Návrh waveletov s K nulovými momentmi

Nech $h(n)$ s dĺžkou N je *K-regulárny filter* . Potom:

$$H(\omega) = \sqrt{2}\left(\frac{1+e^{i\omega}}{2}\right)^K L(\omega)$$

spĺňa $|H(\omega)|^2 + |H(\omega+\pi)|^2 = 2$ vtedy a len vtedy, ak

$$|L(\omega)|^2 = Q\left(\sin^2(\omega/2)\right) \quad \sin^2(\omega/2) = \frac{1}{2}(1-\cos(\omega)) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\left(e^{i\omega}+e^{-i\omega}\right)\right) = -\frac{1}{4}z + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z^{-1}$$

kde

$$Q(y) = \sum_{k=0}^{K-1}\binom{K-1+k}{k} y^k + y^K R(1/2-y)$$

a R(y) je *antisymetrický polynóm* taký, že $Q(y) \geq 0$ pre $y \in \langle 0,1\rangle$. Ak R(y)=0, potom dostávame wavelety s maximálnym počtom nulových momentov *N*, tzv. *Daubechies* wavelety. Ak *N> 2K* potom R(y) nám vyjadruje stupne voľnosti, ktoré môžeme použiť na modifikáciu vlastností waveletov.

Pri výpočte $H(\omega)$ dostaneme potrebné $L(\omega)$ *spektrálnou faktorizáciou* $|L(\omega)|^2$.

Výpočet $H(\omega)$ prebieha zvyčajne v Z rovine a je založený na vlastnostiach autokorelačnej funkcie.

Autokorelácia a spektrálna faktorizácia.

Autokoreláciou sekvencie $h(n)$ budeme nazývať sekvenciu:

$$p(n) = \langle h(k), h(k-n) \rangle$$

Použitím DTFT dostávame:

$$P(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(n) e^{-i\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) h^*(k-n) e^{-i\omega n} = H^*(\omega) H(\omega) = |H(\omega)|^2$$

➔ $P(\omega)$ **je pozitívna reálna funkcia**

Uvedomme si, že platí:

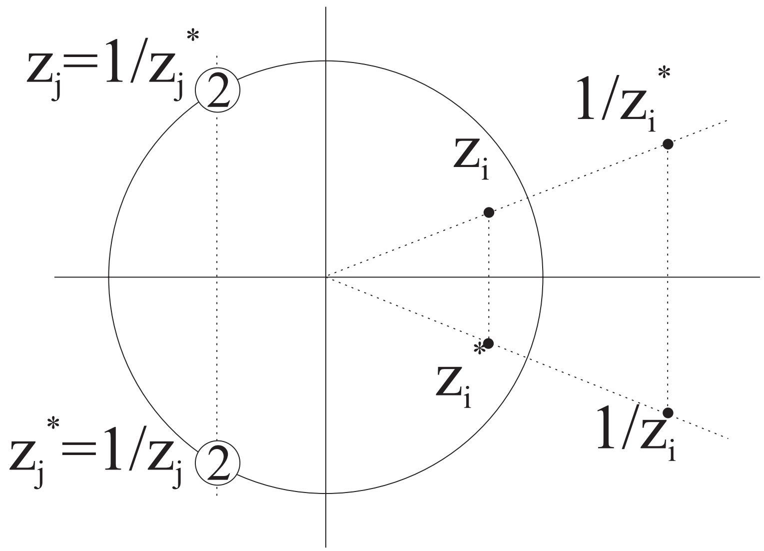
$$|H(\Omega)| = |H^*(\Omega)| \qquad\qquad H(\Omega) H(\Omega) \neq |H(\Omega)|^2$$

$H^*(\Omega) = H(-\Omega)$ ak $h(n)$ má reálne koeficienty

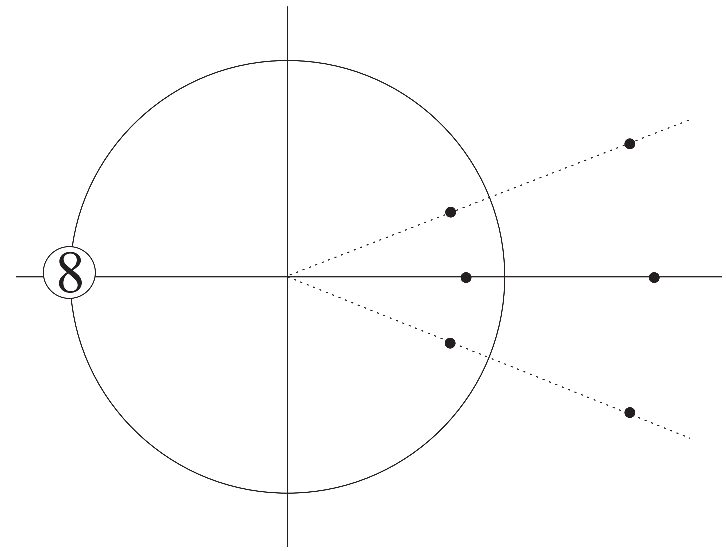
Vyjadrením v Z-rovine dostaneme:

$$P(z) = H_*(z^{-1}) H(z)$$

, kde označenie * znamená konjugáciu koeficientov, nie celej funkcie. Vidíme, že ak z_k je nula $P(z)$ potom nula je aj $1/z_k^*$, t.j. nuly sa vyskytujú iba v pároch. Naviac ak $h(n)$ je reálne, potom $P(z)$ má nuly aj v z_k^* a $1/z_k$.



Všeobecné umienstnenie núl P(z)



Umienstnenie núl pre maximálne hladký polpásmový filter so 14 nulami v P(z)

Platí:

$$P(z) = H_*\left(z^{-1}\right)H(z) =$$

$$= \alpha \prod_{i=1}^{N_1}\left(\left(1 - z_{1_i} z^{-1}\right)\left(1 - z_{1_i}^* z\right)\right) \prod_{i=1}^{N_2}\left(\left(1 - z_{2_i} z^{-1}\right)\left(1 - z_{2_i}^* z\right)\right)$$

,kde N_1 je počet párov núl na jednotkovej kružnici(platí $\left|z_{1_i}\right| = 1$, pár je vlastne dvojnásobný koreň) a N_2 je počet párov núl mimo jednotkovej kružnice (platí $\left|z_{2_i}\right| < 1$).

Pre danú $P(z)$ sa vyhovujúce $H(z)$ nazývajú *spektrálne faktory* $P(z)$. Tieto faktory nie su jedinečné, pričom ortogonálne riešenie získame použitím iba jednej nuly z každého páru núl $P(z)$.

Spektrálne faktory pri ortogonálnom riešení majú rovnakú magnitúdovú charakteristiku, líšia sa iba vo fázovej charakteristike.

Dôležité je *riešenie s minimálnou fázou*, t.j. pri vytváraní $H(z)$ použijeme iba nuly v a na jednotkovej kružnici. Potom:

$$H(z) = \sqrt{\alpha} \prod_{i=1}^{N_1}\left(1 - z_{1_i} z^{-1}\right) \prod_{i=1}^{N_2}\left(1 - z_{2_i} z^{-1}\right)$$

Príklad: Zistite koeficienty $h(n)$, pre Daubechies wavelety s minimálnou fázou ak N=6.

Riešenie: Chceme max. počet nulových momentov, t.j. K=3, R=0.

Potom $Q(y) = 1 + 3y + 6y^2$,

$$y = \sin^2(\omega/2) = \frac{1}{2}(1-\cos(\omega)) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\left(e^{i\omega} + e^{-i\omega}\right)\right) = -\frac{1}{4}z + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z^{-1}$$

$$Q(z) = \frac{3}{8}z^2 - \frac{9}{4}z^1 + \frac{19}{4} - \frac{9}{4}z^{-1} + \frac{3}{8}z^{-2}$$

$$\frac{8}{3}z^2 Q(z) = z^4 - 6z^3 + \frac{38}{3}z^2 - 6z^1 - 6z^0$$

nájdeme nulové body:

z_0=0.28725-0.15289i $\qquad 1/z_0 = 2.71275+1.44389\mathrm{i}$

z_0^*=0.28725+0.15289i $\qquad 1/z_0^* = 2.71275-1.44389\mathrm{i}$

$$Q(z) = \frac{3}{8}z^{-2}\left(z - (0.28725 - 0.15289\mathrm{i})\right)\left(z - (0.28725 + 0.15289\mathrm{i})\right)$$
$$\left(z - (2.71275 + 1.44389\mathrm{i}\,)\right)\left(z - (2.71275 - 1.44389\mathrm{i}\,)\right)$$

Výsledné $Q(z)$ potrebujene v nasledovnom tvare

$$Q(z) = \alpha \prod_{i=1}^{N_1}\left(\left(1 - z_{1_i} z^{-1}\right)\left(1 - z_{1_i}^* z\right)\right) \prod_{i=1}^{N_2}\left(\left(1 - z_{2_i} z^{-1}\right)\left(1 - z_{2_i}^* z\right)\right)$$

Úpravami dostaneme (prvé dva členy na pravej strane vynásobíme z^{-1}, z druhých vyjmeme nuly $1/z_0$ a $1/z_0^*$):

$$Q(z) = \alpha\left(1 - \mathrm{z}^{-1}(0.28725\text{-}0.15289\mathrm{i})\right)\left(1 - \mathrm{z}^{-1}(0.28725 + 0.15289\mathrm{i})\right)$$
$$\left(1 - z/(2.71275 + 1.44389\mathrm{i}\ )\right)\left(1 - z/(2.71275 - 1.44389\mathrm{i}\ )\right)$$

kde

$$\alpha = \frac{3}{8}(2.71275 + 1.44389\mathrm{i}\ )(2.71275 - 1.44389\mathrm{i}\ ) = \frac{3}{8}9.443814$$

Vidíme, že výsledok je v očakávanom tvare, t.j. máme dvojice koreňov (v a mimo Jednotkovej kružnice) vytvoríme faktor s minimálnou fázou:

$$L(z) = \sqrt{\alpha}\ \left(1 - (0.28725\text{-}0.15289\mathrm{i})z^{-1}\ \right)\left(1 - (0.28725 + 0.15289\mathrm{i})z^{-1}\ \right)$$

Potom:

$$H_{\min}(z) = \sqrt{2}\left(\frac{1+z}{2}\right)^3 L_{\min}(z)$$

čo je numericky

$$H_{\min}(z) = 0.33267\mathrm{z}^3 + 0.80689\mathrm{z}^2 + 0.45988\mathrm{z} - 0.13501 - 0.08544\mathrm{z}^{-1} + 0.03523\mathrm{z}^{-2}$$

Vyýsledok odpovedá nekauzálnemu filtru. Kauzalitu dosiahneme vynásobením $H_{\min}(z)$ faktorom z^{-3}, t.j. oneskorením $h(n)$ o 3 takty. Potom

$$h(n)=\{0.33267,\ 0.80689,\ 0.45988,\ -0.13501,\ 0.08544,\ 0.03523\}$$

Pozn: pri výbere faktoru s *maximálnou fázou* dostaneme:

$$H_{\max}(z)=0.03523z^{5}-0.08544z^{4}-0.13501z^{3}+0.45988z^{2}+0.80689z^{1}+0.33267$$

t.j. otočenú a posunutú verziu filtra s minimálnou fázou.