

Čo robiť pri DWT na kraji signálu signálu:

1. *Doplnenie nulami* - vnáša diskontinuity na okrajoch signálu.
2. *Periodifikácia signálu* - má za následok periodifikáciu analýzy s rôznym rozlíšením (MRA), čo je v praxi implementované kruhovou konvolúciou pri filtrovaní v čase. Výsledky sú lepšie ako v 1. prípade .
3. *Symetrické rozšírenie signálu* - je podmienené použitím filtrov s lineárnou fázou , t.j. biortogonálnymi waveletmi.
4. *Priama extrapolácia*. Nepredpokladáme žiadnu symetriu, pričom okrajové hodnoty mimo hraníc signálu sa vyjadrujú pomocou transformačných koeficientov (lineárna, polynomická, nelineárna závislosť hraničných hodnôt).
5. *Wavelety na intervale a okrajové filtre* - Originálna definícia waveletov používa funkcie definované na celej reálnej osi. Ďalšou možnosťou je definovanie špeciálnych waveletov na intervale: tieto pozostávajú z obvyklých waveletov, ktorých podpora je úplne vnútri intervalu a špeciálnych “okrajových” waveletov. V praxi sa riešia modifikovaním $h_{mr}(n), g_{mr}(n)$ na okrajoch signálu, t.j. zavedením špeciálnych modifikovaných hraničných filtrov. Existuje celý priestor ortogonálnych riešení hraničných filtrov, t.j. je pomerne veľký stupeň voľnosti pre optimalizáciu.

Doplnenie nulami

Utvorme maticu A prestriedaním riadkov $\tilde{\mathbf{H}}_m \tilde{\mathbf{G}}_m$, filtračných matic pre analýzu. A z nej utvorme maicu A^* , kde sú koeficienty filtrov sú “useknuté” iba na jednej strane:

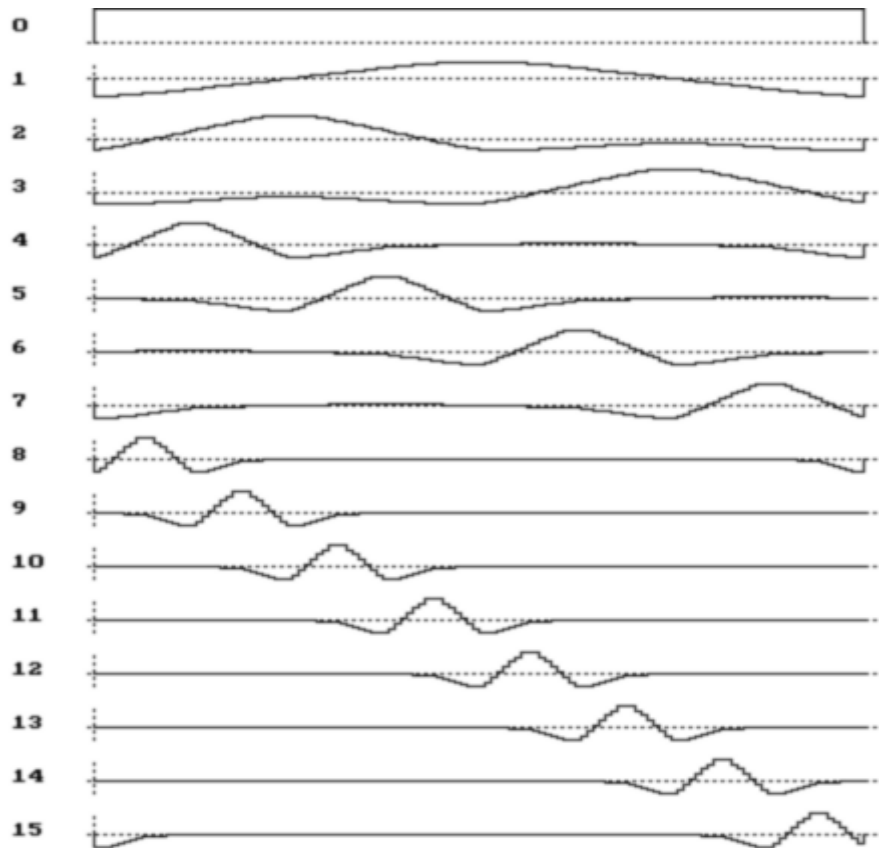
$$A^* = \begin{pmatrix} \tilde{h}(0) & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(2) & \tilde{h}(3) & \dots & \dots \\ \tilde{g}(0) & \tilde{g}(1) & \tilde{g}(2) & \tilde{g}(3) & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \tilde{h}(0) & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(2) & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & \tilde{h}(0) & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(2) & \tilde{h}(3) \\ & & & \tilde{g}(0) & \tilde{g}(1) & \tilde{g}(2) & \tilde{g}(3) \\ & & \dots & \dots & \dots & \tilde{h}(0) & \tilde{h}(1) \\ & & & \dots & \dots & \tilde{g}(0) & \tilde{g}(1) \end{pmatrix}$$

Matica A^* je singulárna, avšak použitím posunutej matice A je možné nájsť inverznú maticu s odpovedajúcou štruktúrou. Výsledné filtre potom môžeme použiť pri rekonštrukcii.

$$A^{**} = \begin{pmatrix} \tilde{h}(1) & \tilde{h}(2) & \tilde{h}(3) & \dots & \dots \\ \tilde{g}(1) & \tilde{g}(2) & \tilde{g}(3) & \dots & \dots \\ 0 & \tilde{h}(0) & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(2) & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & \tilde{h}(0) & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(2) & \tilde{h}(3) & 0 \\ & & & \tilde{g}(0) & \tilde{g}(1) & \tilde{g}(2) & \tilde{g}(3) & 0 \\ & & \dots & \dots & \dots & \tilde{h}(0) & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(2) \\ & & & \dots & \dots & \tilde{g}(0) & \tilde{g}(1) & \tilde{g}(2) \end{pmatrix}$$

Periodické rozšírenie.

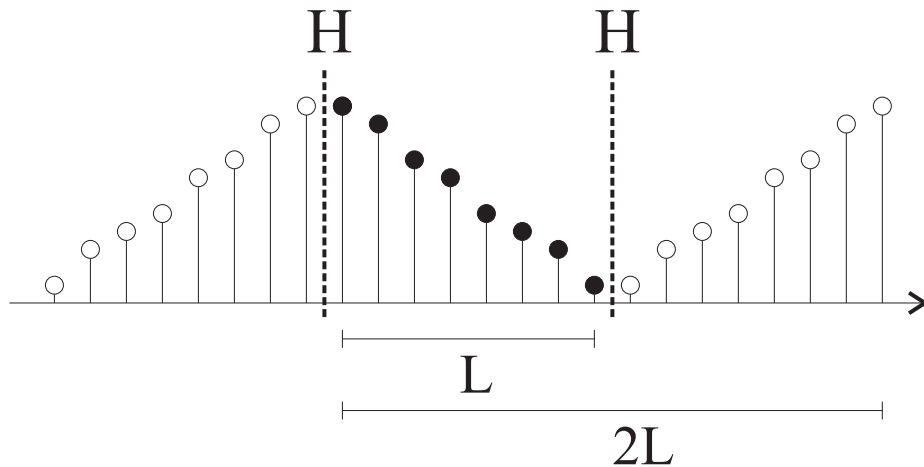
- speriodifikované koeficienty $h_{mr}(n), g_{mr}(n)$
- speriodifikované transformáčn  matice
- speriodifikovanie b zov ch funkcií



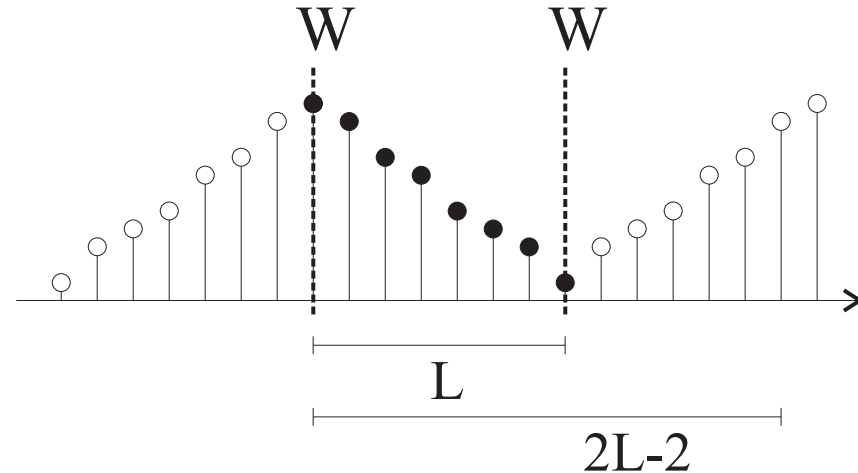
Prv ch 32 b zov ch funkcií diskre nej waveletovej b zy o ve kosti $N=128$ pre FBI(9,7) wavelet

Symetrické rozšírenie signálu

I) polbodová symetria(H)



II) celobodová symetria (W)



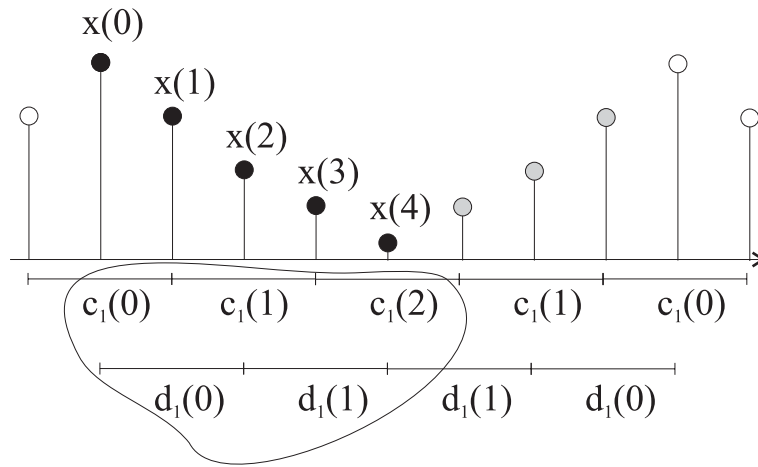
Pre aké filtre(sekvencie $h_{mr}(n), g_{mr}(n)$) použiť ktorú symetrizáciu?

a) $h_{mr}(n), g_{mr}(n)$ majú párnú dĺžku(t.j. sami sú H symetrické) → typ H

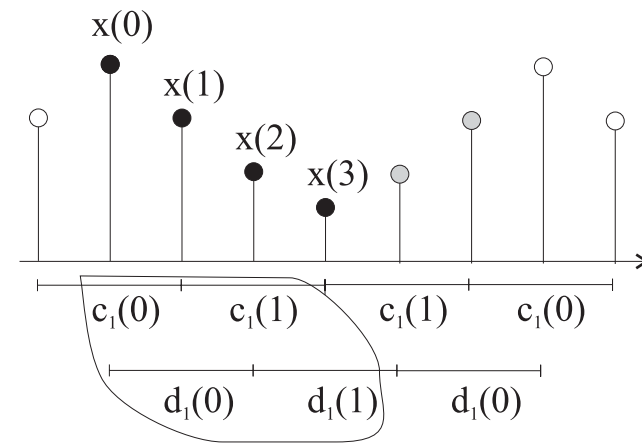
b) $h_{mr}(n), g_{mr}(n)$ majú nepárnu dĺžku(t.j. sami sú W symetrické) → typ W

Typ symetrizácie musí byť zhodný aby rozšírený signál po podvzorkovaní danú symetriu nestratil.

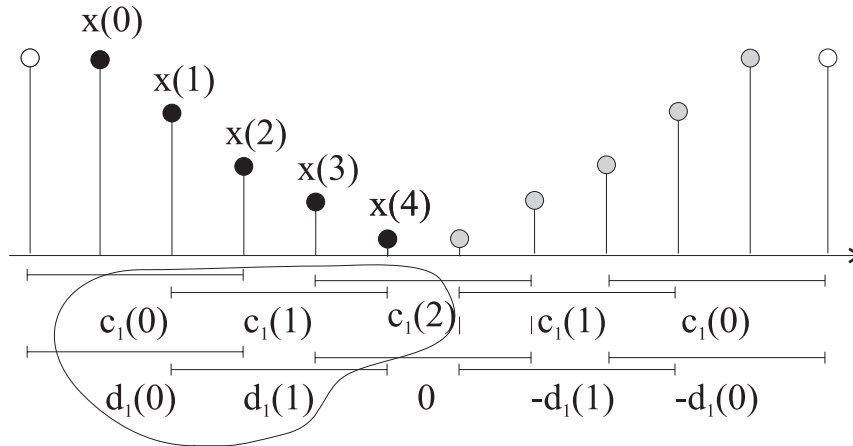
Stred filtrov a reprezentácia signálu s párnou/nepárnou dĺžkou



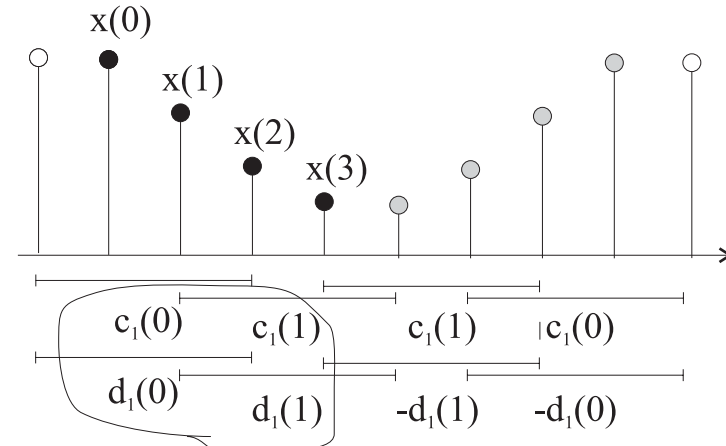
a) symetria W, nepárna dĺžka signálu(5)



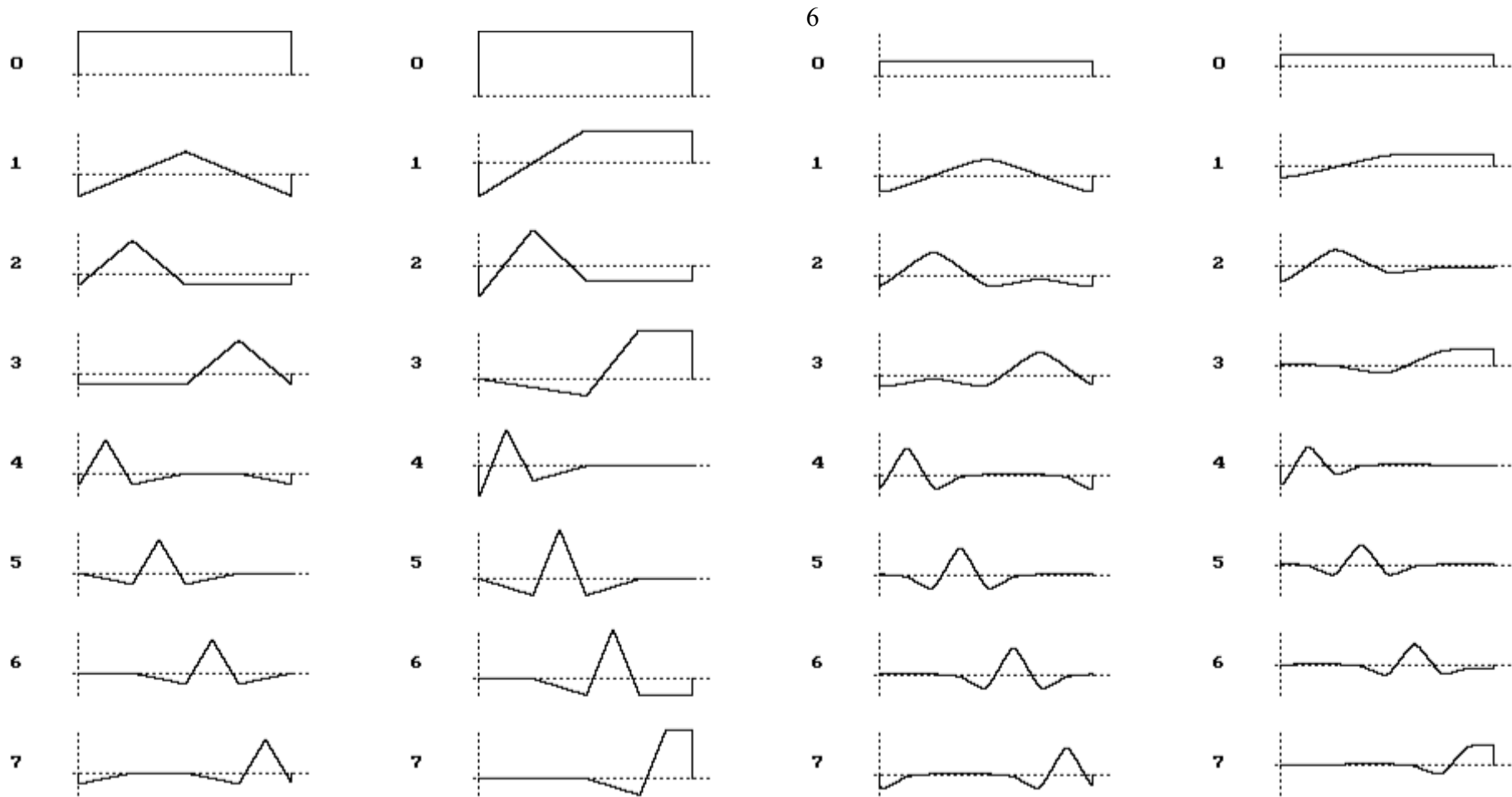
b) symetria W, párna dĺžka signálu(4)



c) symetria H, nepárna dĺžka signálu(5)



d) symetria H, párna dĺžka signálu(4)



a) CDF(2,2)+PER

b) CDF(2,2) +SYM

c) FBI(9,7)+PER

d) FBI(9,7)+SYM

Porovnanie vplyvu speriodického a symetrického rozšírenia na tvar bázových funkcií 1D DWT. Zobrazených je prvých osem bázových funkcií, veľkosť bázy je $N=128$.

Priama extrapolácia

Doplnenie nulami a symetrické rozšírenie sú vlastne základné extrapolačné metódy.

Majme maticu A v tvare:

$$A = \begin{pmatrix} \tilde{h}(0) & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(2) & \tilde{h}(3) & \dots & \dots \\ \tilde{g}(0) & \tilde{g}(1) & \tilde{g}(2) & \tilde{g}(3) & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \tilde{h}(0) & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(2) & \dots \\ 0 & 0 & \tilde{g}(0) & \tilde{g}(1) & \tilde{g}(2) & \dots \\ & & \dots & & & \dots \end{pmatrix}$$

Platí podmienka: ak sekvencie $h_{mr}(n) = \tilde{h}(n)$, $g_{mr}(n) = \tilde{g}(n)$ v matici A majú dĺžku L a matica A je typu NxN, potom vytvárame takú transformačnú maticu A_e aby A_e^{-1} existovala a aby *stĺpce* A_e^{-1} mali primeranú kompaktnú podporu $< N$.

Ak prvý stĺpec matice A budeme považovať za tú časť transformačnej matice, ktorá “prečnieva” na začiatku, t.j. predstihuje signal, potom extrapoláciu (maticu A_e) môžeme vyjadriť nasledovne (analogicky to bude pre posledné stĺpce):

1) Doplnenie nulami

- a. vynecháme prvý stĺpec A , označme ho $A(:,1)$

2) Konštantná extrapolácia

- a. vynecháme $A(:,1)$
- b. pridáme $A(:,1)$ k $A(:,2)$, t.j. $A(:,2) = A(:,2) + A(:,1)$

3) Lineárna extrapolácia

- a. vynecháme $A(:,1)$
- b. $A(:,2) = A(:,2) + 2 * A(:,1)$
- c. $A(:,3) = A(:,3) - 1 * A(:,1)$

4) Kvadratická extrapolácia

- a. vynecháme $A(:,1)$
- b. $A(:,2) = A(:,2) + 3 * A(:,1)$
- c. $A(:,3) = A(:,3) - 3 * A(:,1)$
- d. $A(:,4) = A(:,4) + 1 * A(:,1)$

...

Wavelety na intervale a okrajové filtre

Ciel – Navrhnuť transformačnú maticu A_b (b-boundary) ako v prípade A^{**} resp A_e avšak navyše zachovať ortogonalitu na okrajoch.

Okrajové filtre – prvé a posledné 2 riadky v matici A

Okrajové funkcie mierky a wavelety – prvé a posledné funkcie v bázach podpriestorov odpovedajúce okrajovým filtrom (viď. kaskádové algoritmy)

V prípade ak dĺžka ortogonálnych filtrov je 4 môže byť matica A_b v tvare:

$$A_b = \begin{pmatrix} r & s & t & 0 & \dots & \dots & & & \\ u & v & w & 0 & \dots & \dots & & & \\ 0 & a & b & c & d & 0 & \dots & & \dots \\ 0 & -d & c & -b & a & 0 & & & \\ & & \vdots & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & 0 & a & b & c & d & 0 \\ & & & & & & & 0 & -d & c & -b & a & 0 \\ & & \dots & & & & & \dots & 0 & 0 & 0 & e & f & g \\ & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & x & y & z \end{pmatrix}$$

Prvé dva riadky musia byť ortogonálne na ostatné. T.j. stačí na druhé dva.

Hľadáme vektory (r,s,t) a (u,v,w) ortogonálne navzájom a zároveň na $(0,a,b)$ a $(0,-d,c)$.

- Vektory $(0,a,b)$ a $(0,-d,c)$ sú lineárne závislé (lebo $h_{mr}(n)$ je ortogonálny na svoje párne posuny, t.j. $ac+bd=0$).
- T.j. stačí nájsť (r,s,t) a (u,v,w) ortogonálne navzájom a na $(0,a,b)$ (napr. Gramm-Schmidtovým(GS) postupom)

Ostáva 1 stupeň voľnosti – použijeme ho napr. na zabezpečenie aby wavelet mal aspoň minimálnu regularitu, t.j.

$$u+v+w=0$$

Analogicky riešime pre (e,f,g) a (x,y,z) .

Napr. pre DB2 platí:

$$\begin{array}{ll} (r,s,t) &= (0.93907, 0.29767, -0.17186) \\ (u,v,w) &= (-0.34372, 0.81326, -0.46954) \end{array} \quad \begin{array}{ll} (e,f,g) &= (0.40245, 0.69879, 0.59069) \\ (x,y,z) &= (0.25535, 0.51155, -0.80690) \end{array}$$

Všeobecne môžeme ľavý horný roh (analogicky aj pravý dolný) transformačnej matice vyjadrit:

$$\mathbf{A}_b = \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ (\mathbf{0} \quad \mathbf{A}) \end{pmatrix}$$

kde $\mathbf{B}$ vznikne vhodnou úpravou matice

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_D & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{L} \quad \mathbf{0}) \end{pmatrix}$$

kde $\mathbf{L}$ je matica rozmerov $[(N-2)/2] \times [N-2]$ získaná GS ortogonalizačným procesom k Matici $\mathbf{A}$. T.j. uvedené hraničné filtre pre DB2 sú príkladom začiatku tejto matice ak $d=1$ a $N=4$, teda $\mathbf{L}$ má rozmer 1×2 a matica $\mathbf{B}$ vznikla úpravou matice

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ 0 & (\mathbf{L}_{1 \times 2} \quad \mathbf{0}) \end{pmatrix}$$

pre podmienku aby $u+v+w=0$.

Ako dostať jednoducho matice $\mathbf{L}$ (aj bez GS procesu)?

Definujme maticu $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{A}^T \mathbf{A}$$

vzhľadom na vlastnosti matice $\mathbf{A}$ má matica $\mathbf{P}$ tvar

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{\text{lava}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{P}_{\text{prava}} \end{pmatrix}$$

pričom lineárne nezávislé vektory z matíc $\mathbf{P}_{\text{lava}}$ a $\mathbf{P}_{\text{prava}}$ sú zároveň ortogonálne na riakdy matice $\mathbf{A}$, t.j. môžeme ich použiť namiesto matice $\mathbf{L}$.

Príklad: Vypočítajte Okrajové filtre pre Db2 s a) d=1 a b) d=3

$$A = \begin{array}{cccccc} / & 0.4830 & 0.8365 & 0.2241 & -0.1294 & 0 & 0 & \backslash \\ | & -0.1294 & -0.2241 & 0.8365 & -0.4830 & 0 & 0 & | \\ | & 0 & 0 & 0.4830 & 0.8365 & 0.2241 & -0.1294 & | \\ \backslash & 0 & 0 & -0.1294 & -0.2241 & 0.8365 & -0.4830 & / \end{array}$$

$$P = \begin{array}{cccccc} / & 0.2500 & 0.4330 & 0 & 0 & 0 & 0 & \backslash \\ | & 0.4330 & 0.7500 & 0 & 0 & 0 & 0 & | \\ | & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & | \\ | & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & | \\ | & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7500 & -0.4330 & | \\ \backslash & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4330 & 0.2500 & / \end{array}$$

Vektory (0.2500, 0.4330) a (0.4330 a 0.7500) sú lineárne závislé, t.j. matica $L = (0.2500, 0.4330)$.

$$\text{a) } B^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0,25 & 0,4330 & 0 & \dots \end{pmatrix} \quad \text{b) } B^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0,25 & 0,4330 & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

Ako zistíme ako vyzerajú funkcie mierky a wavelety?

Na kraji bázy nie klasickým kaskádovým algoritmom ale mocninami T_s , t.j. spojité bázové funkcie sú ekvivalentné stĺpcom T_s^k ak $k \rightarrow \infty$.

Rozšírenia/zovšeobecnenia waveletov:

- wavelety na intervale
- viacrozmerné wavelety
- M-pásmové wavelety
- Multivavelety
- waveletové pakety

Viacrozmerné wavelety

Vid' skriptá str. 79

M-pásmové wavelety

Doteraz bolo:

- báza V_m tvorená množinou $\{\varphi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \varphi(2^{-m}t - n), n \in \mathbb{Z}\}$
- dilatačná rovnica pre $\varphi(t)$: $\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n) \varphi(2t - n)$

Zovšeobecnením je:

$$\varphi(t) = \sqrt{M} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n) \varphi(Mt - n) \quad M \in \mathbb{Z}, M > 2$$

Čo platí pre $h_{mr}(n)$ ak báza tvorená pomocou $\varphi(t)$ je ortonormálna?

Označme $h_{mr}(n) = h(n)$. Analogicky ako pri vlastnostiach ortonormálnych DWT platí:

$$\sum_n h(n) = \sqrt{M}$$

$$\sum_n h(Mn + m) = 1 / \sqrt{M} \quad H(2\pi l / M) = 0 \quad l = 0, 1, \dots, M-1$$

$$\sum_n h(n + Mm) h(n) = \delta(m) \quad \text{resp.} \quad \sum_n h(n)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \|H(\omega)\|^2 + \|H(\omega + 2\pi / M)\|^2 + \dots + \|H(\omega + 2\pi(M-1) / M)\|^2 = M$$

atď...

A čo je s waveletmi ???

Nemáme jediný wavelet, ale *M-l waveletov* $\psi_l(t)$:

$$\psi_l(t) = \sqrt{M} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_l(n) \phi(Mt - n) \quad l = 0, 1, \dots, M-1$$

Čomu na každej úrovni rozlíšenia odpovedá *M-1 diferenčných priestorov* $W_{m,l}$.
T.j. pre MRA platí?

$$V_m = V_{m+1} \oplus W_{m+1,1} \oplus W_{m+1,2} \oplus \dots \oplus W_{m+1,M-1}$$

Wavelety sú *ortogonálne* k funkcii mierky, t.j. :

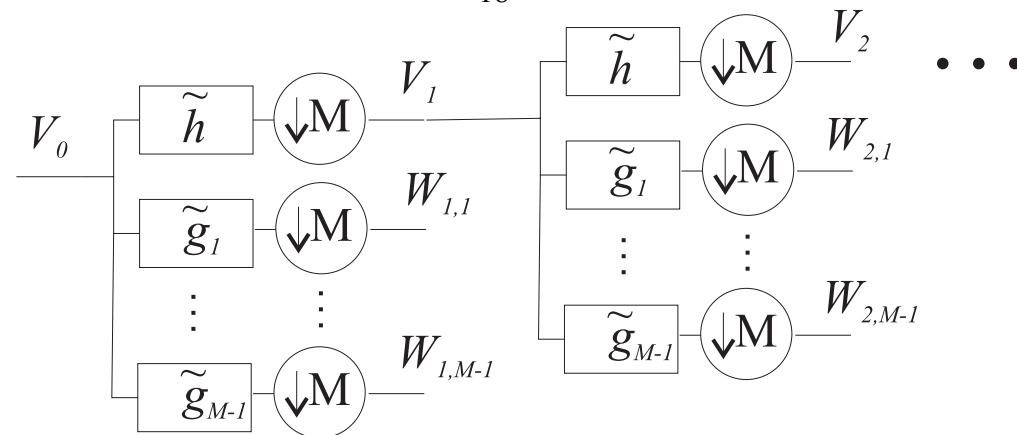
$$\int \phi(t-n) \psi_l(t-m) dt = 0 \quad \sum_n h(n) g_l(n-Mk) = 0 \quad l = 0, 1, \dots, M-1$$

Čo sme vlastne získali?

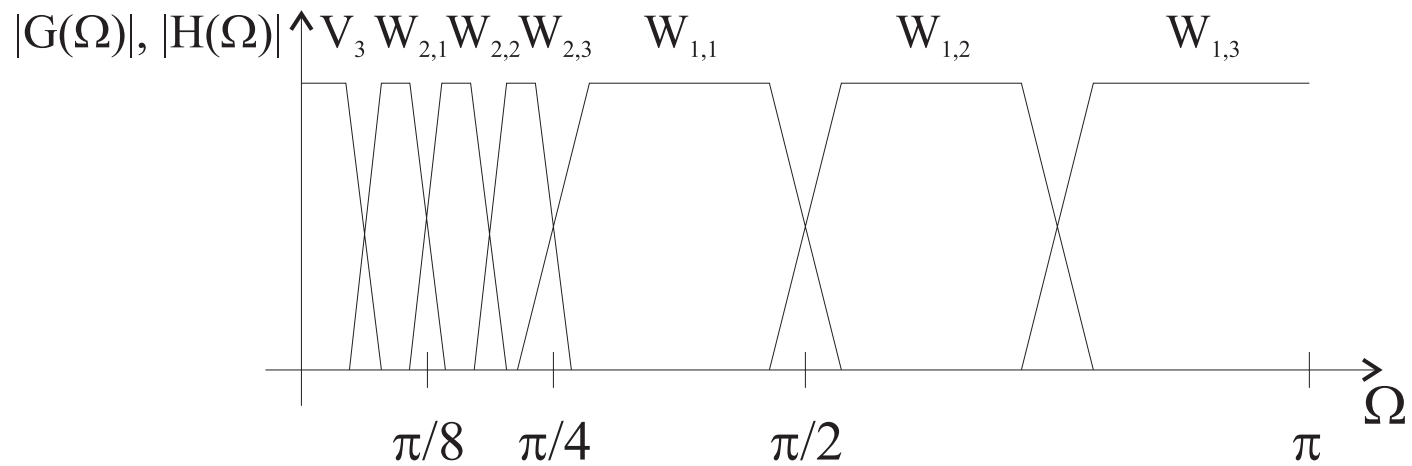
- Stupne voľnosti – je veľa rôznych ortogonálnych waveletov k danej funkcii mierky
- Časovo-frekvenčnú rovinu môžeme deliť lineárne aj logaritmicky (mix oboch)
- Čisto logaritmické delenie je ekvivalentné *M-adickým waveletom*, t.j. máme iba jeden wavelet (M-1 waveletov je rovnakých) s hustejšou vzorkovacou mriežkou

Ako vypočítame M-pasmovú DWT ?

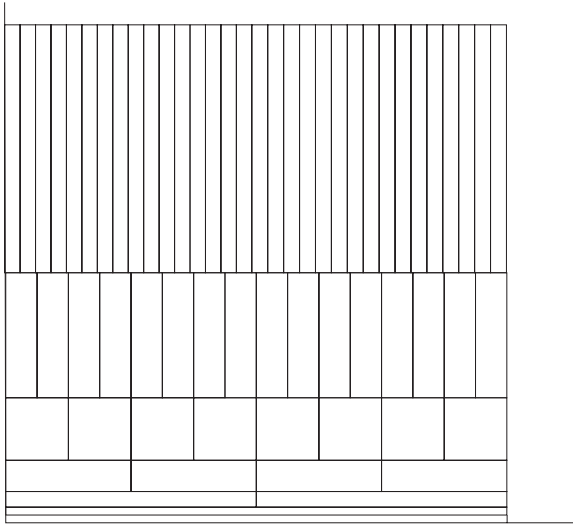
M-pásmovou bankou filtrov:



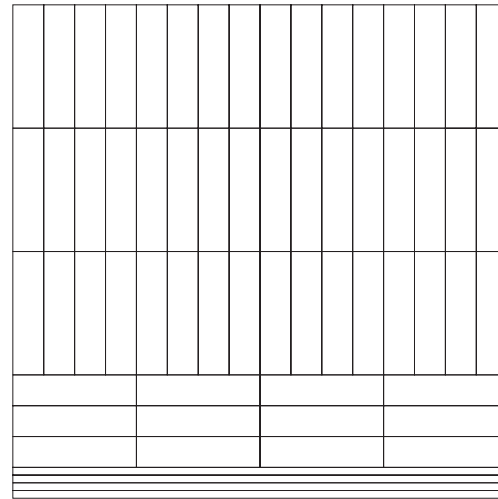
Príklad rozdelenia subpásiem pre 4-pasmovú DWT



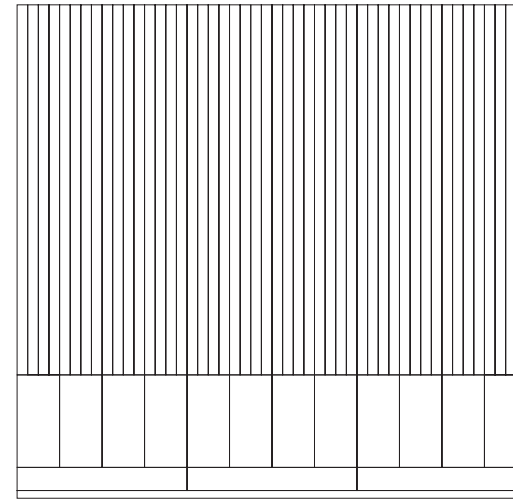
Spôsob delenia časovo-frekvenčnej roviny



Dyadická DWT



4-pásmová DWT, 3
odlišné wavelety,
ktoré zaberajú rôzne
oblasti vo frekvencii



4-pásmová DWT,
špeciálny prípad ,
3 x rovnaký wavet
=
4-adická DWT

Multivavelety (R-wavelety)

V MRA máme hierarchiu:

$$\{0\} \dots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \dots L^2(R)$$

Bázy priestorov V_m sú tvorené pomocou *viacerych funkcií mierky* $\varphi_k(t)$:

$$\{\varphi_{i,m,n}(t) = 2^{-m/2} \varphi(2^{-m}t - n), n \in Z\} \quad i = 1, \dots, R$$

, keďže $V_1 \subset V_0$, pre vektor funkcií mierky $\Phi(t) = [\varphi_1(t), \dots, \varphi_R(t)]^T$ platí:

$$\Phi(t) = \sqrt{2} \sum_n \mathbf{H}(n) \Phi(2t - n)$$

, kde $\mathbf{H}(n)$ je *sekvencia štvorcových matíc rozmeru $R \times R$* . Z vlastností MRA vyplýva, že existuje vektor základných waveletov $\Psi(t) = [\psi_1(t), \dots, \psi_R(t)]^T$, pre ktorý platí:

$$\Psi(t) = \sqrt{2} \sum_n \mathbf{G}(n) \Phi(2t - n)$$

, kde $\mathbf{G}(n)$ je sekvencia štvorcových matíc rozmeru $R \times R$.

Ako vypočítame multiwaveletové rady (MWR)?

- 1) Zvolíme počiatkové V_m tak, aby bol vstupný signál $s(t)$ aproximovaný s dostatočnou presnosťou.
- 2) Počiatkové koeficienty mierky vytvoríme ako vektor počiatkových projekcií signálu $x(t)$ do V_m nasledovne:

$$\mathbf{C}_m(n) = [c_{1,m}(n), \dots, c_{R,m}(n)]^T$$

, kde

$$c_{i,m}(n) = \langle s(t), \varphi_{i,m,n}(t) \rangle$$

- 3) Ďalej pokračujeme ich rozkladom:

$$\mathbf{C}_{m+1}(k) = \sqrt{2} \sum_n \tilde{\mathbf{H}}(n) \mathbf{C}_m(2k+n) \quad \mathbf{D}_{m+1}(k) = \sqrt{2} \sum_n \tilde{\mathbf{G}}(n) \mathbf{C}_m(2k+n)$$

, kde $\tilde{\mathbf{H}}(n) = \mathbf{H}(-n)$, $\tilde{\mathbf{G}}(n) = \mathbf{G}(-n)$

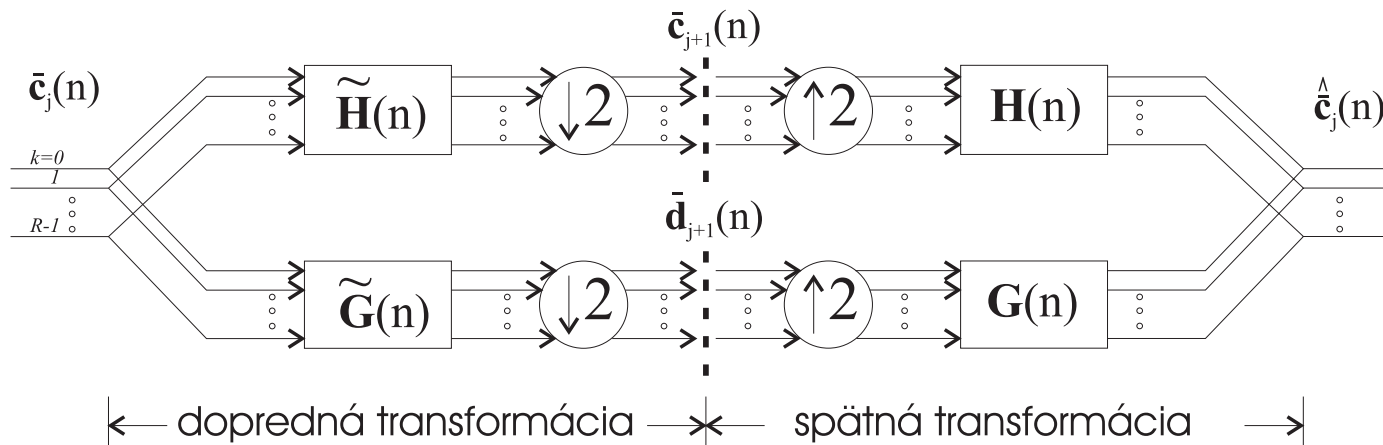
Pri rekonštrukcii platí:

$$\mathbf{C}_m(n) = \sqrt{2} \sum_k [\mathbf{H}(k) \mathbf{C}_m(2k+n) + \mathbf{G}(k) \mathbf{D}_m(2k+n)]$$

Ako vypočítame diskretnú multiwaveletovú transformáciu (MDWT)?

- Signál spracúvame paralelne v dávkach o veľkosti R
- Problém inicializácie, **nemôžeme** jednoducho zobrať *susedné* vzorky signálu ako vstup pre jednu dávku (ako pri klasických waveletoch), lebo naše $\varphi_k(t)$ existujú v čase *naraz* $\rightarrow$ nutná *predfiltrácia* odpovedajúca projekcii.

Výpočet MDWT vektorovými bankami filtrov



Dôležitá vlastnosť:

Je možné symetrické a zároveň ortogonálne riešenie.

Príklad multiwaveletov - GMH (Geronimo-Hardin-Massopust) multiwavelety

$R=2$, sekvencie Matic $\mathbf{H}(n)$ a $\mathbf{G}(n)$ majú dĺžku 4:

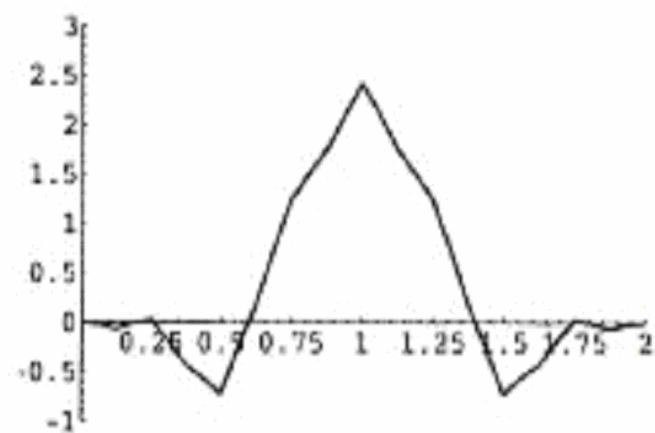
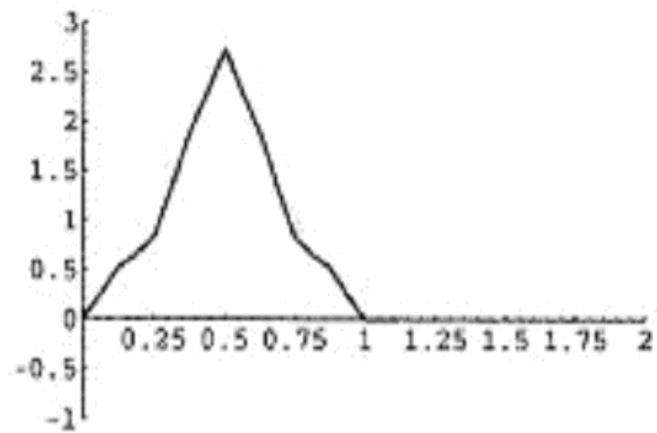
$$\mathbf{H}(0) = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4\sqrt{2}}{5} \\ -\frac{1}{10\sqrt{2}} & -\frac{3}{10} \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}(1) = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{9}{10\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}(2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{9}{10\sqrt{2}} & -\frac{3}{10} \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}(3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{10\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{G}(0) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -3 \\ 1 & 3\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{G}(1) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} \frac{9}{\sqrt{2}} & -10 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{G}(2) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} \frac{9}{\sqrt{2}} & -3 \\ 9 & -3\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{G}(3) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

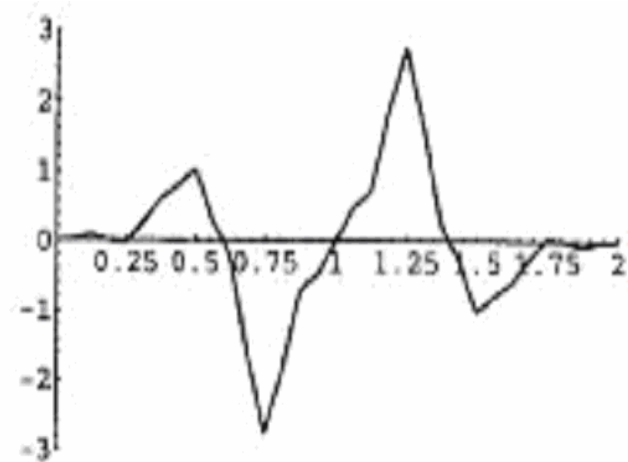
Vlastnosti:

- Množiny $\{\varphi_1(t-n), \dots, \varphi_R(t-n)\}, \{\psi_1(t-n), \dots, \psi_R(t-n)\}, n \in \mathbb{Z}$ sú *ortogonálne*.
- Báze funkcie aj *symetrické*
- Funkcie mierky sú schopné reprodukovať lineárne funkcie

GHM Funkcie mierky



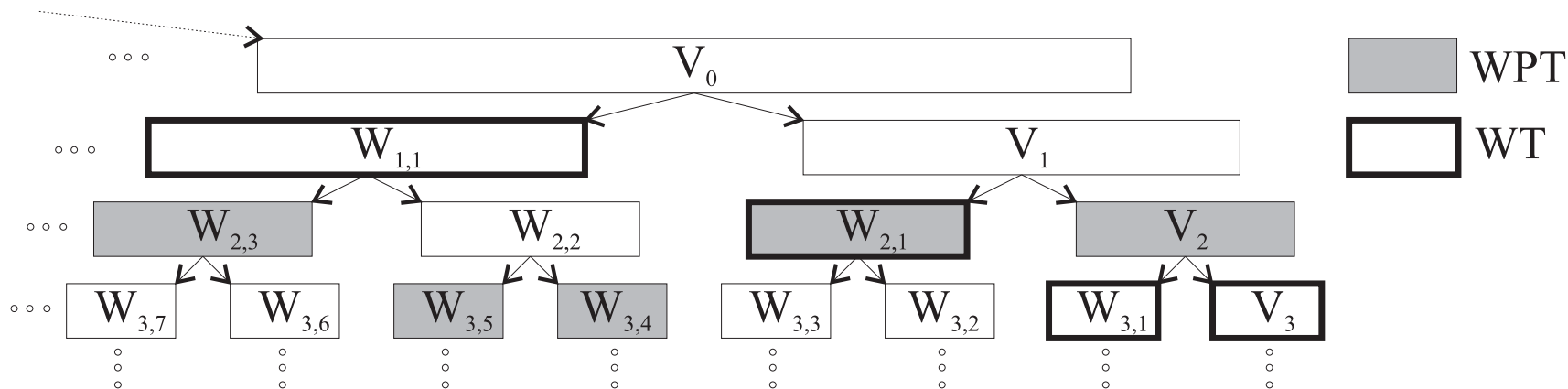
GHM Multivaveley:



Waveletové pakety

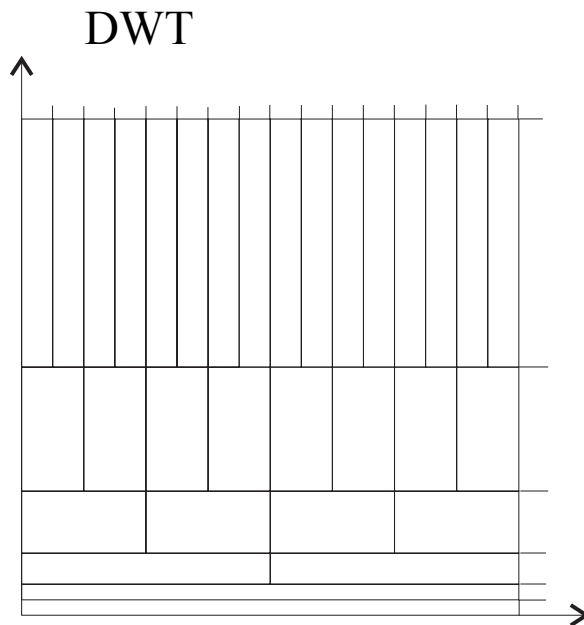
- v klasickom prípade waveletov rozkladáme v MRA iba sumačné podpriestory V_m
- waveletové pakety rozklad zovšeobecňujú aj na diferenčné priestory W_m
- sú možným rozšírením všetkých doteraz uvedených typov waveletov
- umožňujú adaptívnu, podrobnejšiu a flexibilnejšiu analýzu signálov

Výpočet Waveletovej paketovej transformácie(WPT) – v MRA je dovolené deliť aj diferenčné popriestory, nielen sumačné:

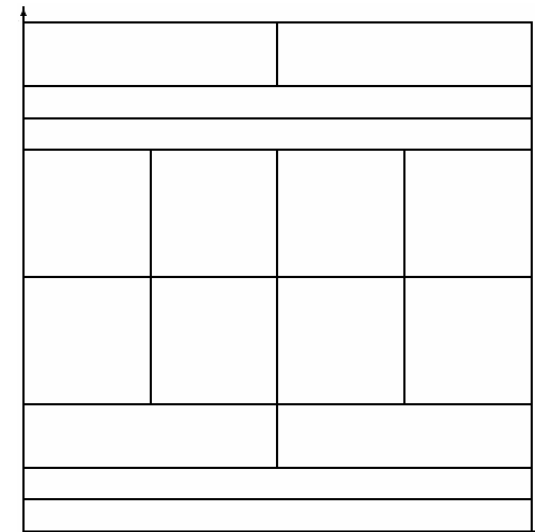


Vzniká kompletný waveletový paketový strom. Reprezentácia kompletným stromom je *redundantná* - stačí použiť iba *vhodnú časť stromu*.

Delenie priestorov odpovedá aj deleniu časovo-frekvenčnej roviny



WPT (príklad)



WPT umožňuje *adaptívne* resp. optimalizované delenie podpriestorov = delenie časovo-frekvenčnej roviny = použitie istej časti kompletného waveletového paketového stromu.

Ktorú časť stromu použiť – ako čo najlepšie reprezentovať signál ?

Výber najvhodnejšej stromovej štruktúry je ekvivalentný s *hľadaním najlepšej bázy*.

Najbežnejšie kritériá pre výber najlepšej reprezentácie signálu, formované pomocou tzv. *nákladovej funkcie* λ sú:

- minimalizácia entropie reprezentácie signálu (Wickerhauser, Coifman)
- minimalizácia počtu bitov reprezentácie signálu a skreslenia pri danej množine kvantizátorov

Koľko je možných báz?

Ak dĺžka signálu je N , potom pre α , počet možných WPT báz platí:

$$\alpha \geq 2^{N/2}$$

Ako teda vyberať najlepšiu bázu?

Najjednoduchšie je rozhodovať sa priamo počas rozkladov, t.j. rozhodovať sa, či ďalší rozklad prevedieme, alebo nie.

Aké kritérium použiť?

Rozhodujeme sa, podľa toho či *náklady po rozdelení budú väčšie ako pred rozdelením*. Kritériom musí byť taká nákladová funkcia, ktorej aditivita sa rozkladom pri DWT zachováva (napríklad entropia).

Príkladom je napr. Shannonova entropia E zo signálu $s(n)$, pre ktorú

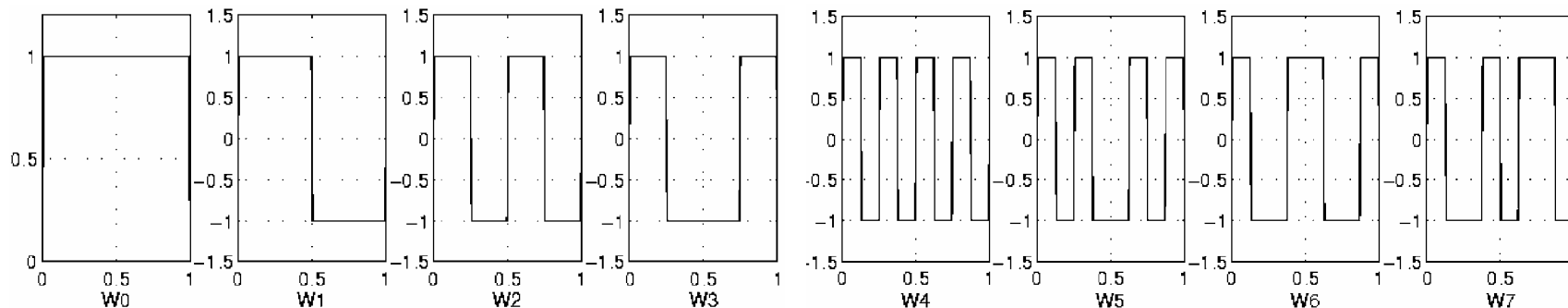
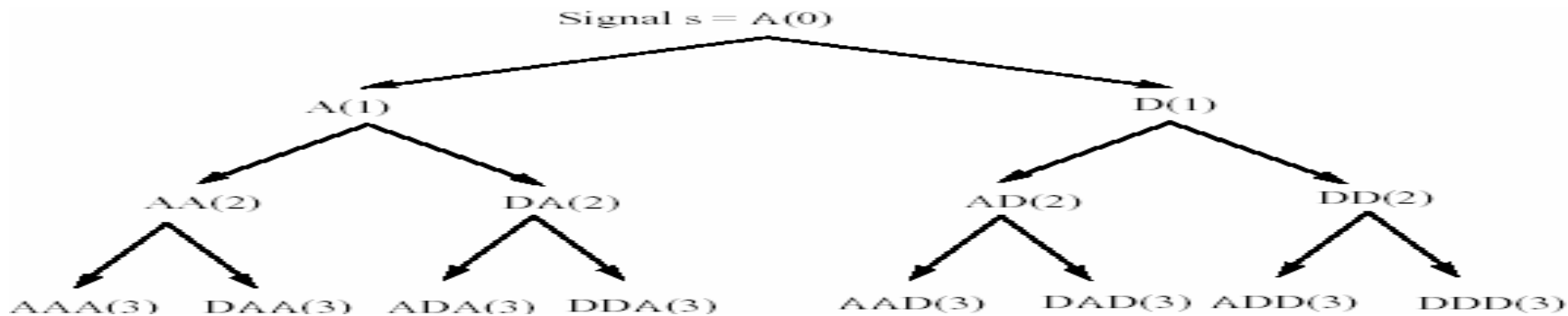
$$E(s) = - \sum_n s(n)^2 \log[s(n)^2]$$

s konvenciou $0 \log(0) = 0$.

Kritérium teda je:

Ak suma Shannonových entropií 2 subpásiem, ktoré vznikli rozdelením pôvodného subpásma, je menšia ako entropia pôvodného subpásma, je výhodné rozdelenie uskutočniť.

Ako vyzerajú bázové funkcie pri úplnom rozklade pre Haarovu WPT?



Počet prechodov nulou je:

2 3 5 4 9 8 6 7

T.j. frekvenčné pásma odpovedajúce jednotlivým priestorom nemajú vzostupný charakter, sú poprehadzované, ich poradie je:

0 1 3 2 7 6 4 5

= analogicky ako pri *Walshovej transformácii v Palleyho poradi*, t.j. nie v sekvenčnom.

Chceme zobrazit' frekvenčný obsah v prirodzenom poradí ? → *koeficienty preusporiadať*

