde{H}_o^{new}(z) \\ \tilde{G}_e(z) & \tilde{G}_o^{new}(z) \end{pmatrix}}_{\text{zvyšok po odštiepení}} \begin{pmatrix} 1 & S_i(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{H}_e(z) & \tilde{H}_o(z) - \tilde{H}_e(z) S_i(z) \\ \tilde{G}_e(z) & \tilde{G}_o(z) - \tilde{G}_e(z) S_i(z) \end{pmatrix} \end{array} \right. \tag{5.48}$$

Situácia, ktorá nastane po odštiepení oboch, $T_i(z)$ alebo $S_i(z)$, je znázornená na obr. 5.13. T. j. pri analýze odštiepenia zodpovedajú vytváraniu priečok v štruktúre vľavo od polyfázovej matice. Pri odštiepovaní platia nasledovné pravidlá:

- Pri odštiepovaní $T_i(z)$ volíme $T_i(z) = \tilde{H}_e(z)/\tilde{H}_o(z)$ alebo $T_i(z) = \tilde{G}_e(z)/\tilde{G}_o(z)$, t. j. podľa toho, či chceme vynulovať $\tilde{H}_e^{new}(z)$ alebo $\tilde{G}_e^{new}(z)$.
- Pri odštiepovaní $S_i(z)$ volíme $S_i(z) = \tilde{H}_o(z)/\tilde{H}_e(z)$ alebo $S_i(z) = \tilde{G}_o(z)/\tilde{G}_e(z)$, t. j. podľa toho, či chceme vynulovať $\tilde{H}_o^{new}(z)$ alebo $\tilde{G}_o^{new}(z)$.

Pri odštiepovaní teda striedavo nulujeme nepárne a párne polyfázové zložky filtrov. Tým sa snažíme čo najrýchlejšie znižovať Laurentove dĺžky nefaktorizovanej časti filtrov. Spravidla je najlepšou voľbou nulovať vždy najväčší polynóm.



Obr. 5.13. Polyfázová reprezentácia dvojpásmovej banky filtrov po odštiepení matice pre $T_i(z)$ a $S_i(z)$ pri faktorizácii polyfázovej matice pre analýzu

Príklad 5.1 *Nájdite faktorizáciu filtrov s prenosovými funkciami:*

$$\tilde{H}(z) = -\frac{1}{8}z^{-2} + \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}z - \frac{1}{8}z^2 \tag{5.49}$$

$$\tilde{G}(z) = \frac{1}{4}z^{-2} - \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{1}{4}. \tag{5.50}$$

Riešenie: *Rozložme si prenosové funkcie filtrov na ich polyfázové zložky:*

$$\tilde{H}(z) = \underbrace{\left\{-\frac{1}{8}z^{-2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{8}z^2\right\}}_{\tilde{H}_e(z^2)} + z^{-1}\underbrace{\left\{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}z^2\right\}}_{\tilde{H}_o(z^2)} \tag{5.51}$$

$$\tilde{G}(z) = \underbrace{\left\{\frac{1}{4}z^{-2} + \frac{1}{4}\right\}}_{\tilde{G}_e(z^2)} + z^{-1}\underbrace{\left\{-\frac{1}{2}\right\}}_{\tilde{G}_o(z^2)} \tag{5.52}$$

$$\begin{array}{ll} \tilde{H}_e(z) = -\frac{1}{8}z^{-1} + \frac{3}{4} - \frac{1}{8}z & \tilde{H}_o(z) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z \\ \tilde{G}_e(z) = \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{1}{4} & \tilde{G}_o(z) = -\frac{1}{2} \end{array}. \tag{5.53}$$

Sformujme polyfázovú maticu pre analýzu $\tilde{\mathbf{F}}_p(z)$*:*

$$\tilde{\mathbf{F}}_p(z) = \begin{pmatrix} \tilde{H}_e(z) & \tilde{H}_o(z) \\ \tilde{G}_e(z) & \tilde{G}_o(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8}z^{-1} + \frac{3}{4} - \frac{1}{8}z & \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z \\ \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \tag{5.54}$$

Jej determinant je mononóm:

$$\det\left(\tilde{\mathbf{F}}_p(z)\right) = \left(-\frac{1}{8}z^{-1} + \frac{3}{4} - \frac{1}{8}z\right)\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}z\right)\left(\frac{1}{4}z^{-1} + \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2}, \tag{5.55}$$

t. j. filtre sú komplementárne a faktorizácia existuje. Teraz striedavo odštiepujme. Začnime napr. s $T(z)$:

$$\tilde{\mathbf{F}}_p(z) = \begin{pmatrix} \tilde{H}_e^{new}(z) & \frac{1}{4}+\frac{1}{4}z \\ \tilde{H}_e^{new}(z) & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tilde{t}(z) & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.56}$$

T. j. hľadáme vzhľadom na $T(z)$ riešenie pre sústavu rovníc:

$$-\frac{1}{8}z^{-1}+\frac{3}{4}-\frac{1}{8}z = \tilde{T}(z)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}z\right)+\tilde{H}_e^{new}(z) \tag{5.57}$$

$$\frac{1}{4}z^{-1}+\frac{1}{4} = \tilde{T}(z)\left(-\frac{1}{2}\right)+\tilde{H}_e^{new}(z)\,. \tag{5.58}$$

Riešenie môžeme zvoliť tak, že $\tilde{H}_e(z)$ alebo $\tilde{G}_e(z)$ ostane nulové. Vynulujme $\tilde{H}_e(z)$, ktorý má väčšiu Laurentovu dĺžku. Ak inicializujeme Euklidov algoritmus s $a_0 = \tilde{H}_e(z)$ a $b_0 = \tilde{H}_o(z)$, máme po prvom kroku 3 možnosti:

$$-\frac{1}{8}z^{-1}+\frac{3}{4}-\frac{1}{8}z = \begin{cases} \left(-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{7}{2}\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}z\right)-z \\ \left(-\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}z\right)+1 \\ \left(\frac{7}{2}z^{-1}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}z\right)-z^{-1}\,. \end{cases} \tag{5.59}$$

Z nich si vyberieme (napríklad) symetrické riešenie a dostávame $\tilde{\mathbf{F}}_p(z)$ v tvare:

$$\tilde{\mathbf{F}}_p(z) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4}+\frac{1}{4}z \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.60}$$

Zopakovaním uvedeného postupu pre $S(z)$ by sme dostali:

$$\tilde{\mathbf{F}}_p(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4}+\frac{1}{4}z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.61}$$

Na diagonále nám zostali konštanty, takže sme na konci výpočtu. Teraz už len treba výsledok správne interpretovať.

5.2.3 Realizácia prediktorov

Povedzme, že máme k dispozícii faktorizáciu na kroky liftingu, t. j. polynómy $S_i(z)$ a $T_i(z)$. Ako použiť ich hodnoty pri výpočte rozkladu v banke filtrov? Je jednoduché vysledovať, že v analyzačnej časti banky filtrov vedú duálny lifting a lifting k nasledovným operáciám (formulovaným v čase) [8]:

- predikcia (duálny lifting)

$$d^{(j+1)}(n) = d^{(j)}(n) + \sum_{\forall k} t(k)\, c^{(j)}(n-k) \tag{5.62}$$

- aktualizácia (lifting)

$$c^{(j+1)}(n) = c^{(j)}(n) + \sum_{\forall k} s(k)\, d^{(j)}(n-k)\,, \tag{5.63}$$

kde $d^j(n)$ a $c^j(n)$ predstavujú aktuálne verzie výstupných signálov, t. j. verzie po j predikciách a aktualizáciách, ako je znázornené aj na obr. 5.6. Ako však uvedený algoritmus pomocou párnych a nepárnych zložiek $x(n)$ inicializovať? V zásade máme dva spôsoby líšiace sa v tom, či pri rozdelení $x(n)$ na párne a nepárne koeficienty chceme použiť predstih alebo oneskorenie (pozri obr. 5.14a) pred podvzorkovaním a samotným vstupom do polyfázovej matice. Dôležitá je poloha párov $x_e(n)$ a $x_o(n)$ v rovnakom čase (t. j. s rovnakou mocninou z), pozri obr. 5.14b, od ktorej sa odvíja polohovanie nasledujúcich operácií v priečkach. Toto párovanie sa dá v oboch prípadoch jednoducho overiť použitím vzťahu (5.9) a ekvivalencie (obr. 5.1d). Vstupné vektory pre polyfázovú maticu a zodpovedajúca inicializácia $c^{(0)}$ a $d^{(0)}$ sú:

- použitý predstih (z^1):

$$\text{vstup} = \mathbf{Z}\,\mathbf{X}(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_e(z) \\ X_o(z) \end{pmatrix} \tag{5.64}$$

$$c^0(n) = x(2n) \tag{5.65}$$

$$d^0(n) = x(2n+1) \tag{5.66}$$

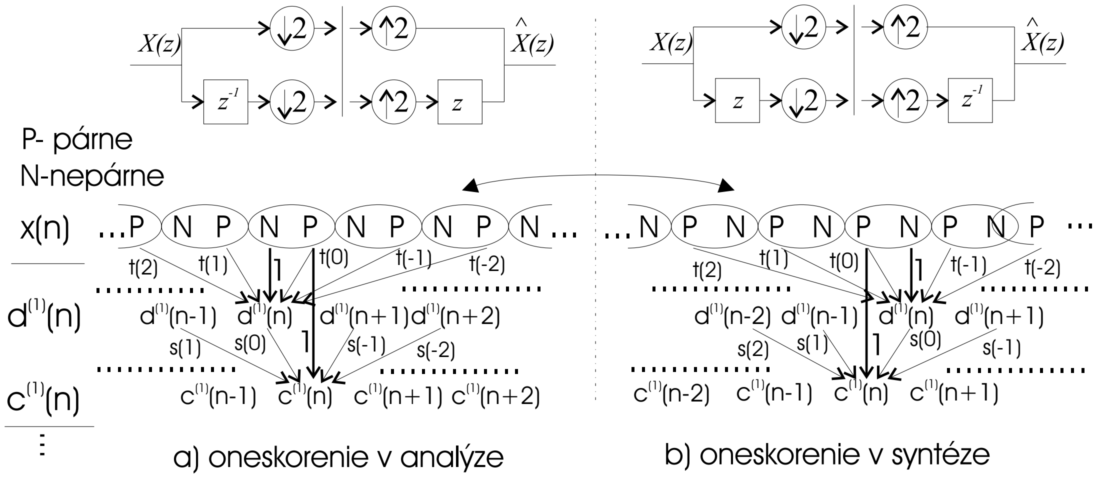
- použité oneskorenie (z^{-1}):

$$\text{vstup} = \tilde{\mathbf{Z}}\,\mathbf{X}(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_e(z) \\ X_o(z) \end{pmatrix} \tag{5.67}$$

$$c^0(n) = x(2n) \tag{5.68}$$

$$d^0(n) = x(2n-1)\,, \tag{5.69}$$

kde $\mathbf{Z}$, $\mathbf{X}(z)$ a $\tilde{\mathbf{Z}}$ boli použité v zmysle vzťahu (5.9). Správnou voľbou typu inicializácie môžeme dosiahnuť predikciu a aktualizáciu koeficientov použitím ich najbližšieho priestorového okolia.



Obr. 5.14. Realizácia prediktorov v liftingovej schéme: **a)** Spôsoby získania párnych a nepárnych koeficientov pre výpočet **b)** Zodpovedajúce dvojice koeficientov a tvar operácií v liftingovej schéme

Príklad 5.2 *Faktorizáciou analyzačnej polyfázovej matice sme dostali (pozri príklad 5.1):*

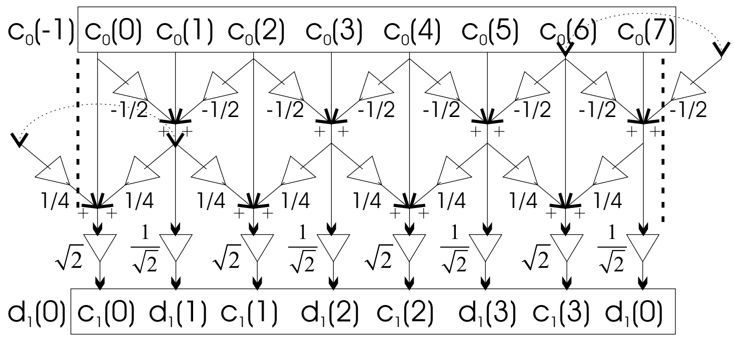
$$\tilde{F}_p(z) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4}+\frac{1}{4}z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.70}$$

Kroky liftingu pre doprednú a spätnú transformáciu: a) napíšte a schématicky znázornite v čase b) znázornite zodpovedajúci model sústavy pomocou polynómov v z-rovine. Pri analyzačnej časti BF zvoľte oneskorenie.

Riešenie:

Analýza	*Rekonštrukcia*
$c^{(0)}(n) = x(2n) \quad d^{(0)}(n) = x(2n-1)$	$\hat{c}^{(1)}(n) = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{c}(n) \quad \hat{d}^{(1)}(n) = \sqrt{2}\hat{d}(n)$
$d^{(1)}(n) = d^{(0)}(n) + \left[-\frac{1}{2}c^{(0)}(n) - \frac{1}{2}c^{(0)}(n-1)\right]$	$\hat{c}^{(0)}(n) = \hat{c}^{(1)}(n) - \left[\frac{1}{4}\hat{d}^{(1)}(n+1) + \frac{1}{4}\hat{d}^{(1)}(n)\right]$
$c^{(1)}(n) = c^{(0)}(n) + \left[\frac{1}{4}d^{(1)}(n+1) + \frac{1}{4}d^{(1)}(n)\right]$	$\hat{d}^{(0)}(n) = \hat{d}^{(1)}(n) + \left[-\frac{1}{2}\hat{c}^{(0)}(n) - \frac{1}{2}\hat{c}^{(0)}(n-1)\right]$
$c(n) = \sqrt{2}c^{(1)}(n) \quad d(n) = \frac{1}{\sqrt{2}}d^{(1)}(n)$	$\hat{x}(2n) = \hat{c}^{(0)}(n) \quad \hat{x}(2n-1) = \hat{d}^{(0)}(n)$

Grafická reprezentácia, pozri obr. 5.15 je ako v príklade realizácie Liftingu s waveletom CDF(2,2), pozri obr. 5.9. Rozdiel je iba v tom, že teraz sme použili normovaný tvar a opačné spájanie do dvojíc (predtým sme predpokladali v analýze predstih a filtre s inou fázou). Schématické znázornenie analyzačnej časti v z-rovine je na obr. 5.16.



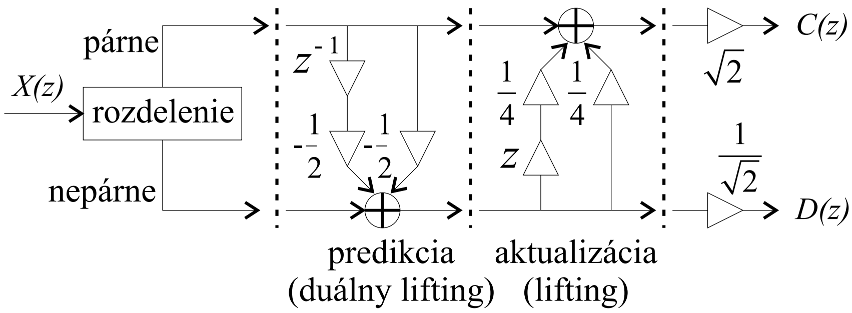
Obr. 5.15. Realizácia jednej úrovne rozkladu v čase, zodpovedajúca systému z príkladu 5.2. Všimnite si posun indexu diferenčných koeficientov, vyplývajúci z oneskorenia v analýze

Úloha 5.2 *Riešte predchádzajúci príklad v situácii, keď v analyzačnej časti BF je použitý predstih a nie oneskorenie. Uvedomte si, čo výsledok znamená, aký vplyv to bude mať na DWT a vlastnosti spektra.*

Lifting a interpolačné filtre

DP Filter $\tilde{H}(z)$ nazývame ***interpolačný***, ak je schopný interpolovať koeficienty prestriedané nulami (obvykle ako polynómy R-tého rádu). Platí [39]:

Ak je filter polpásmový, tak je aj interpolačný.



Obr. 5.16. Realizácia jednej úrovne rozkladu signálu $X(z)$, zodpovedajúca systému z príkladu 5.2.

Je to preto, lebo interpoluje párne koeficienty z nepárnych, resp. naopak. Polpásmový filter má v impulzovej charakteristike okrem počiatku párne koeficienty nulové. Koeficienty interpolačných filtrov vypočítame jednoducho tzv. Nevillovým algoritmom [1]. Príklady interpolačných filtrov sú:

- *Haarov wavelet* — konštantná interpolácia $h(n) = (1, 1)$
- *CDF(2,2)* — lineárna interpolácia, $h(n) = (1/2, 1, 1/2)$
- *4-bodová schéma* — kvadratická interpolácia $h(n) = (-1/16, 0, 9/16, 1, 9/16, 0, -1/16)$.

Aká je ich polyfázová reprezentácia? Keďže pre polpásmové filtre platí $\tilde{H}_e(z) = 1$, faktorizácia pre priečkovú štruktúru bude v tvare:

$$\tilde{F}_p(z) = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{H}_o \\ \tilde{G}_e & \tilde{G}_o \end{pmatrix} \underline{\underline{\det = 1}} \begin{pmatrix} 1 & \tilde{H}_o \\ \tilde{G}_e & 1 + \tilde{G}_e \tilde{H}_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tilde{G}_e & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \tilde{H}_o \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (5.71)$$

T. j.:

> *Interpolačné filtre predstavujú takú triedu filtrov, ktoré sa dajú v banke filtrov realizovať liftingovou schémou v dvoch krokoch.*

Dôležitá aplikácia interpolačných filtrov je napr. v počítačovej grafike [29], [43], [44]. Opakovaním nadvzorkovania signálu s následnou interpoláciou interpolačným filtrom môžeme zjemniť danú sieť bodov a ich hodnôt — výsledkom by mala byť hladká funkcia. Tento proces si môžeme predstaviť ako inverznú waveletovú transformáciu bez pridávania „detailov“.

5.2.4 Urýchlenie výpočtov

Liftingová schéma umožňuje použitím priečkovej štruktúry skrátiť výpočet DWT v limitnom prípade až na polovicu. Skúsme vyjadriť priemerný počet násobení a sčítaní na výpočet jedného koeficientu pri DWT jednostupňovom rozklade klasickým spôsobom a liftingom:

Typ waveletu	**DWT klasicky**	**DWT liftingom**	**Urýchlenie [%]**
Haar	3	3	0
Db2	14	9	56
Db3	22	14	57
FBI 9/7	23	14	64
B-spline$(4,2)$	17	10	70
Interpolačné$(N,\tilde{N})$	$3(N,\tilde{N})-2$	$\frac{3}{2}(N+Ntilde)$	$\frac{N+\tilde{N}-4}{N+\tilde{N}}100$

Výsledky z hľadiska zložitosti výpočtu môžeme zhrnúť nasledovne:

- *Výpočet FFT* , zložitosť rádu $N * log(N)$
- *Výpočet DWT* , zložitosť rádu N
- *Výpočet DWT liftingom* , ďalšie zníženie počtu operácií až na polovicu.

5.2.5 Nelineárne a celočíselné DWT

Vytvorením priečkovej štruktúry výpočtu DWT liftingom sme získali možnosť použiť v priečkach takmer ľubovoľné operácie a predsa ostane úplná rekonštrukcia zachovaná [45], [46]. Je to spôsobené tým, že čokoľvek sme pričítali k jedným koeficientom, môžeme pri rekonštrukcii aj odčítať. V tej chvíli totiž už máme k dispozícii identickú informáciu na základe ktorej sme v analýze hodnotu na pričítanie vytvorili. T. j. napr. celočíselnú DWT dostaneme nasledovnou modifikáciou pri liftingu:

$$d^{(j+1)}(n) = \left\lfloor d^{(j)}(n) + \sum_{\forall k} t(k)\, c^{(j)}(n-k) \right\rfloor \tag{5.72}$$

$$c^{(j+1)}(n) = \left\lfloor c^{(j)}(n) + \sum_{\forall k} s(k)\, d^{(j)}(n-k) \right\rfloor . \tag{5.73}$$

Problém spôsobuje iba normovanie na konci výpočtu v analýze, ktoré nepredstavuje priečkovú štruktúru. Ak ho vynecháme, zvýši nám to dynamiku dát, čo často nebýva najvhodnejšie riešenie. Druhým riešením je vyjadriť normalizáciu krokmi liftingu, za cenu mierneho zväčšenia výpočtovej náročnosti celého procesu, t. j. využiť vlastnosť:

$$\begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 1/K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & K-K^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/K & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & K-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \tag{5.74}$$

Tým nám vznikla priečková štruktúra aj z normalizácie, ktorú môžeme celočíselne aproximovať.

Kapitola 6

Dodatky

V tejto kapitole sú uvedené podporné informácie k učebnému textu. Priamo súvisia s waveletmi a bankami filtrov a prinajmenšom ich bežná znalosť je nevyhnutným predpokladom na zvládnutie učebného textu. Predpokladáme, že s väčšinou z týchto informácií sa čitateľ už stretol, preto nie sú zaradené priamo do textu. Na tomto mieste uvádzame základný prehľad, ktorého úlohou je sumarizovať iba tie najpotrebnejšie informácie.[1] Podrobné informácie o týchto oblastiach sa dajú nájsť v dostupnej odbornej literatúre.

6.1 Fourierova transformácia a jej druhy

Fourierova transformácia predstavuje najpoužívanejší nástroj na zisťovanie *frekvenčných charakteristík* signálov. Súhrnný prehľad jej základných typov je uvedený v tabuľke 6.1. Podrobnejšie informácie o všetkých typoch sú uvedené napr. v [2], [21]. Vlastnosti DTFS a rýchly algoritmus výpočtu sú uvedené napr. v [7]. Krátkodobá Fourierova transformácia (STFT) a jej vlastnosti sú detailne popísané napr. v [21, str. 312].

6.2 *Z*-transformácia a diskrétne systémy

Definícia 6.1 *Nech postupnosť $x(n) \in l^2(\mathcal{Z})$ predstavuje diskrétny signál. Jeho Z-transformácia je definovaná ako*

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}\,, \tag{6.1}$$

kde z je komplexná premenná.

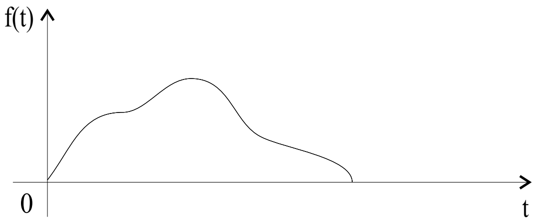
Z-transformáciou každému bodu komplexnej roviny „z“, pre ktorý vzťah 6.1 konverguje, priradíme komplexné číslo — funkčnú hodnotu $X(z)$. Niektoré základné vlastnosti Z-transformácie sú uvedené v tabuľke 6.2.

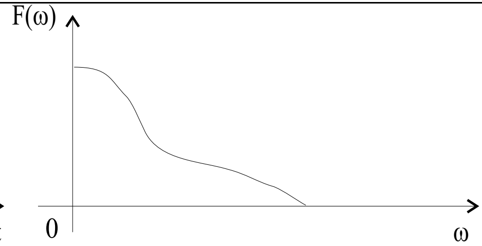
Parametrizáciou premennej z pomocou $z = e^{j\Omega}$ vyberáme iba hodnoty ležiace na jednotkovej kružnici a dostávame ***frekvenčnú charakteristiku*** $X(\Omega)$ postupnosti $x(n)$. Parameter Ω sa nazýva ***pomerová uhlová frekvencia***. Uvedený prechod od $x(n)$ k $X(\Omega)$ je ekvivalentný výpočtu DTFT signálu $x(n)$, pozri tabuľku 6.1.

Ak $x(n)$ predstavuje odpoveď diskrétneho systému na Kroneckerov impulz $u(n)$, potom $X(z)$ je prenosová funkcia systému. V tomto texte sa stretneme iba so systémami s konečnou impulzovou odpoveďou (KIO). Príkladom takýchto systémov sú ***KIO filtre***. Vyjadrením frekvenčnej charakteristiky prenosovej funkcie v tvare

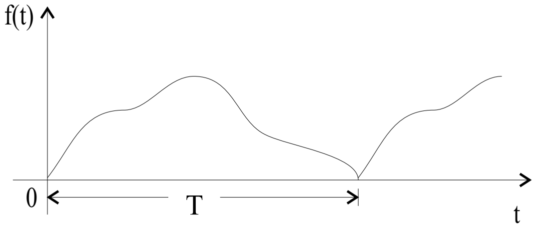
$$X(\Omega) = |X(\Omega)| e^{j\phi(\Omega)} = M(\Omega) e^{j\phi(\Omega)} \tag{6.2}$$

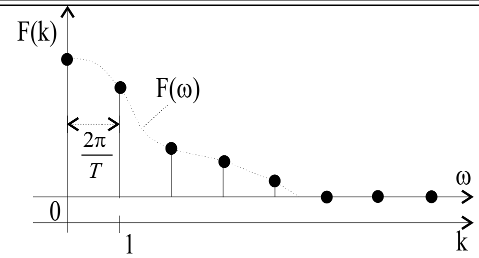
[1] Rozsah textu ani neumožňuje venovať sa uvedeným oblastiam podrobnejšie.

<table>
<tr>
<td>CTFT
(FT)</td>
<td>


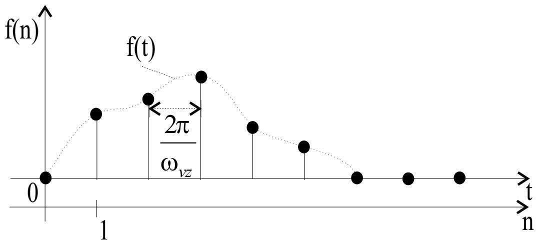


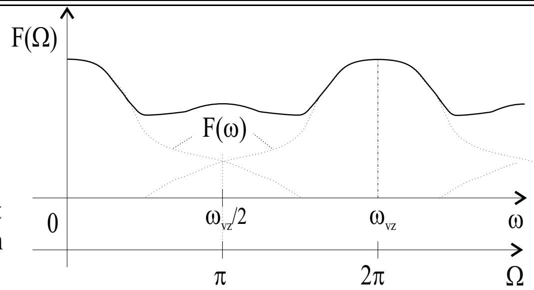
$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\omega} F(\omega)\, e^{j\omega t} d\omega$

$F(\omega) = \int\limits_{t} f(t)\, e^{-j\omega t} dt$
</td>
</tr>
<tr>
<td>CTFS
(FR)</td>
<td>




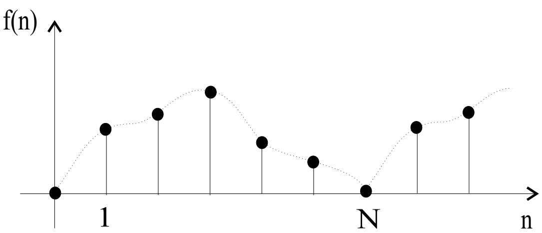
$f(t) = \sum\limits_{k} F(k)\, e^{j2\pi kt/T}$

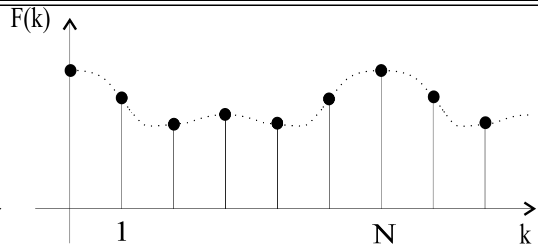
$F(k) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, e^{-j2\pi kt/T} dt$
</td>
</tr>
<tr>
<td>DTFT</td>
<td>




$f(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\Omega)\, e^{j\Omega n} d\Omega$

$\Omega = 2\pi\omega/\omega_{vz}$

$F(\Omega) = \sum\limits_{n} f(n)\, e^{-j\Omega n}$
</td>
</tr>
<tr>
<td>DTFS
(DFT)</td>
<td>




$f(n) = \frac{1}{N} \sum\limits_{k=0}^{N-1} F(k)\, e^{j2\pi nk/N} = \frac{1}{N} \sum\limits_{k=0}^{N-1} F(k)\, W_N^{nk}$

$F(k) = \sum\limits_{n=0}^{N-1} f(n)\, e^{-j2\pi nk/N} = \sum\limits_{n=0}^{N-1} f(n)\, W_N^{-nk}$

$W_N = e^{j2\pi/N}$
</td>
</tr>
</table>

Tabuľka 6.1. Fourierova transformácia a jej druhy

Časová oblasť	z-rovina	poznámka
$x(n)$	$X(z)$	
$\alpha x(n) + \beta y(n)$	$\alpha X(z) + \beta Y(z)$	
$x(n-k)$	$z^{-k}X(z)$	
$x(n) \star y(n)$	$X(z)Y(z)$	$\alpha, \beta \in \mathcal{R}$
$\alpha^n x(n)$	$X(z/\alpha)$	
$x(-n)$	$X(z^{-1})$	
$(-1)^n x(n)$	$X(-z)$	

Tabuľka 6.2. Vybrané vlastnosti Z-transformácie

dostávame $M(\Omega)$ — ***magnitúdovú*** a $\phi(\Omega)$ — ***fázovú frekvenčnú charakteristiku*** systému. Tie sú jednoznačne určené polohou, počtom a rádom ***núl*** prenosovej funkcie (KIO systémy majú póly iba v $z = 0$). Pre úplnosť uveďme, že pod formuláciou „funkcia má (niekde) *nulu* resp. ***pól***" rozumieme, že tam má *nulovú* resp. *nekonečnú* funkčnú hodnotu. Podmienky na dosiahnutie linearity fázovej charakteristiky sú zhrnuté napr. v [7]. Detailný popis problematiky Z-transformácie a diskrétnych systémov je napr. v [7], [21], [22].

6.3 Laurentove polynómy a najväčší spoločný deliteľ (NSD)

V tejto časti si zopakujeme klasický Euklidov algoritmus na nájdenie najväčšieho spoločného deliteľa (NSD) prirodzených čísiel. Pripomenieme si Laurentove polynómy a ich vlastnosti a nakoniec budeme hľadať ich NSD.

6.3.1 Klasický Euklidov algoritmus na nájdenie NSD

Nech a, $b \in N$ pričom $a \geq b$, $b \neq 0$. Potom ich NSD vypočítame iteračne:

$$\begin{aligned} a_0 &= a \qquad & b_0 &= b \\ a_{i+1} &= b_i \qquad & b_{i+1} &= a_i \mod b_i \,. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Výsledok je $a_n = NSDd\,(a,b)$, kde n je najmenšie číslo pre ktoré $b_n = 0$.

Príklad 6.1 *Nájdite NSD(50,15).*

Riešenie: *Riešenie: iteráciou pomocou Euklidovho algoritmu dostávame:*

i	0	1	2
a_i	50	15	5
b_i	15	5	0

t. j. $NSD(50, 15) = a_2 = 5$.

6.3.2 Prenosové funkcie a Laurentove polynómy

Na prenosové funkcie filtrov sa môžeme pozerať ako na Laurentove polynómy [40]. Prenosová funkcia $H(z)$ KIO filtra s impulzovou charakteristikou $h(k)$ je ***Laurentov polynóm*** daný ako:

$$H\,(z) = \sum_{k=k_b}^{k_e} h\,(k)\, z^{-k}\,, \tag{6.4}$$

kde k_b a k_e sú najmenšie, resp. najväčšie čísla, pre ktoré $h(k) \neq 0$. ***Stupeň*** $L\{H(z)\}$ Laurentovho polynómu je potom definovaný ako:

$$L\{H(z)\} = k_e - k_b\,. \tag{6.5}$$

Mononóm je polynóm v tvare z^p. Ako klasický polynóm má síce stupeň p, avšak ako Laurentov polynóm má stupeň $L\{z^p\} = 0$. Platí:

- Suma dvoch Laurentových polynómov je Laurentov polynóm.
- Laurentov polynóm je invertovateľný iba ak je to mononóm.
- Súčin dvoch Laurentových polynómov stupňov m a n je Laurentov polynóm stupňa $m+n$.
- Podiel dvoch Laurentových polynómov existuje, avšak nie je jednoznačný: T. j. nech $A(z)$ a $B(z)$ sú Laurentove polynómy, pričom $L\{A(z)\} \geq L\{B(z)\}$. Potom vždy existuje $Q(z)$ (kvocient) stupňa $L\{Q(z)\} = L\{A(z)\} - L\{B(z)\}$ a $R(z)$ (zvyšok) stupňa $L\{R(z)\} \leq L\{B(z)\}$ taký, že platí:

$$A(z) = B(z)\,Q(z) + R(z)\ , \tag{6.6}$$

  t. j.:

$$Q(z) = A(z)\,/B(z) \qquad R(z) = A(z) \mod B(z)\ . \tag{6.7}$$

- Laurentove polynómy $A(z)$ a $B(z)$ nazývame ***nesúdeliteľné*** ak $NSD\,(A(z)\,, B(z)) = z^p$ (t. j. NSD je mononóm).

Príklad 6.2 *Nájdite všetky podiely polynómov $A(z) = z^{-1} + 6 + z$ a $B(z) = 4 + 4z$ so zvyškom stupňa 0.*

Riešenie: *Treba nájsť polynóm $Q(z)$ stupňa 1, aby $R(z) = A(z) - B(z)\,Q(z)$ bol stupňa 0. T. j. $B(z)\,Q(z)$ sa musí rovnať $A(z)$ v dvoch zložkách:*

1. *rovnosť pri z^{-1} a z^0:* $Q(z) = \frac{1}{4}\left(z^{-1} + 5\right)$, $R(z) = -4z$
2. *rovnosť pri z^{-1} a z^1:* $Q(z) = \frac{1}{4}\left(z^{-1} + 1\right)$, $R(z) = 4$
3. *rovnosť pri z^0 a z^1:* $Q(z) = \frac{1}{4}\left(5z^{-1} + 1\right)$, $R(z) = -4z^{-1}$

6.3.3 Euklidov algoritmus na nájdenie NSD Laurentových polynómov

Nech $A(z)$ a $B(z)$ sú Laurentove polynómy, pre ktoré $L\{A(z)\} \geq L\{B(z)\}$ a $B(z) \neq 0$. Označme $A_0(z) = A(z)$, $B_0(z) = B(z)$. Ich NSD vypočítame iteračne ako:

$$\begin{array}{ll} A_0(z) = A(z) & B_0(z) = B(z) \\ A_{i+1}(z) = B_i(z) & B_{i+1}(z) = A_i(z) \mod B_i(z)\ . \end{array} \tag{6.8}$$

Výsledkom je také A_n, kde n je najmenšie číslo, pre ktoré $B_n = 0$. Potom:

$$A_n(z) = NSD\,(A(z)\,, B(z))\ . \tag{6.9}$$

V maticovom tvare môžeme postup opísať takto

$$\begin{pmatrix} A_{i+1}(z) \\ B_{i+1}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -Q_i(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_i(z) \\ B_i(z) \end{pmatrix}, \tag{6.10}$$

pričom výsledkom je

$$\begin{pmatrix} A_n(z) \\ 0 \end{pmatrix} = \prod_{i=n}^{1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -Q_i(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(z) \\ B(z) \end{pmatrix}, \tag{6.11}$$

kde $Q_i(z) = A_{i-1}(z)/B_{i-1}(z)$. Invertovaním vzťahu dostávame:

$$\begin{pmatrix} A(z) \\ B(z) \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} Q_i(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n(z) \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{6.12}$$

resp. v transponovanom tvare:

$$\begin{pmatrix} A(z) & B(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_n(z) & 0 \end{pmatrix} \prod_{i=n}^{1} \begin{pmatrix} Q_i(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.13}$$

Príklad 6.3 *Nájdite NSD polynómov $A(z) = z^{-1} + 6 + z$ a $B(z) = 4 + 4z$ a zistite či sú nesúdeliteľné. Napíšte maticový rozklad vektora $\begin{pmatrix} A(z) & B(z) \end{pmatrix}^T$.*

Riešenie: *Iteráciou v Euklidovom algoritme dostávame:*

i	0	1	2
$A_i(z)$	$z^{-1}+6+z$	$4+4z$	4
$B_i(z)$	$4+4z$	4	0
$Q_i(z)$		$\frac{1}{4}(z^{-1}+1)$	$1+z$

t. j. $NSD(A(z), B(z)) = 4$ čo je mononóm a polynómy sú teda nesúdeliteľné. Platí:

$$\begin{pmatrix} A(z) \\ B(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^{-1}+6+z \\ 4+4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (z^{-1}+1)/4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+z & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix},$$

resp.:

$$\begin{pmatrix} A(z) & B(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^{-1}+6+z & 4+4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+z & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (z^{-1}+1)/4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.4 Hilbertove priestory a rozklady signálov

V tejto časti zopakujeme niektoré základné pojmy z lineárnej algebry [3], základné vlastnosti Hilbertových priestorov [5], princípy a vlastnosti projekcie do vektorov a priestorov s ortogonálnymi a neortogonálnymi bázami [5], [21], interpretáciu transformácie ako projekcie a základné vlastnosti rámcov [23].

Pod pojmom ***vektorový priestor*** rozumieme lineárny priestor nad poľom $\mathcal{C}$ resp. $\mathcal{R}$ v zmysle [3], [5].

Definícia 6.2 ***Podpriestor vektorového priestoru*** *$\mathcal{E}$ je taká podmnožina $\mathcal{M} \subset \mathcal{E}$, pre ktorú platí:*

1. *$\forall x, y \in \mathcal{M}$; $x + y \in \mathcal{M}$*
2. *$\forall x \in \mathcal{M}$ a pre $\alpha \in \mathcal{C}$ alebo $\alpha \in \mathcal{R}$ platí, že $\alpha x \in \mathcal{M}$.*

Definícia 6.3 ***Lineárny obal*** *$L(B)$ množiny $B \subset \mathcal{E}$ s prvkami $B = x_i$ je podpriestorom $\mathcal{E}$ a platí:*

$$L\left(B\right) = \left\{ \sum_i \alpha_i x_i \,;\, \alpha_i \in \mathcal{C}\, alebo\, \mathcal{R},\, x_i \in B \right\} . \tag{6.14}$$

Definícia 6.4 ***Bázou vektorového priestoru*** *$\mathcal{E}$ nazývame neprázdnu podmnožinu $B \subset \mathcal{E}$ práve vtedy, ak $L(B) = \mathcal{E}$ a B je množina lineárne nezávislých vektorov.*

Definícia 6.5 ***Hilbertov priestor*** *$\mathcal{E}$ je vektorový priestor $\mathcal{E}$, ktorý je úplný a na ktorom je definovaný skalárny súčin ktorý označujeme $\langle , \rangle$.*

Definícia 6.6 ***Veľkosť vektora*** *x (označujeme $\|x\|$) je v Hilbertových priestoroch daná skalárnym súčinom $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.*

Definícia 6.7 *Nech $\mathcal{E}$ je Hilbertov priestor, potom:*

1. *Prvky $x, y \in \mathcal{E}$ sa nazývajú* ***ortogonálne*** *$(x \perp y)$, $\langle x, y \rangle = 0$.*

2. *Prvok $x \in \mathcal{E}$ je* ***ortogonálny*** *na podpriestor $M \subset \mathcal{E}$, ak pre $\forall y \in \mathcal{M}$ platí $x \perp y$.*

3. *Podpriestory $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \subset \mathcal{E}$ sa nazývajú* ***ortogonálne****, ak pre $\forall x \in \mathcal{M}_1$, $\forall y \in \mathcal{M}_2$ platí $x \perp y$.*

Definícia 6.8 *Nech $\mathcal{M}_i$ sú podpriestory Hilbertovho priestoru $\mathcal{E}$. Ak každý vektor $x \in \mathcal{E}$ môžeme jednoznačne vyjadriť v tvare $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_k$ pričom $x_i \in \mathcal{M}_i$, potom $\mathcal{E}$ je* ***priamou sumou podpriestorov*** *$\mathcal{M}_i$. Píšeme $\mathcal{E} = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{M}_k$.*

Definícia 6.9 *Nech $\mathcal{M}$ je podpriestor Hilbertovho priestoru $\mathcal{E}$. Potom* ***ortogonálny doplnok*** *k $\mathcal{M}$ v $\mathcal{E}$ je množina $\mathcal{M}^\perp = \{x \in \mathcal{E}\,;\, x \perp \mathcal{M}\}$.*

Veta 6.1 *Nech podpriestor $\mathcal{M} \subset \mathcal{E}$ je uzavretý. Potom pre daný vektor $z \in \mathcal{E}$ existuje $x \in \mathcal{M}$ a $y \in \mathcal{M}^\perp$ také, že $z = x + y$. T. j. platí: $\mathcal{E} = \mathcal{M} \oplus M^\perp$.*

6.4.1 Separabilné Hilbertove priestory

Hilbertove priestory obsahujú spočítateľné bázy vtedy a len vtedy, ak sú separabilné. Príklady takýchto priestorov sú nasledovné priestory.

Komplexné / reálne priestory

Komplexný priestor $\mathcal{C}^n$ je množina všetkých n-tíc $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ s konečnými hodnotami x_i na množine $\mathcal{C}$. Skalárny súčin je definovaný ako:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i^* \quad x, y \in \mathcal{C}^n . \tag{6.15}$$

Analogická definícia platí aj pre $\mathcal{R}^n$. Kvôli jednoznačnosti budeme používať aj klasické označenie:

$$\bar{x} = (x_1\, x_2\, \ldots\, x_n)^T . \tag{6.16}$$

Priestor $l^2(\mathcal{Z})$

Vektormi x v priestore $l^2(\mathcal{Z})$ sú postupnosti $x\,(n) \in \mathcal{C}$, $n \in \mathcal{Z}$ s konečnou energiou $\|x\| < \infty$. Zvyčajne reprezentujú signály diskrétne v čase. Skalárny súčin je definovaný ako:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\,(n)\, y\,(n)^* \quad x, y \in l^2(\mathcal{Z})\,. \tag{6.17}$$

Priestor $L^2(\mathcal{R})$

Vektormi x v priestore $L^2(\mathcal{R})$ sú funkcie $x(t) \in \mathcal{C}$, $t \in \mathcal{R}$, ktoré sú kvadraticky integrovateľné a naviac $\|x\| < \infty$. Skalárny súčin je definovaný ako:

$$\langle x, y\rangle = \int_{t\in\mathcal{R}} x\,(t)\, y\,(t)^*\, dt \quad x, y \in L^2(\mathcal{R})\,. \tag{6.18}$$

Analogicky môžeme pre funkcie n premenných definovať priestory $L^2(\mathcal{R}^n)$.

6.4.2 Ortonormálne bázy

Množina $B = \{b_i\}$ tvorí ***ortonormálny systém*** v priestore $\mathcal{E}$, ak platí:

$$\forall b_i, b_j \in B\,; \qquad \langle b_i, b_j\rangle = \delta(i-j)\,. \tag{6.19}$$

Ortonormálny systém B tvorí ***ortonormálnu bázu*** priestoru $\mathcal{E}$, ak všetky $x \in \mathcal{E}$ môžeme vyjadriť ako:

$$x = \sum_k \alpha_k b_k\,, \tag{6.20}$$

kde α_k nazývame ***spektrálne koeficienty*** a vypočítame ich ako

$$\alpha_k = \langle b_k, x\rangle\ . \tag{6.21}$$

Pre takýto systém platí ***Parsevalova rovnosť***

$$\|x\|^2 = \sum_i |\langle b_i, x\rangle|^2 \quad \forall x \in \mathcal{E}\,. \tag{6.22}$$

Analogické tvrdenia platia aj pre *ortogonálne systémy*, vo vzťahoch je iba pridaná normalizačná konštanta.

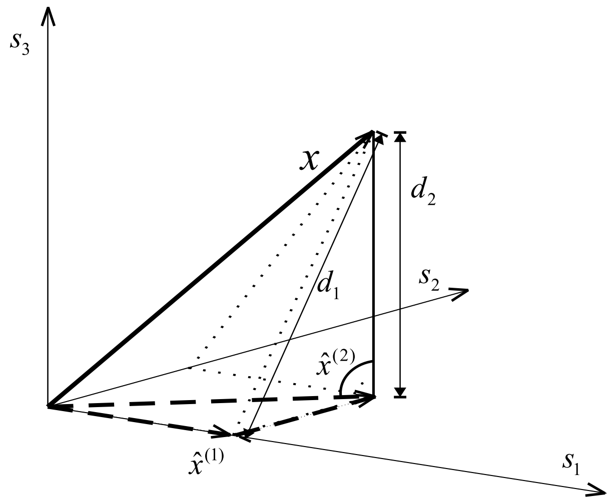
6.4.3 Biortogonálne bázy

Nech množiny $B = \{b_i\}$ a $\tilde{B} = \left\{\tilde{b}_i\right\}$ sú bázami priestoru $\mathcal{E}$. Tieto bázy sú navzájom ***duálne*** resp. ***biortogonálne***, ak:

- ich bázové vektory sú ***navzájom ortogonálne***, t. j. ***bi****ortogonálne*:

$$\left\langle b_i, \tilde{b}_j\right\rangle = \delta(i-j) \qquad \forall i, j\mathcal{Z} \tag{6.23}$$

- zároveň existujú kladné konečné konštanty C, D, $\tilde{C}$, $\tilde{D}$, že pre $\forall x \in \mathcal{E}$ platí:



Obr. 6.1. Znázornenie ortogonálnej projekcie vektora $x \in \mathcal{R}^3$ do podpriestoru $\mathcal{S}_2 \subset \mathcal{R}^3$ daného ako $L(\{s_1, s_2\})$. Platí $x - \hat{x}^{(2)} \perp \mathcal{S}_2$.

$$C\|x\|^2 \le \sum_k |\langle b_k, x\rangle|^2 \le D\|x\|^2 \quad \tilde{C}\|x\|^2 \le \sum_k \left|\left\langle \tilde{b}_k, x\right\rangle\right|^2 \le \tilde{D}\|x\|^2 \,. \tag{6.24}$$

Potom signál $x \in \mathcal{E}$ môžeme vyjadriť ako

$$x = \sum_k \langle b_k, x\rangle \tilde{b}_k = \sum_k \left\langle \tilde{b}_k, x\right\rangle b_k \,. \tag{6.25}$$

Parsevalova rovnosť má tvar:

$$\|x\|^2 = \sum_i \langle b_i, x\rangle^* \left\langle \tilde{b}_i, x\right\rangle \quad \forall x \in \mathcal{E} \,. \tag{6.26}$$

6.4.4 Ortogonálna projekcia a aproximácia signálu

Definícia 6.10 ***Ortogonálna projekcia*** *(priemet) vektora x do vektora s je zložka vektora x v smere vektora s nazývaná x_s*

$$x_s = \frac{\langle s, x\rangle}{\|s\|^2} s = x_{s_1} s \,, \tag{6.27}$$

kde skalár x_{s_1} nazývame **súradnicou vektora x vo vektore s**.

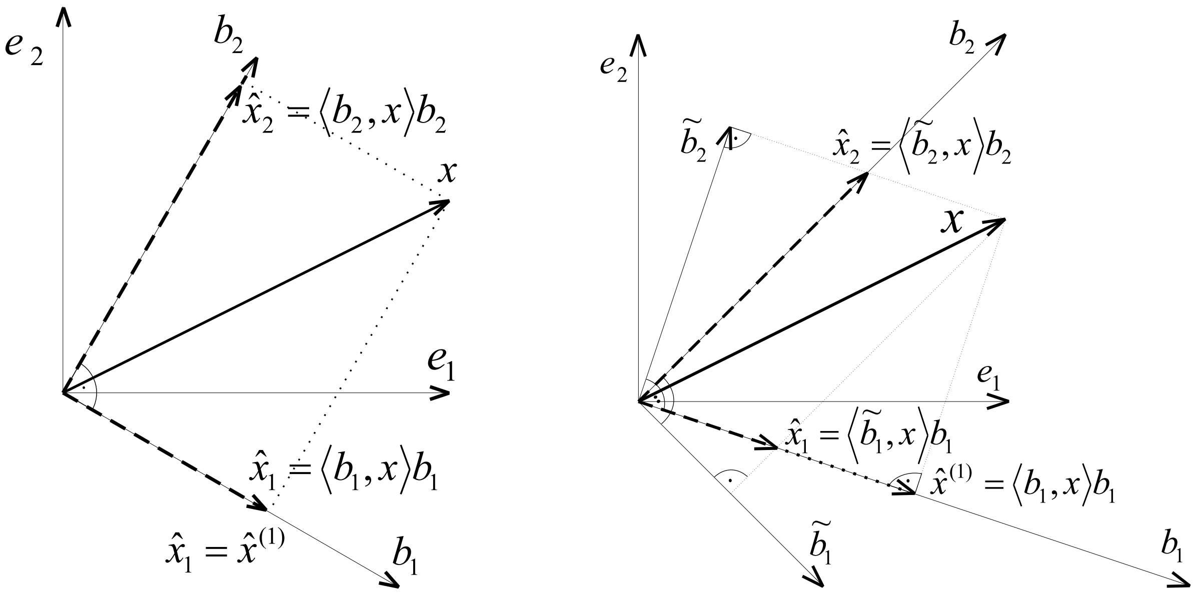
Aproximujme $x \in \mathcal{E}$ v uzavretom podpriestore $\mathcal{S}_k$ s bázou $S_k = \{s_1, s_2, \ldots s_k\}$, $s_i \in \mathcal{E}$, $\|s_i\| = 1$, $i = 1 \ldots k$. Označme ortogonálnu projekciu x do $\mathcal{S}_k$ ako $\hat{x}^{(k)}$. Platí

$$\hat{x}^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} \langle s_i, x\rangle s_i \,. \tag{6.28}$$

Príklad projekcie vektora do podpriestoru $S_2 \subset \mathcal{R}^3$ je znázornený na obr. 6.1. Označme vzdialenosť medzi x a $\hat{x}^{(k)}$ ako d_k. Platí $(x - \hat{x}) \perp \mathcal{S}_k$ a zároveň

$$d = \|x - \hat{x}\| = \min \|x - s\| \quad \forall s \in \mathcal{S}_k \,. \tag{6.29}$$

Aproximácia ortogonálnou projekciou vzdialenosť d minimalizuje. Hovoríme, že je najlepšia ***v zmysle najmenších štvorcov***. Z hľadiska aproximácie existujú dva základné prípady:



a) ortonormálna báza B
$B = \{b_1, b_2\} = \left\{\left(\sqrt{3}/2, -0.5\right), \left(0.5, \sqrt{3}/2\right)\right\}$
$\tilde{B} = B$

b) neortogonálna báza B
$B = \{b_1, b_2\} = \{(1.5, -0.5), (1, 1)\}$
$\tilde{B} = \left\{\tilde{b}_1, \tilde{b}_2\right\} = \{(0.5, -0.5), (0.25, 0.75)\}$

Obr. 6.2. Príklad reprezentácie signálu $x = \{1, 0.5\}$ v $\mathcal{E} = \mathcal{R}^2$ pomocou bázy B s vyznačením bázy $\tilde{B}$, duálnej k B: a) B je ortonormálna, b) B je neortogonálna.

A) Nech S_k je ortonormálna báza $\mathcal{S}_k$. Keďže s_i sú vzájomne ortogonálne, zachováva sa vlastnosť najlepšej aproximácie pri danom k v zmysle najmenších štvorcov a platí vlastnosť ***postupnej aproximácie***:

$$\hat{x}^{(k+1)} = \hat{x}^{(k)} + \langle s_{k+1}, x\rangle\, s_{k+1}\,. \tag{6.30}$$

B) Keď S_k, báza $\mathcal{S}_k$ nie je ortonormálna, neplatí vlastnosť postupnej aproximácie, t. j. pri aproximácii v $\mathcal{S}_k$ nemôžeme použiť aproximáciu v $\mathcal{S}_{k-1}$, je nevyhnutné celú aproximáciu prepočítať znovu. Napr. na obr. 6.2b ak spravíme projekciu x do jednorozmerného priestoru s bázou $\{s_1\}$, nemôžeme ju využiť pri tvorení aproximácie v priestore s bázou $\{s_1, s_2\}$ (pozri vetu 6.4 na str. 123).

Príklad reprezentácie vektora x v oboch prípadoch je znázornený na obr. 6.2. Všimnite si použiteľnosť aproximácie $\hat{x}^{(1)}$ pri výslednej reprezentácii.

6.4.5 Zmena súradníc pri prechode k inej báze v $\mathcal{C}^n$

Nech $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ a $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ sú bázy Hilbertovho priestoru $\mathcal{C}^n$. Prepísaním do maticovej notácie dostaneme *štvorcové matice* hodnosti n:

$$\mathbf{A} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n) \quad \mathbf{B} = (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n)\ , \tag{6.31}$$

kde $\bar{a}_i = a_i^T$ a $\bar{b}_i = b_i^T$ sú stĺpcové vektory.

Veta 6.2 *Každý vektor z bázy B môžeme jednoznačne vyjadriť ako lineárnu kombináciu vektorov bázy A, t. j. platí $\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{P}_{AB}$.*

Definícia 6.11 *Maticu $\mathbf{P}_{AB}$ nazývame* ***maticou prechodu*** *od bázy A k báze B. Analogicky $\mathbf{P}_{BA}$ je maticou prechodu od bázy B k báze A. Platí $\mathbf{P}_{BA} = \mathbf{P}_{AB}^{-1}$.*

Veta 6.3 *Nech $\bar{x} \in \mathcal{C}^n$ má v báze A súradnice $\bar{x}\,(A) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ a v báze B súradnice $\bar{x}\,(B) = \bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$. Potom platí:*

$$\bar{x}(B) = \mathbf{P}_{AB}^{-1}\bar{x}(A) = \mathbf{P}_{BA}\bar{x}(A)\,. \tag{6.32}$$

V praxi sú naše vstupné vektory reprezentáciou diskrétnych signálov v čase. Potom:

$$\mathbf{A} = \mathbf{I}_n \quad \mathbf{P}_{AB} = \mathbf{I}_n^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{B}\,, \tag{6.33}$$

kde $\mathbf{I}_n$ je jednotková matica hodnosti n.

Definícia 6.12 ***Doprednou transformáciou*** *signálu $x(n) = x(\mathbf{I}) = \bar{x} \in \mathcal{C}^n$ nazývame zmenu vektora $\bar{x}$ na vektor $\bar{y} = \bar{x}\,(B)$. V súlade s (6.32) ju zapisujeme v tvare*

$$\bar{y} = \mathbf{T}\bar{x}\,, \tag{6.34}$$

kde

$$\mathbf{T} = \mathbf{P}_{\mathbf{IB}}^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \tag{6.35}$$

je tzv. ***transformačná matica***. *Vektor $\bar{y}$ predstavuje* ***spektrum*** *signálu $\bar{x}$ a jeho zložky y_i jednotlivé* ***spektrálne koeficienty***.

Signál rekonštruujeme ***spätnou transformáciou***:

$$\bar{x} = \mathbf{T}^{-1}\bar{y} = \mathbf{B}\bar{y} = \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} = \tag{6.36}$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} \\ \ldots \\ b_{n1} \end{pmatrix} y_1 + \begin{pmatrix} b_{12} \\ \ldots \\ b_{n2} \end{pmatrix} y_2 + \ldots + \begin{pmatrix} b_{1n} \\ \ldots \\ b_{nn} \end{pmatrix} y_n = \bar{b}_1 y_1 + \bar{b}_2 y_2 + \ldots + \bar{b}_n y_n\,. \tag{6.37}$$

Pri doprednej transformácii v podstate zisťujeme, ako sa vektor $\bar{x}$ podobá na riadky transformačnej matice. Získanými koeficientmi váhujeme pri rekonštrukcii $\bar{x}$ jednotlivé vektory bázy B. Čo však predstavujú riadky transformačnej matice $\mathbf{T}$?

- Pre *ortonormálne bázy* $B = \{b_i\}$, vyplýva z vlastností matíc

$$\mathbf{T} = \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}^{*T}\,, \tag{6.38}$$

  t. j. riadky matice $\mathbf{T}$ sú konjugované bázové vektory b_i.

- Všeobecne platná interpretácia je, že riadky matice $\mathbf{T} = \mathbf{B}^{-1}$ predstavujú bázové vektory bázy $\tilde{B}$, duálnej k B v zmysle časti 6.4.3. Podmienku duality báz (6.23) totiž môžeme rozpísať ako

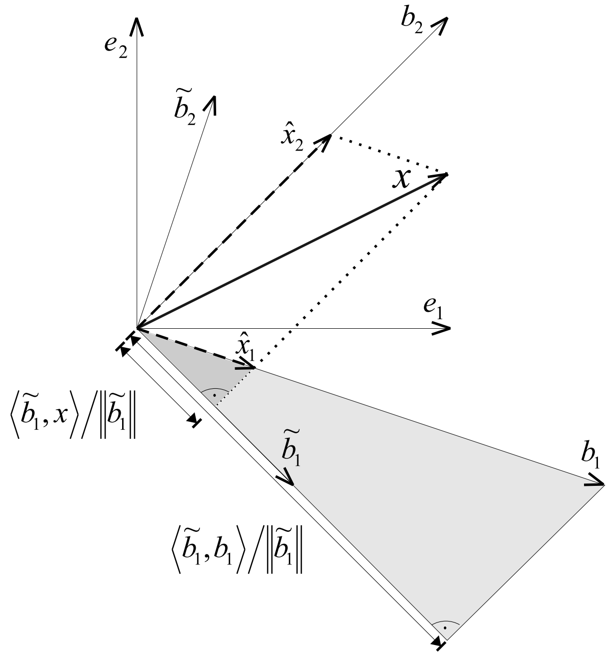
$$\left\langle \tilde{b}_1, b_1 \right\rangle = \left\langle \tilde{b}_2, b_2 \right\rangle = 1 \qquad \left\langle \tilde{b}_1, b_2 \right\rangle = \left\langle \tilde{b}_2, b_1 \right\rangle = 0\,, \tag{6.39}$$

  čo v maticovom tvare znamená:

$$\mathbf{B}^T\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{I} = \tilde{\mathbf{B}}^T\mathbf{B}\,, \tag{6.40}$$

  z čoho vyplýva

$$\mathbf{T} = \mathbf{B}^{-1} = \tilde{\mathbf{B}}^T\,. \tag{6.41}$$



Obr. 6.3. Geometrická reprezentácia vety 6.4. Zobrazené sú duálne bázy z obr. 6.2. Hľadáme súradnice vektora x v báze B. Platí $x = \hat{x}_1 + \hat{x}_2$. Vektory $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$ získame ortogonálnou projekciou do bázových vektorov bázy $\tilde{B}$. Napr. pre $\hat{x}_1$: **1.** spravíme projekciu x aj b_1 do $\tilde{b}_1$ **2.** z podobnosti trojuholníkov XYZ a $XY'Z'$ a použitím vlastnosti 6.39 dostaneme $\|\hat{x}_1\|$. Použitím jednotkového vektora v smere vektora $\bar{b}_1$ dostaneme $\hat{x}_1 = \langle \tilde{b}_1, x \rangle b_1$

Zistené vlastnosti môžeme sformulovať v nasledovej vete:

Veta 6.4 *Súradnice vektora $\bar{x}$ vo vektorovom priestore s bázou B, získame jeho ortogonálnou projekciou do vektorov bázy $\tilde{B}$, duálnej k báze B.*

Pripomeňme si, že súradnice vektora $\bar{x}$ vo vektorovom priestore s bázou B tvoria spektrum signálu získané doprednou transformáciou. Dôsledky vety 6.4 môžeme v zmysle definície 6.12 vyjadriť ako:

$$\bar{y} = \mathbf{T}\bar{x} = \tilde{\mathbf{B}}^T \bar{x} = \begin{pmatrix} \left\langle \tilde{b}_1, x \right\rangle \\ \left\langle \tilde{b}_2, x \right\rangle \end{pmatrix} \tag{6.42}$$

$$\bar{x} = \mathbf{T}^{-1}\bar{y} = \mathbf{B}\,\bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 & \bar{b}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left\langle \tilde{b}_1, x \right\rangle \\ \left\langle \tilde{b}_2, x \right\rangle \end{pmatrix} = \left\langle \tilde{b}_1, x \right\rangle \bar{b}_1 + \left\langle \tilde{b}_2, x \right\rangle \bar{b}_2 \,. \tag{6.43}$$

Geometrická interpretácia dôsledkov vety 6.4 je znázornená na obr. 6.3.

6.4.6 Rámce

Definícia 6.13 *Rámcom vo vektorovom priestore $\mathcal{E}$ nazývame neprázdnu podmnožinu $B = \{\psi_i\}$, $B \subset E$ práve vtedy, ak $L(B) = \mathcal{E}$ a $\forall f \in \mathcal{E}$ existujú kladné konečné konštanty C, D také, že platí:*

$$C \, \|f\|^2 \leq \sum_{m,n} |\langle f, \psi_{m,n} \rangle|^2 \leq D \, \|f\|^2 \,. \tag{6.44}$$

Rámce nie sú nevyhnutne lineárne nezávislé množiny. Reprezentácia vektora pomocou rámcov môže byť nadbytočná a nejednoznačná. Ak $C = D$, rámec sa nazýva ***tesný*** a naviac ak $\|\psi_{m,n}\| = 1$, potom C udáva mieru redundancie rámca oproti báze (ak $C = 2$, potrebujeme $2\times$ viac vektorov na vyjadrenie f). Ak $C = D = 1$ $\|\psi_{m,n}\| = 1$ rámec $\{\psi_{m,n}\}$ tvorí ortonormálnu bázu priestoru $\mathcal{E}$.

Literatúra

[1] Stoer, J., Bulirsch, R.: *Introduction to Numerical Analysis*, Springer Verlag, New York, 1980.

[2] Paupolis, A., D.: *The Handbook of Formulas and Tables for Signal Processing*, CRC Press LLC, 1999

[3] Williams, G.: *Linear Algebra with Applications*, Jones & Barlett Publishers, 2001

[4] Malvar, H., S.: *Signal processing with Lapped Transforms*, Artech House, 1991

[5] Naylor, A., W., Sell, G., R.: *Teória lineárnych operátorov v technických a prírodných vedách*, Alfa, Bratislava, 1981

[6] Polec, J., Pavlovičová, J., Oravec, M.: *Vybrané metódy kompresie dát*, Faber, Bratislava, 1996.

[7] Kotuliaková, J., Rozinaj, G.: *Číslicové spracovanie signálov*, Bratislava, 1999

[8] Vargic, R.: *Kopmresia statického obrazu s využitím waveletovej transformácie a lifting schémy*, Doktorská dizertačná práca, FEI STU v Bratislave, 1999

[9] Polec,J.,Karlubíková,T., Oravec,M, Pavlovičová,J., Vargic, R.: *Vybrané metódy kompresie dát-Kódovanie obrazov*, vydavateľstvo Univerzity Komenského v Bratislave, 2000

[10] Polec, J., Pavlovičová, J., Oravec, M., Vargic, R., Karlubíková, T.: *Fundamentals of Image Coding*. FEI STU, Bratislava 2001

[11] Polec,J.,Karlubíková,T., Oravec,M, Pavlovičová,J., Vargic, R.: *Medzinárodné štandardy pre kompresiu obrazu I.- princípy kódovania obrazov*, Vydavateľstvo STU, Bratislava 2001, CD-ROM

[12] Vích, R., Smékal Z.: *Číslicové filtry*, Academia, Praha, 2000

[13] Jan, J.: *Číslicová filtrace, analýza a restaurace signálů*, VUTIUM, VUT v Brne, 2002,

[14] Levický, D.: *Multimediálne telekomunikácie*, Elfa s.r.o, Košice, 2002

[15] Ondráček, O.: *Diskrétne signály a sústavy*, Vydavateľstvo STU, Bratislava, 2002

[16] Ondráček, O.: *Signály a sústavy*, Vydavateľstvo STU, Bratislava, 2003

[17] Akanasu, A., N., Haddad, R., A.: *Multiresolution signal decomposition* , Academic press, 1992.

[18] Daubechies, I.: *Ten lectures on wavelets*, SIAM, 1992.

[19] Chui, Ch., K.: *An introduction to wavelets*, Academic press, NewYork, 1992.

[20] Chui, Ch., K. editor: *Wavelets: A tutorial in Theory and Applications*, Academic Press, 1992.

[21] Vetterli, M., Kovačević, J.: *Wavelets and Subband Coding*, Prentice Hall, 1995.

[22] Strang, G.,Nguyen, T.: *Wavelets and Filter Banks*, Wellesley-Cambridge Press, 1996.

[23] Burrus, S., C., Gopinath, A., Guo, H.: *Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms*, Prentice Hall, 1998.

[24] Akanasu, A., N., Medley, M.(editors): *WAVELET, SUBBAND AND BLOCK TRANSFORMS IN COMMUNICATIONS AND MULTIMEDIA*, Kluwer Academic Publishers, 1999.

[25] Cohen, A.: *Wavelets and multiscale Signal processing*, Champan& Hall, 1995.

[26] Newland,D.E.: *An introduction to Random vibrations, spectral and wavelet analysis*, Longman Scientific & Technical, 1993.

[27] Meyer.Y.: *Wavelets:algoritms and applications*, SIAM, 1993.

[28] Ruskai,M.,B.: *Wavelets and their applications*, Jones and Barlett, Boston-London, 1992.

[29] Stolznitz, E., DeRose., T., Salesin., D.: Wavelets for Computer Graphics, theory and application, Morgan Kaufmann Publishers, San Francisco, 1996

[30] Zimmermann, J.: *Spektrografická a škálografická analýza akustického rečového signálu*, Náuka, Prešov, 2002

[31] MathWorks: *MATLAB: Wavelet Toolbox User's Guide*, http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/toolbox/wavelet/

[32] Mallat, S.: *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press, 1999

[33] Unser, M., Blu, T.: *Wavelet Theory Demystified*, IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 51, no. 2, pp. 470-483, February 2003.

[34] Coifman R., Wickerhauser, M., V.: *Entrophy-Based Algorithms for Best Basis Selection*, IEEE Transaction on Information theory, Vol. 38, March 1992.

[35] Ramchandran,K., Vetterli,M., Herley,C.: *Wavelets, Subband Coding, and Best Bases*, Proceedings of the IEEE, Vol. 84, No.4, pp 541-560, 1996.

[36] Xia, X, Geronimo,J.,S., Hardin,P., Suter,B.,W.: Design of Prefilters for Discrete Multiwavelet Transforms, IEEE Transactions on signal processing, Vol. 44, januar 1996.

[37] Strela, V., Heller, P., Strang, G., Topiwala, P., Heil, C.: *Multiwavelet filter banks for data compression*, Proc. IEEE ISCAS, Seattle, 1995.

[38] Sweldens, W.: *The Lifting Scheme: A new philosophy in biorthogonal wavelet constructions*, In A. F. Laine and M. Unser, editors, Wavelet Applications in Signal and Image Processing III, str. 68-79, Proc. SPIE 2569, 1995.

[39] Sweldens, W.: *A custom-design construction of biorthogonal wavelets*, Appl. Comput. Harmon. Anal., Vol. 3, Nr. 2, str. 186-200, 1996.

[40] Daubechies, I., Sweldens, W.: *Factoring Wavelet Transforms Into Lifting Steps*, J. Fourier Anal. Appl., Vol. 4, Nr. 3, str. 247-269, 1998.

[41] Kovačević, J., Sweldens, W.: *Wavelet families of increasing order in arbitrary dimensions*, Preprint, Bell Laboratories, Lucent Technologies, December 1997.

[42] Herley, C.: *Exact Interpolation and Iterative Subdivision Schemes*, IEEE Transactions on signal processing, Vol. 43, 1995.

[43] SIGGRAPH ́95 Course Notes: *Wavelets and their Applications in Computer Graphics*, organized by Fournier,A., University of British Columbia, 1995.

[44] Zorin, D., Schröder, P., Sweldens, W.: *Interpolating Subdivision for Meshes with Arbitrary Topology*, Computer Graphics Proceedings (SIGGRAPH 96), str. 189-192, 1996.

[45] Ramaswamy, V.: *Losless Image Compression Using Wavelet Decomposition*, PhD Thesis, University of South Florida, August 1998.

[46] Claypole, R., Davis, G., Sweldens, W., Baraniuk, R.: *Nonlinear Wavelet Transforms for Image Coding*, Proceedings of the 31st Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers, Vol. 1, str.662-667, 1997.

[47] Wallace, G., K.: *The JPEG still Picture Compression Standard*, Communications of the ACM, Vol.34, No.4, April 1991, str. 30-44

[48] Shapiro, J., M.: *Embedded image coding using zerotrees of wavelet coefficients*, IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 41, str. 3445-3462, April 1992.

[49] Said, A., Pearlman, W. A.: *A new fast and efficient image codec on set partitioning in hierarchical trees*, IEEE Trans.on Circuits Syst. Video Tech., vol. 6, str. 243-250, June 1996

[50] Boliek, M.(editor) JPEG 2000 Part I Final Committee Draft Version 1.0, ISO/IEC JTC1/SC29 WG1 (ITU-T SG8), April 2000

Zoznam použitých skratiek a symbolov

Skratky

1D,2D	Jednorozmerný, dvojrozmerný
AVR	Analýza viacúrovňovým rozlíšením (MultiResolution analysis)
BF	Banka filtrov
bpp	Počet bitov na bod (bits per pixel)
BT	Bloková transformácia
CDF	Cohonen-Daubechies-Feauveau
CQF	Konjugované kvadratúrne filtre
CBS	Celobodová symetria
CTFT	Continuous Time Fourier Transform (známa pod skratkou FT)
CTFS	Continuous Time Fourier Series (známe pod skratkou FR)
ČSS	Číslicové spracovanie signálov
TF	Časovo-frekvenčné (Time-Frequency)
DbK	Daubechieovej wavelet rádu K, t. j. s K nulovými momentmi
DD	Deslauriers-Dubuc
DFT	Diskrétna Fourierova transformácia
DTFT	Discrete Time Fourier Transform
DTFS	Discrete Time Fourier Series (známa pod skratkou DFT)
DOT	Diskrétna ortogonálna transformácia
DLT	Diskrétna lineárna transformácia
DMWT	Diskrétna multiwaveletová transformácia
DP	Dolnopriepustný
DWT	Diskrétna waveletová transformácia
FR	Fourierove rady
GenLOT	Zovšeobecnená prekryvná ortogonálna transformácia
GLBT	Zovšeobecnená prekryvná biortogonálna transformácia
FT	Fourierova Transformácia
GHM	Geronimo-Hardin-Massopust
HP	Hornopriepustný
JPEG	Joint Photographics Experts Group
KIO	Konečná impulzová odpoveď
LOT	Prekryvná ortogonálna transformácia (Lapped orthogonal transform)
MSE	Stredná kvadratická chyba (Mean Square Error)
MWR	Multiwaveletové rady
NIO	Nekonečná impulzová odpoveď
NSD	Najväčší spoločný deliteľ
PR	Periodické rozšírenie (signálu)
PBS	Polbodová symetria
PCM	Pulzne kódovaná modulácia
QMF	Kvadratúrne zrkadlové filtre (Quadrature Mirror Filters)
RWT	Rýchla waveletová transformácia
STFT	Krátkodobá Fourierova transformácia (Short Time Fourier Transform)
SCG	Škálogram

SPG	Spektrogram
SPIHT	Algoritmus „Subband Partitioning in Hierarchical Trees“
SR	Symetrické rozšírenie (signálu)
SWT	Spojitá waveletová transformácia
TC	Transformačné kódovanie (Transform Coding)
TF	Časovo-frekvenčná (Time-frequency)
TS	Časovo-mierková (Time-scale)
ÚR	Úplná rekonštrukcia
VR	Viacrýchlostné (systémy), angl. multirate
WF	Waveletové rámce (Wavelet frames)
WPT	Waveletová paketová transformácia
WR	Waveletové rady
WT	Waveletová transformácia
ZT	Stromy nulových koeficientov (Zerotrees)

Matematické symboly

$\square^*$	označenie komplexnej konjugácie hodnoty, resp. funkčných hodnôt
$\square \bigoplus \square$	priama suma podpriestorov Hilbertových priestorov
$\tilde{\square}$	označenie duality (napr. $\tilde{\psi}(t)$ je duálny wavelet k $\psi(t)$)
$\bar{\square}$	označenie stĺpcového vektora.
	Príklady použitia: $\begin{matrix} \bar{x} = [x(0), x(1), \ldots, x(N-1)]^T \\ \bar{x} = x^T = (x_0 \quad x_1 \ldots x_{N-1})^T \end{matrix}$, $N \in \mathcal{Z}$
$\langle \square, \square \rangle$	skalárny súčin
$\square \star \square$	diskrétna konvolúcia $h(n) \star x(n) = \sum_k h(k)x(n-k), \quad n, k \in \mathcal{Z}$
$\lvert \square \rvert$	absolútna hodnota
$\lVert \square \rVert$	veľkosť vektora v Hilbertovom priestore
$\lfloor \square \rfloor$	celá časť reálneho čísla $\square$
$\downarrow M, \uparrow M$	podvzorkovanie resp. nadvzorkovanie signálu faktorom M
$\underset{riadky/stlpce}{\square \quad \downarrow 2}$	vynechanie každého druhého riadku resp. stĺpca v matici $\square$
$\mathbf{0}_N$	nulová matica rozmerov NxN
Ⓐ	operácia *aktualizácie* v liftingovej schéme
$ap_m(t)$, $ap_m(n)$	spojitá/diskrétna aproximácia signálu na úrovni rozlíšenia m v AVR
$\mathcal{C}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{Z}$	množiny komplexných, reálnych a celých čísel
$\mathcal{C}^N$, $\mathcal{R}^N$	Hilbertov priestor vektorov dĺžky N nad množinou komplexných a reálnych čísel
C_ψ, $C_{\psi 1, \psi 2}$	normalizačná konštanta pri výpočte spätnej SWT
$c_m(n), c_{m,n}$	koeficienty mierky pri DWT a WR na úrovni rozlíšenia m
$c^{(i)}(n)$	koeficienty mierky vo fáze i pri výpočte WR a DWT liftingom
$d_m(n), d_{m,n}$	waveletové koeficienty pri DWT a WR na úrovni rozlíšenia m
$d^{(i)}(n)$	waveletové koeficienty vo fáze i pri výpočte WR a DWT liftingom
$\delta(t)$	Diracov impulz, $\delta(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$, $t \in \mathcal{R}$
$\partial^K(\square)$	diferenciálny operátor pre wavelet s K-nulovými momentmi
$de_m(t)$, $de_m(n)$	spojitý/diskrétny detail signálu na úrovni rozlíšenia m v AVR
$det(\square)$	determinant matice
$\tilde{F}_k(z)$, $F_k(z)$	prenosové funkcie k-teho filtra pri analýze/syntéze v M-pásmovej BF

$E(s)$	entropia signálu s
$\tilde{\mathbf{F}}(z)$, $\mathbf{F}(z)$	polyfázové matice pre analýzu/syntézu v M-pásmovej BF
f_{vz}	vzorkovacia frekvencia
$\gamma(t)$, $\Gamma(\omega)$	vyhladzujúci operátor
G_{TC}	zisk transformačného kódovania
$h(n)$, $H(z)$	impulzová charakteristika filtra a zodpovedajúca prenosová funkcia
$H(z)_*$	prenosová funkcia s konjugovanými koeficientmi pri všetkých mocninách z
$\tilde{h}(n)$, $\tilde{g}(n)$	impulzové charakteristiky filtrov analyzačnej časti dvojpásmovej BF
$h(n)$, $g(n)$	impulzové charakteristiky (DP, HP) filtrov syntetizačnej časti dvojpásmovej BF
$H^k(z)$	k-ta polyfázová zložka prenosovej funkcie $H(z)$
$\mathbf{H}_{konv}$,$\mathbf{G}_{konv}$	konvolučné matice pri výpočtoch v bankách filtrov
$h_{mr}(n)$, $g_{mr}(n)$	dilatačné koeficienty
$\mathbf{I}$	jednotková diagonálna matica rozmerov NxN
K, $\tilde{K}$	K-regularita, počet nulových momentov waveletu resp. jeho duálneho waveletu
K_N	normalizačná konštanta v liftingovej schéme, $K_N \in \mathcal{R} - \{0\}$
$L^2(\mathcal{R})$	Hilbertov priestor spojitých 1D funkcií s konečnou energiou
$L^2(\mathcal{R}^2)$	Hilbertov priestor spojitých 2D funkcií s konečnou energiou
$l^2(\mathcal{Z})$	Hilbertov priestor sekvencií s konečnou energiou
$L(M)$	lineárny obal množiny M
$\mathbf{P}(z)$	polyfázová matica
$m(k)$	k-ty moment spojitej funkcie
$\mu(k)$	k-ty moment diskrétnej funkcie
N	dĺžka diskrétnych signálov
N, $\tilde{N}$	dĺžky impulzových odpovedí filtrov pre syntézu resp. analýzu
Ω	pomerová uhlová frekvencia $\Omega = \frac{2\pi}{\omega_{vz}}\omega$
ω_0	stredná uhlová frekvencia, súradnica stredu TF okna (signálu)
ω_{vz}	vzorkovacia uhlová frekvencia, $\omega_{vz} = 2\pi f_{vz}$
P	operácia predikcie v liftingovej schéme
$P_p(z)$	prenosová funkcia polpásmového filtra
$\varphi(t)$, $\tilde{\varphi}(t)$	funkcia mierky a jej duál
$\varphi_{S_M}(t)$	Spline funkcia mierky rádu M
$\psi(t)$, $\tilde{\psi}(t)$	základný wavelet a jeho duál
$\psi_{typ}(t)$	základný wavelet daného typu
$\psi_{[a,b]}(t)$	wavelet so zmenou mierky a a posunom b
$\psi_{m,n}(t)$	wavelet na úrovni rozlíšenia m a s posunom n
$\psi_{typ}^{[\,]}(t)$, $\psi_{[\,]}^{typ}(t)$	wavelet daného *typu*, Napr.: $Haar$, DbK, Mex, $B\ K.\tilde{K}$, $Sinc$,...
Q_ψ	kvalita waveletu
$\boxed{R}$, $\boxed{R^{-1}}$	rozdelenie resp. spätné zloženie párnych a nepárnych koeficientov v liftingovej schéme
$R_a(z)$, $R_p(z)$	prenosové funkcie pre aliasing resp. celkový prenos v dvojpásmovej BF
r_f	regularita funkcie $f(t)$, $t \in \mathcal{R}$
$S_{t\omega}$	stred časovo-frekvenčného okna v TF rovine. Platí $S_{t\omega} = (t_0, \omega_0)$
s_a	ortogonálny priemet vektora $s \in \mathcal{E}$ do vektora a, $a, s \in \mathcal{E}$
s_M	ortogonálny priemet vektora $s \in \mathcal{E}$ do podpriestoru $\mathcal{M} \subset \mathcal{E}$
$\hat{s}_{\mathcal{M}}$	aproximácia vektora s v priestore $\mathcal{M} \subset \mathcal{E}$

$\hat{s}_{V_m}$,$\hat{s}_{W_m}$	aproximácie vektora $s \in \mathcal{E}$ v $\mathcal{V}_m, \mathcal{W}_m \subset \mathcal{E}$. Platí $\hat{s}_{V_m} = ap_m$, $\hat{s}_{W_m} = de_m$
$S_i(z)$, $T_i(z)$	polynómy predikcie resp. aktualizácie v i-tom kroku lifting
$st(\square)$	stupeň Laurentovho polynómu $\square$
$STFT_f(\omega, \tau)$	krátkodobá Fourierova transformácia funkcie $f(t)$
$SWT_f(a, b)$	SWT funkcie $f(t)$
σ_t, σ_ω	veľkosti polovíc strán TF okien funkcií
t_0	stred TF okna (signálu) v čase
$\mathbf{T}_a$, $\mathbf{T}_s$	transformačné matice pri analýze a syntéze v BF
$u(n)$	Kroneckerov impulz, $u(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$, $n \in \mathcal{Z}$
U	počet úrovní rozkladu pri DWT
$WR_f(m, n)$	waveletový rad funkcie $f(t)$
$\mathcal{V}_m, \mathcal{W}_m$	sumačný resp. diferenčný podpriestor na úrovni rozlíšenia m v AVR
$w_{m,k}(t)$	waveletové pakety
$\mathcal{W}_{m,k}(t)$	podpriestory pri rozklade signálu pomocou WPT
z-rovina	označenie roviny komplexnej premennej „z“
$Z[f(t)]$	Z-transformácia funkcie $f(t)$

Register