Momentové vlastnosti

k-te momenty $\varphi(t), \psi(t)$ sú definované:

$$m_\varphi(k) = \int t^k \varphi(t) dt \qquad m_\psi(k) = \int t^k \psi(t) dt$$

diskrétne k-te momenty $h(n), g(n)$ sú definované:

$$\mu_h(k) = \sum_n n^k h(n) \qquad \mu_g(k) = \sum_n n^k g(n)$$

z diskrétnych momentov μ_h, μ_g môžeme vypočítať *spojité momenty* pomocou:

$$m_\varphi(k) = \frac{1}{(2^k - 1)\sqrt{2}} \sum_{l=1}^{k} \binom{k}{l} \mu_h(l) m_\varphi(k-l) \qquad m_\psi(k) = \frac{1}{2^k \sqrt{2}} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \mu_g(l) m_\varphi(k-l)$$

na začiatku výpočtu si treba uvedomiť, že $m_\varphi(0) = 1$.

Počet nulových momentov $m_\psi(k)$ dáva informáciu o plochosti $H(\omega)$ a hladkosti $\psi(t)$ ktoré rastú priamo úmerne. Okrem toho, čím viac máme waveletových momentov je nulových, tým lepšiu aproximáciu získame pri projekcii signálu $f(t)\in L^2(R)$ do V_m.

Čím väčší počet nulových momentov $m_\varphi(k)$ je dôležitý pri aproximácii signálu $f(t)\in L^2(R)$ vo V_m pomocou vzoriek $f(t)$ namiesto projekčných koeficientov. Takisto sa zlepšuje aj symetria $\varphi(t)$.

Príkladom waveletového systému, ktorého dizajn je založený na momentových vlastnostiach $\varphi(t),\psi(t)$ sú tzv. *Coiflets.* Je to ortonormálny systém v ktorom sa snažíme nulovať momenty waveletu a rovnako aj funkcie mierky:

$$m_\varphi(k)=0\,,\; m_\psi(k)=0 \qquad k=1,2,\ldots,L-1$$

K-regulárne filtre

FIR filter s impulzovou odpoveďou $h(n)$, ktorá spĺňa podmienky v Tab.1 sa nazýva *K-regulárny* vtedy ak platia nasledovné ekvivalentné tvrdenia:

1) $H(\omega)$ má *K-násobnú nulu* v $\omega = \pi$

2) prvých K-diskrétnych aj spojitých waveletových momentov je nulových, t.j.:
$m_\psi(k) = 0$, $\mu_\psi(k) = 0$, pre $k = 0,1,\ldots,(K-1)$

3) polynomické sekvencie stupňa $\leq (K-1)$ môžu byť vyjadrené lineárnou kombináciou posunov $h(n)$.

4) polynómy stupňa $\leq (K-1)$ môžu byť vyjadrené lineárnou kombináciou posunov $\varphi(t)$

Ak je $h(n)$ K-regulárny, potom Z transformáciu $h(n)$: $H(z)=\sum_n h(n)z^{-n}$ môžeme napísať v tvare:

$$H(z)=\left(\frac{1+z^{-1}}{2}\right)^K L(z)$$

pričom $L(z)$ nemá žiadne póly v $z=e^{i\pi}$. Ak N je dĺžka filtra $h(n)$, potom polynóm $H(z)$ je stupňa *N-1* a $L(z)$ stupňa *N-1-K*. Aby $L(z)$ zabezpečilo splnenie nutných *N/2* podmienok pre ortogonalitu, musí byť aspoň stupňa *N/2-1*. Potom $K\le N/2$.

Zároveň z podmienky existencie $\varphi(t)$ automaticky platí, že $h(n)$ je aspoň $K=1$ regulárne. Takže platí :

$$1\le K\le N/2$$

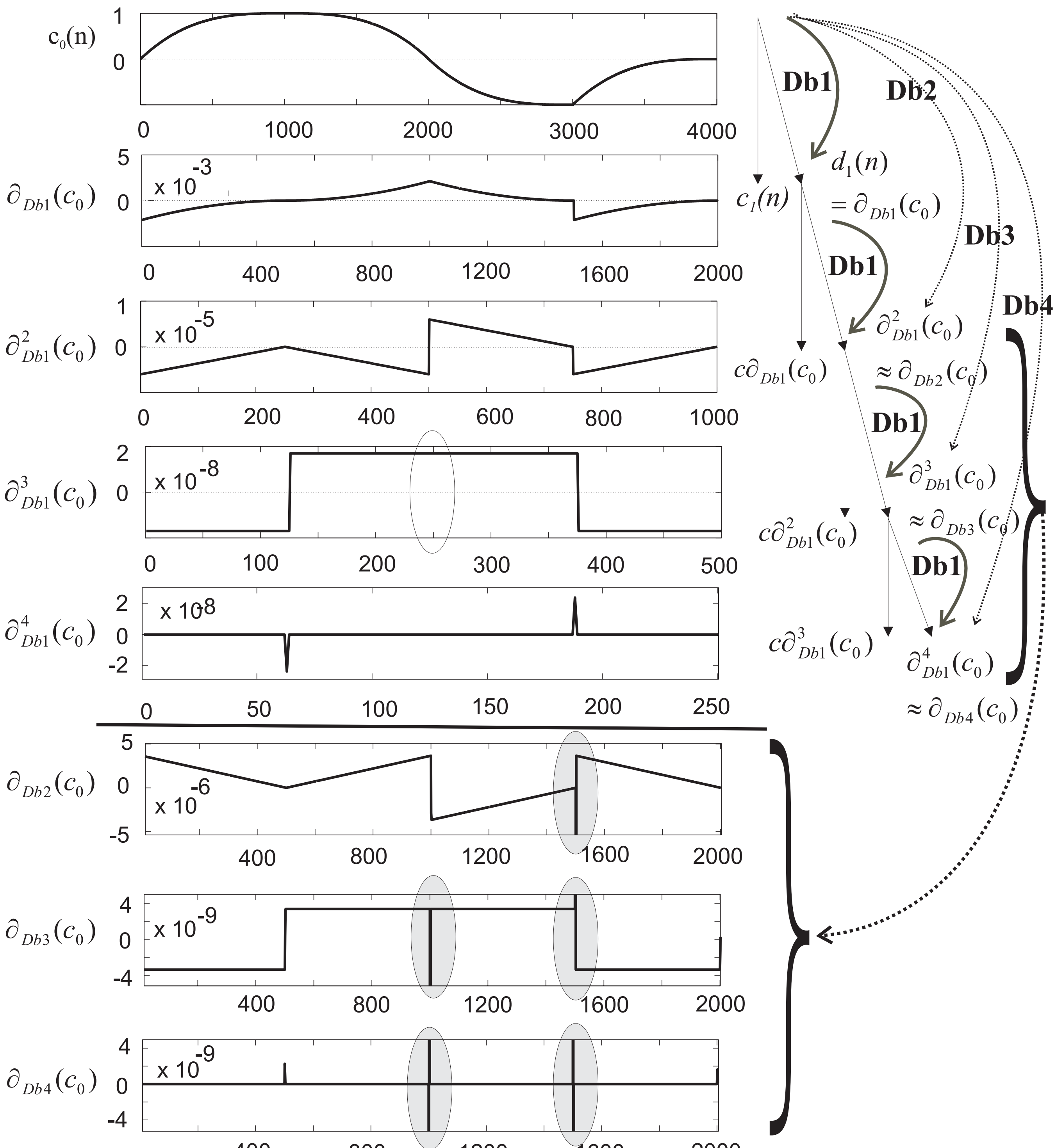
Wavelety ako diferenciálne operátory

- Wavelety môžu slúžiť ako viacú rovňový derivátor (diferenciálny operátor)
- Nech $h(n)$ je K-regulárny filter, generujú ci $\varphi(t)$ a $\psi(t)$. Potom waveletové koeficienty (spektrálne koeficienty po DWT) zodpovedajú K-tej derivácii vyhladenej verzie analyzovaného signálu:

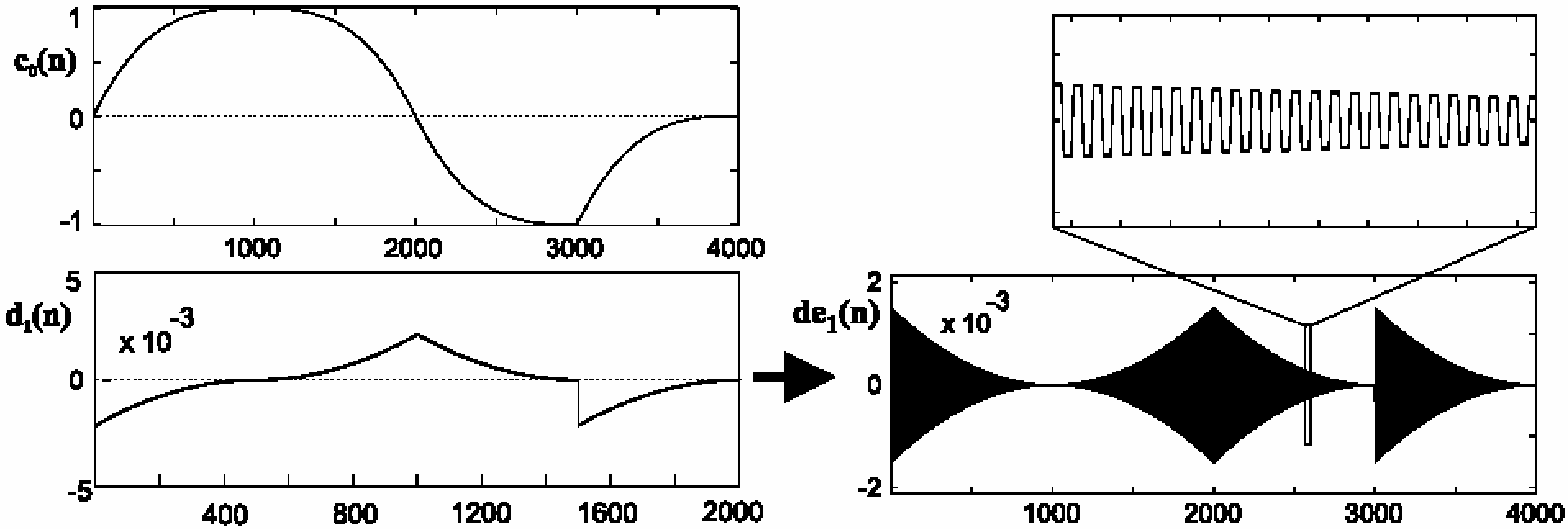
$$\left\langle f(x), \psi(x-u) \right\rangle = \partial^K \{\gamma * f\}(u)$$

kde γ je vyhladzujúci operátor definovaný vo frekvencii ako

$$\Gamma(\omega) = \Psi^*(\omega)/(j\omega)^K$$



$c_0(n)$
$\partial_{Db1}(c_0)$
$\partial^2_{Db1}(c_0)$
$\partial^3_{Db1}(c_0)$
$\partial^4_{Db1}(c_0)$
$\partial_{Db2}(c_0)$
$\partial_{Db3}(c_0)$
$\partial_{Db4}(c_0)$
x 10^{-3}
x 10^{-5}
x 10^{-8}
x 10^{-6}
x 10^{-9}
Db1
Db2
Db3
Db4
$d_1(n)$
$c_1(n)$
$= \partial_{Db1}(c_0)$
$c\partial_{Db1}(c_0)$
$\partial^2_{Db1}(c_0)$
$\approx \partial_{Db2}(c_0)$
$c\partial^2_{Db1}(c_0)$
$\partial^3_{Db1}(c_0)$
$\approx \partial_{Db3}(c_0)$
$c\partial^3_{Db1}(c_0)$
$\partial^4_{Db1}(c_0)$
$\approx \partial_{Db4}(c_0)$



Obr. 2.6. Waveletové koeficienty signálu $c_0(n)$ na prvej úrovni rozkladu a ich detail (de_1), pri použití Db1 waveletu. Rozliatie detailu je dôsledkom nedostatočnej regularity Db1. (t. j. na obr. 2.5 by nemali rozliaty detail iba koeficienty $\partial_{Db4}(c_0) \approx \partial^n_{Db1}(c_0)$)

Príklady ortogonálnych waveletových systémov

- Haarov wavelet
- Sinc wavelety
- Battle-Lemarie wavelety(ortogonalizované Spline wavelety)
- Daubechies wavelety
- Coiflets

Príklady návrhu ortogonálnych waveletov

- Ortogonalizácia (napr. Battle Lemarie)

- *Parametrizácia koeficientov mierky

- *Spektrálna faktorizácia – wavelety s K nulovými waveletovými momentmi (napr. Daubechies)
  Pozn. Analogicky sú navrhované *biortogonálne* CDF(Cohen-Daubechies-Feauveau) spline wavelety

- wavelety s K nulovými waveletovými momentmi a K nulovými momentmi funkcie mierky(Coiflets)

- wavelety s minimalizovanými momentmi(Odegard)

- *lifting schéma*

Parametrizácia koeficientov mierky

Systém 0. rádu - dĺžka $h(n)$ je 2

Nemá žiadne stupne voľnosti. Podmienky sú:

$$h(0)+h(1)=\sqrt{2}$$

$$h^2(0)+h^2(1)=1$$

Riešením je $h(n)=\{\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}/2\}$

Systém 1. rádu - dĺžka $h(n)$ je 4

Má jeden stupeň voľnosti. Podmienky sú:

$$h(0)+h(1)+h(2)+h(3)=\sqrt{2}$$

$$h^2(0)+h^2(1)+h^2(2)+h^2(3)=1$$

$$h(0)h(2)+h(1)h(3)=0$$

Riešením je

$$h(0)=(1-\cos(\alpha)+\sin(\alpha))/(2\sqrt{2}) \qquad h(1)=(1+\cos(\alpha)+\sin(\alpha))/(2\sqrt{2})$$

$$h(3)=(1+\cos(\alpha)-\sin(\alpha))/(2\sqrt{2}) \qquad h(2)=(1-\cos(\alpha)-\sin(\alpha))/(2\sqrt{2})$$

Pozn:

Ak $\alpha=0,\ \pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2$ → Haarov wavelet

Ak $\alpha=\pi/3$ → Daubechies2 wavelet

B-Spline wavelety

Spliny sú po častiach polynomické funkcie daného stupňa s plynulým prechodom medzi jednotlivými častami. B-Spline $\varphi_{SM}(t)$ stupňa M je tvorený M násobnou konvolúciou „Box" funkcie:

$$B(t) = \begin{cases} 1 & t \in \langle 0,1 \rangle \\ 0 & inde \end{cases}$$

a má kompaktnú podporu na intervale $\langle 0, M+1 \rangle$, M-1 spojitých derivácií.

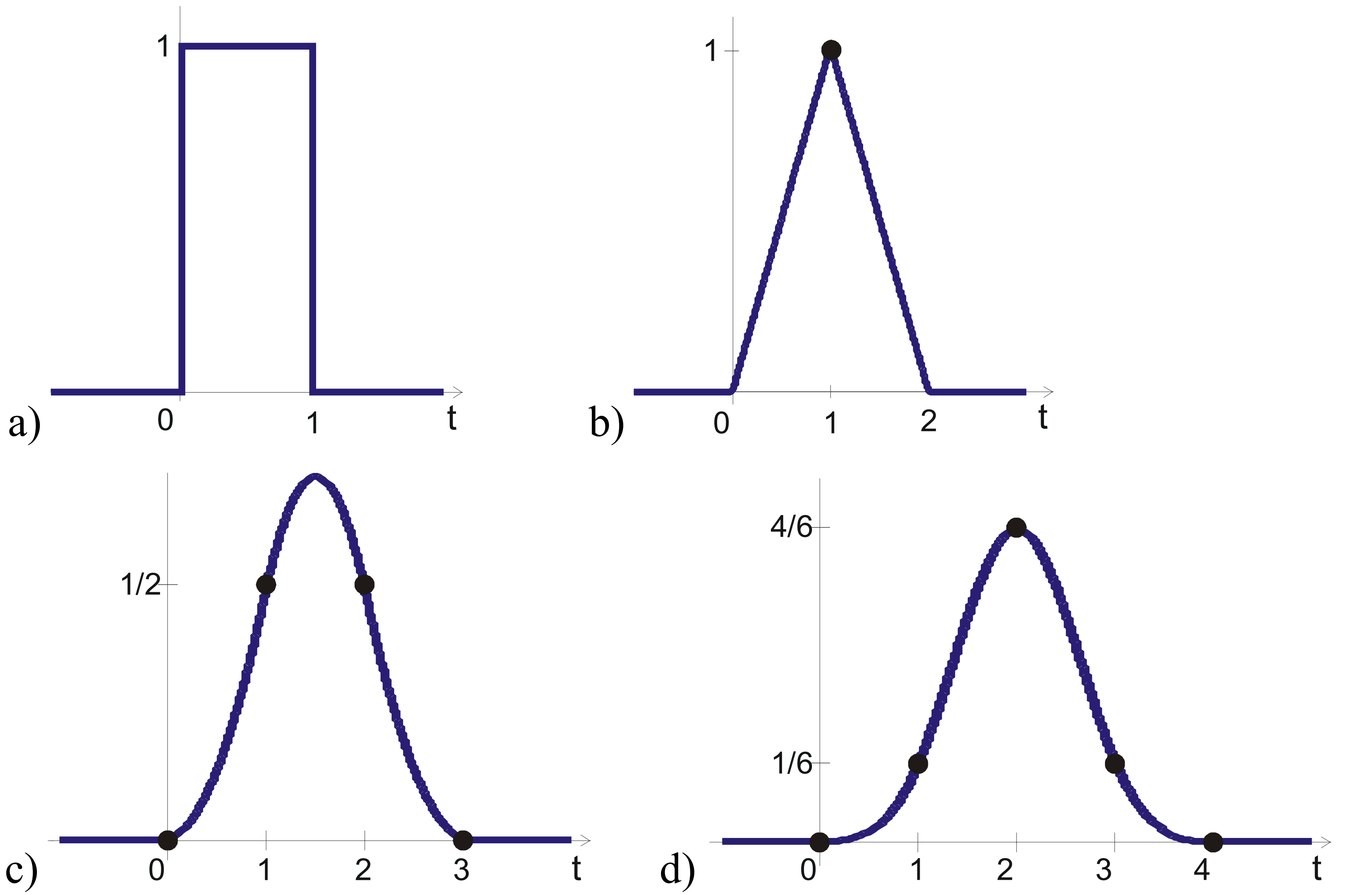
Platí: $\varphi_{S0}(t) = B(t) = \varphi_{Haar}(t)$, takže $\varphi_{S0}(t)$ môžeme generovať pomocou koeficientov $h(n) = (1,1)$ resp. ich N-násobnými konvolúciami. To odpovedá Pascalovmu rojuholníku na určenie kombinačných čísiel. Koeficienty $h(n)$ pre B-spline funkcie mierky sú potom:

$h_{S0}(n) = (1,1)\frac{\sqrt{2}}{2}$ - konštantný (spline nultého rádu)

$h_{S1}(n) = (1,2,1)\frac{\sqrt{2}}{4}$ - lineárny (spline prvého rádu)

$h_{S2}(n) = (1,3,3,1)\frac{\sqrt{2}}{8}$ - kvadratický(...)

$h_{S3}(n) = (1,4,6,4,1)\frac{\sqrt{2}}{16}$ - kubický(...)



B-Splinové funkcie mierky: a)Konštantná b)Lineárna c)Kvadratická d)Kubická

N-násobnej konvolúcii $h(n)$ odpovedá násobenie v Z rovine, t.j:

$$H_{SM}(z) = \sqrt{2}\left(\frac{1+z}{2}\right)^{M+1}$$

Takže Spline majú *K=M+1* násobnú nulu v *z=-1*. Dĺžka $h_{SM}(n)$ je *M+2*.

- Platí $\int \varphi_{SM}(t)dt = 1$ a $\sum_n h_{S0}(n) = \sqrt{2}$
- Základná otázka: Formujú funkcie $\varphi_{SM}(t)$ bázy V_0?
  Formujú, lebo $\varphi_{SM,m,n}(t)$ spĺňajú dilatačné rovnice. $\varphi_{SM}(t)$ potom môžeme považovať za funkcie mierky.
- Spline majú symetrické $h(n)$, symetrické bázové funkcie, t.j. nemôžu tvoriť ortogonálne systémy (okrem triviálneho prípadu)
- Spline nie sú navzájom ortogonálne, t.j:
  $\langle \phi_{SM}(t), \phi_{SM}(t+k) \rangle = a(k)$, pričom $a(k) \neq \delta(k)$

Semiortogonálne spline wavelety

Množiny $\{\varphi_{SM,m,n}(t)\}$ tvoria neortogonálne bázy V_m. Semiortogonálne wavelety $\{\psi_{SM,m,n}(t)\}$ tvoria neortogonálne bázy W_m, pre ktoré platí:

$$V_m \perp W_m \qquad\qquad V_m = V_{m+1} \oplus W_{m+1}$$

T.j. v MRA existuje len jedna hierarchia aproximačných podpriestorov

$$\{0\} \ldots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \ldots L^2(R)$$

Oproti Biortogonálnemu prípadu to znamená že

$$V_m = \widetilde{V}_m \qquad\qquad W_m = \widetilde{W}_m$$

Pri spline rádu M vypočítame koeficienty $g_{mr}(n)$ z koeficientov $h_{mr}(n)$ nasledovne:

$$g_{mr}(n) = \pm(-1)^n h_{mr}(M+1-n) a_M(M+1-n)$$

kde

$$a_M(k) = \langle \phi_{SM}(t), \phi_{SM}(t+k) \rangle$$

Prakticky

$$a_M(k) = 2^{M+1/2} h_{S(M+2)}(k)$$

POZOR: ak použijeme $g_{mr}(n)$ a $h_{mr}(n)$ v tomto tvare (KIO filtre) pri analýze, pri syntéze je nutné použiť NIO filtre (a naopak).

Biortogonálne wavelety a rozklad signálu (opakovanie)

Ak bázy $\{\psi_{m,n}\}$a $\{\tilde{\psi}_{m,n}\}$ sú navzájom biortogonálne potom k základným waveletom $(\psi,\tilde{\psi})$ existujú funkcie mierky ϕ, $\tilde{\phi}$ také, že množiny $\{\phi_{mn}\}$a $\{\tilde{\phi}_{mn}\}$tvoria bázy pre podpriestory V_{-m}resp. $\tilde{V}_{-m}$ a množiny $\{\psi_{mn}\}$a $\{\tilde{\psi}_{mn}\}$tvoria bázy pre podpriestory W_{-m}resp. $\tilde{W}_{-m}$. V $L^2(R)$ potom existujú dve MRA s hierarchiami:

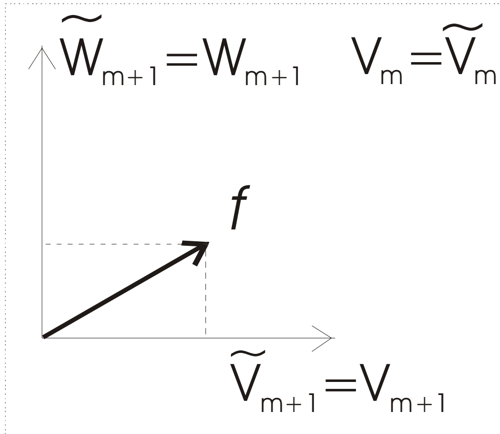
$$\dots V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \dots$$
$$\dots \tilde{V}_2 \subset \tilde{V}_1 \subset \tilde{V}_0 \subset \tilde{V}_{-1} \subset \tilde{V}_{-2} \dots$$

pričom platí že W_{m+1} je síce doplnkom k V_{m+1} v priestore V_m, ale nie je to ortogonálny doplnok. W_{m+1} je namiesto toho ortogonálny doplnok k $\tilde{V}_{m+1}$ v priestore $\tilde{V}_m$. Analogicky $\tilde{W}_{m+1}$ je ortogonálny doplnok k V_{m+1} v priestore V_m.

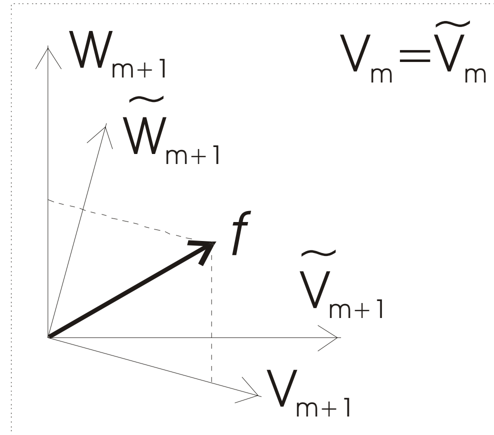
Platia nasledovné vzťahy:

$$V_m = V_{m+1} \oplus W_{m+1} \qquad V_m = V_{m+1} \overset{\perp}{\oplus} \tilde{W}_{m+1}$$
$$\tilde{V}_m = \tilde{V}_{m+1} \oplus \tilde{W}_{m+1} \qquad \tilde{V}_m = \tilde{V}_{m+1} \overset{\perp}{\oplus} W_{m+1}$$

Znázornené graficky:



a)ortogonálny rozklad



b)biortogonálny rozklad

Relácie zmeny mierky potom možno vyjadriť vzťahmi:

$$\tilde{\varphi}(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{h}_{mr}(n) \tilde{\varphi}(2t - n) \qquad \varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n) \varphi(2t - n)$$

$$\tilde{\psi}(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{g}_{mr}(n) \tilde{\varphi}(n - 2t) \qquad \varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n) \varphi(n - 2t)$$

Biortogonálne spline wavelety

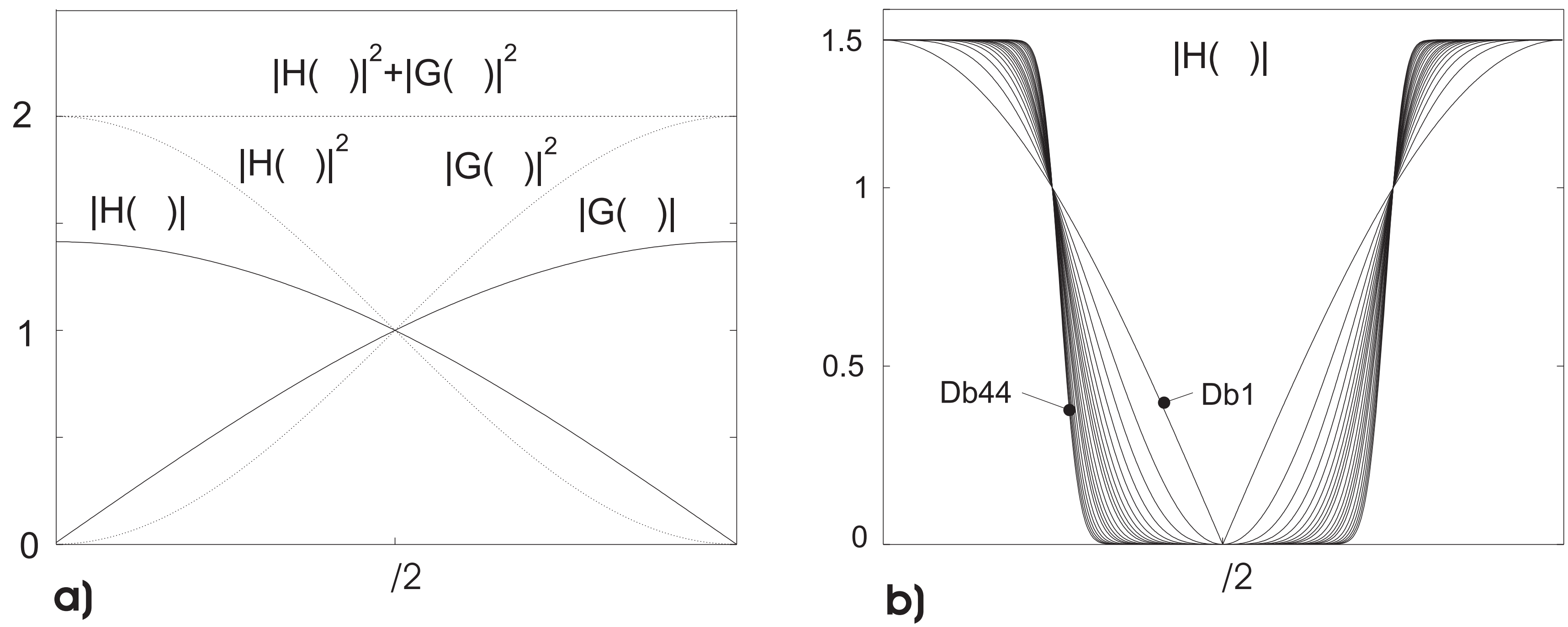
Množiny $\{\varphi_{SM,m,n}(t)\}$ tvoria neortogonálne bázy V_m avšak $\{\psi_{SM,m,n}(t)\}$ tvoria neortogonálne bázy W_m tak, aby výsledná štruktúra podpriestorov bola birtogonálna, t.j. $L^2(R)$ potom existujú dve MRA

$$\dots V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \dots$$

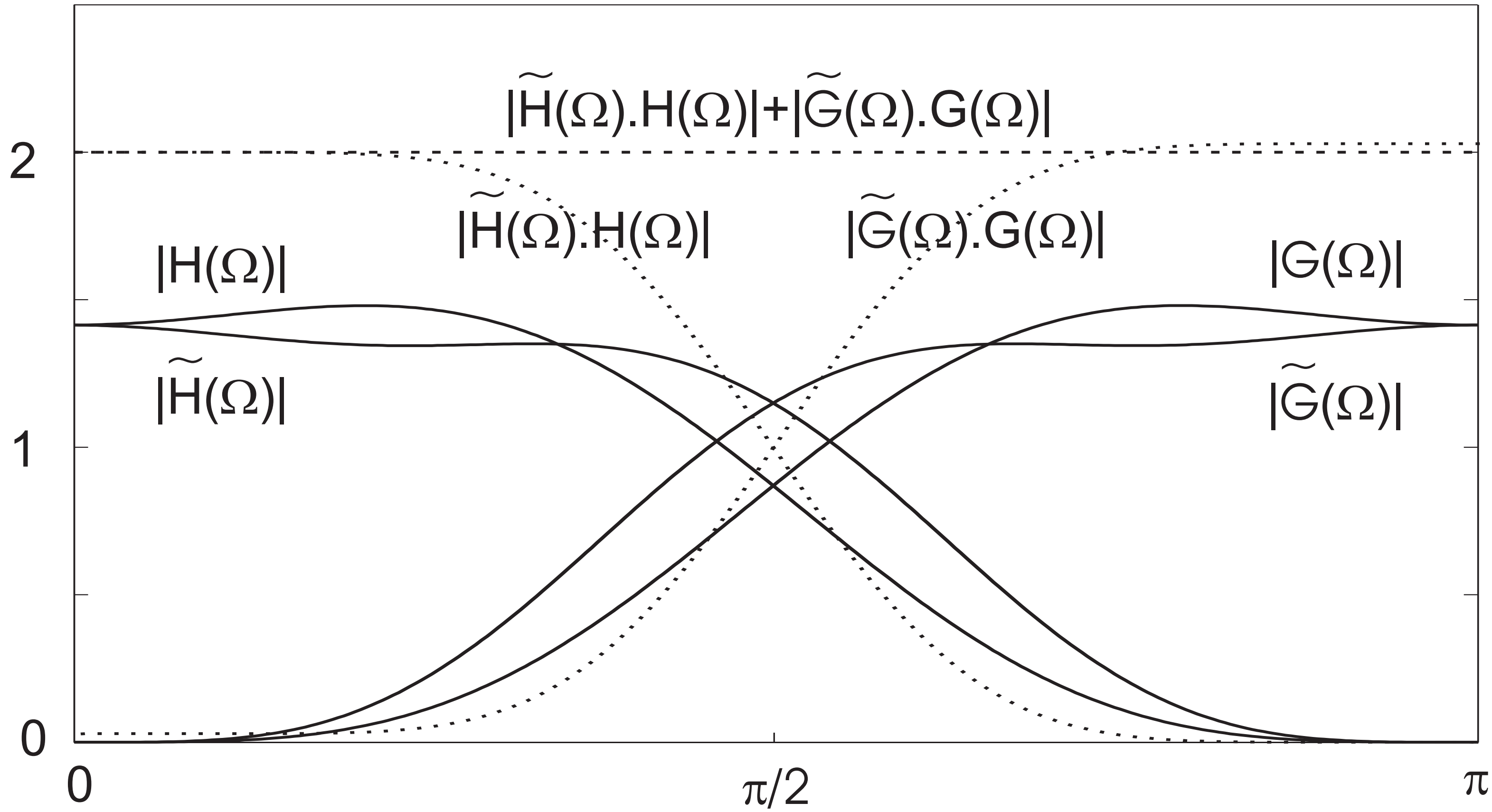
$$\dots \widetilde{V}_2 \subset \widetilde{V}_1 \subset \widetilde{V}_0 \subset \widetilde{V}_{-1} \subset \widetilde{V}_{-2} \dots$$

atd…

Konkrétny spôsob návrhu Biortogonálnych B-spline waveletov udedieme neskôr.



DTFT dilatačných koeficientov a ich vlastnosti: a) celková situácia pri Db1(Haarov) wavelete b) vplyv rádu waveletu na frekvenčné vlastnosti koeficientov mierky pri systéme Daubechieovej waveletov



DTFT dilatačných koeficientov pri biortogonálnom systéme s FBI 9/7 waveletom

Návrh waveletov s K nulovými momentmi

Nech $h(n)$ s dĺžkou N je *K-regulárny filter* . Potom:

$$H(\omega)=\sqrt{2}\left(\frac{1+e^{i\omega}}{2}\right)^K L(\omega)$$

spĺňa $|H(\omega)|^2+|H(\omega+\pi)|^2=2$ vtedy a len vtedy, ak

$$|L(\omega)|^2=Q\left(\sin^2(\omega/2)\right) \qquad \sin^2(\omega/2)=\frac{1}{2}(1-\cos(\omega))=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\left(e^{i\omega}+e^{-i\omega}\right)\right)=-\frac{1}{4}z+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}z^{-1}$$

kde

$$Q(y)=\sum_{k=0}^{K-1}\binom{K-1+k}{k}y^k+y^K R(1/2-y)$$

a R(y) je *antisymetrický polynóm* taký, že $Q(y)\geq 0$ pre $y\in\langle 0,1\rangle$. Ak R(y)=0, potom dostávame wavelety s maximálnym počtom nulových momentov *N*, tzv. *Daubechies* wavelety.

Ak *N*> *2K* potom R(y) nám vyjadruje stupne voľnosti, ktoré môžeme použiť na modifikáciu vlastností waveletov.

Pri výpočte $H(\omega)$ dostaneme potrebné $L(\omega)$ *spektrálnou faktorizáciou* $|L(\omega)|^2$.

Autokorelácia a spektrálna faktorizácia.

Autokoreláciou sekvencie $h(n)$ budeme nazývať sekvenciu:

$$p(n) = \langle h(k), h(k-n) \rangle$$

Použitím DTFT dostávame:

$$P(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(n) e^{-i\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) h^*(k-n) e^{-i\omega n} = H^*(\omega) H(\omega) = |H(\omega)|^2$$

Vyjadrením v Z-rovine dostaneme:

$$P(z) = H_*\left(z^{-1}\right) H(z)$$

, kde označenie * znamená konjugáciu koeficientov, nie celej funkcie. Vidíme, že ak z_k je nula $P(z)$ potom nula je aj $1/z_k^*$, t.j. nuly sa vyskytujú iba v pároch. Naviac ak $h(n)$ je reálne, potom $P(z)$ má nuly aj v z_k^* a $1/z_k$.

Platí:

$$P(z)=\alpha \prod_{i=1}^{N_1}\left(\left(1-z_{1_i}z^{-1}\right)\left(1-z_{1_i}^{*}z\right)\right)\prod_{i=1}^{N_2}\left(\left(1-z_{2_i}z^{-1}\right)\left(1-z_{2_i}^{*}z\right)\right)$$

,kde N_1 je počet párov núl na jednotkovej kružnici(platí $\left|z_{1_i}\right|=1$, pár je vlastne dvojnásobný koreň) a N_2 je počet párov núl mimo jednotkovej kružnice (platí $\left|z_{2_i}\right|<1$).

Pre danú $P(z)$ sa vyhovujúce $H(z)$ nazývajú *spektrálne faktory* $P(z)$. Tieto faktory nie su jedinečné, pričom ortogonálne riešenie získame použitím iba jednej nuly z každého páru núl $P(z)$. Tieto riešenia majú rovnakú magnitúdovú charakteristiku, líšia sa iba vo fázovej charakteristike. Dôležité je *riešenie s minimálnou fázou*, t.j. pri vytváraní $H(z)$ použijeme iba nuly v a na jednotkovej kružnici. Potom:

$$H(z)=\sqrt{\alpha}\prod_{i=1}^{N_1}\left(1-z_{1_i}z^{-1}\right)\prod_{i=1}^{N_2}\left(1-z_{2_i}z^{-1}\right)$$

Príklad: Zistite koeficienty $h(n)$, pre Daubechies wavelety s minimálnou fázou ak N=6.

Riešenie: Chceme max. počet nulových momentov, t.j. K=3, R=0.
Potom $Q(y)=1+3y+6y^2$,

$$y=\sin^2(\omega/2)=\frac{1}{2}(1-\cos(\omega))=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\left(e^{i\omega}+e^{-i\omega}\right)\right)=-\frac{1}{4}z+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}z^{-1}$$

$$Q(z)=\frac{3}{8}z^2-\frac{9}{4}z^1+\frac{19}{4}-\frac{9}{4}z^{-1}+\frac{3}{8}z^{-2}$$

$$\frac{8}{3}z^2Q(z)=z^4-6z^3+\frac{38}{3}z^2-6z^1-6z^0$$

nájdeme nulové body:

z_0=0.28725-0.15289i $\quad$ $1/z_0$ = 2.71275+1.44389i

z_0^*=0.28725+0.15289i $\quad$ $1/z_0^*$ = 2.71275-1.44389i

$$Q(z)=\frac{3}{8}z^{-2}\left(z-(0.28725\text{ - }0.15289\text{i})\right)\left(z-(0.28725+0.15289\text{i})\right)$$
$$\left(z-(2.71275+1.44389\text{i})\right)\left(z-(2.71275-1.44389\text{i})\right)$$

Úpravami dostaneme(prvé dva členy na pravej strane vynásobíme z^{-1}, z druhých vyjmeme nuly $1/z_0$ a $1/z_0^*$):

$$Q(z) = \alpha\left(1 - z^{-1}(0.28725 - 0.15289i)\right)\left(1 - z^{-1}(0.28725 + 0.15289i)\right)$$
$$\left(1 - z/(2.71275 + 1.44389i)\right)\left(1 - z/(2.71275 - 1.44389i)\right)$$

kde

$$\alpha = \frac{3}{8}(2.71275 + 1.44389i)(2.71275 - 1.44389i) = \frac{3}{8}9.443814$$

vytvoríme faktor s minimálnou fázou:

$$L(z) = \sqrt{\alpha}\left(1 - (0.28725 - 0.15289i)z^{-1}\right)\left(1 - (0.28725 + 0.15289i)z^{-1}\right)$$

Potom:

$$H_{\min}(z) = \sqrt{2}\left(\frac{1+z}{2}\right)^3 L_{\min}(z)$$

čo je numericky

$$H_{\min}(z) = 0.33267z^3 + 0.80689z^2 + 0.45988z - 0.13501 - 0.08544z^{-1} + 0.03523z^{-2}$$

Vyýsledok odpovedá nekauzálnemu filtru. Kauzalitu dosiahneme vynásobením $H_{\min}(z)$ faktorom z^{-3}, t.j. oneskorením $h(n)$ o 3 takty. Potom

$$h(n) = \{0.33267,\ 0.80689,\ 0.45988,\ -0.13501,\ 0.08544,\ 0.03523\}$$

Pozn: pri výbere faktoru s *maximálnou fázou* dostaneme:

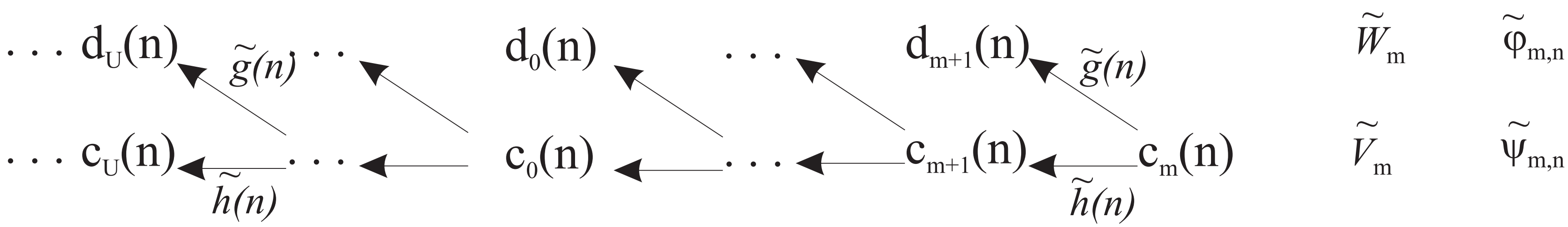
$$H_{\max}(z) = 0.03523z^5 - 0.08544z^4 - 0.13501z^3 + 0.45988z^2 + 0.80689z^1 + 0.33267$$

t.j. otočenú a posunutú verziu filtra s minimálnou fázou.

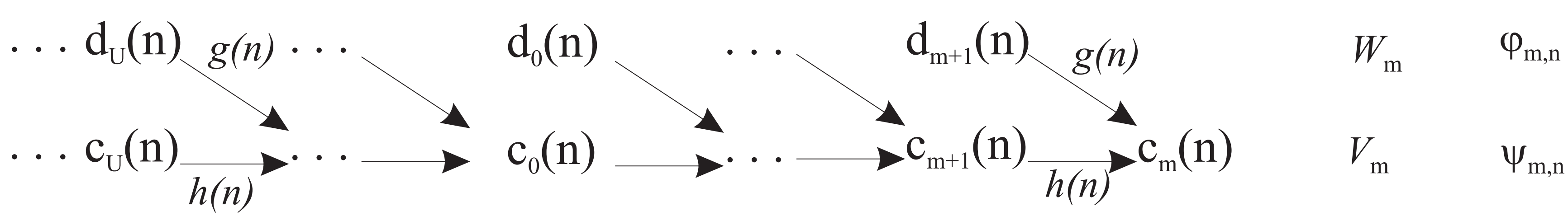
Biortogonálne wavelety a spektrálna faktorizácia

Opakovanie: Biortogonálny rozklad a rekonštrukcia:

Rozklad



Rekonštrukcia



Predpokladajme všeobecné riešenie faktorizácie $P(z)$ v tvare $P(z)=F(z)H(z)$.
Nulové body $P(z)$ označme z_i . Potom platia nasledovné pravidlá:

1) aby $F(z)$ a $H(z)$ boli prenosové funkcie *reálnych filtrov*, z_i a z_i^* musíme použiť v pároch

2) aby $F(z)$ a $H(z)$ boli prenosové funkcie filtrov s *Lineárnou fázou*, z_i a $1/z_i$ musíme použiť v pároch

3) Aby $F(z)$ a $H(z)$ mohli tvoriť *ortogonálne wavelety*, z_i a $1/z_i$ musíme použiť oddelene.

<u>Zároveň platí:</u>
Symetrický ortogonálny FIR filter s prenosovou funkciou $H(z)$, môže mať maximálne 2 nenulové koeficienty, pričom platí :

$$H(z)=\left(1+z^{-N}\right)/\sqrt{2}$$

a N je nepárne.

Pri ***ortogonálnom*** riešení

- Z dvojice $F(z), H(z)$ použijeme $H(z)$ s minimálnou fázou a z neho vygenerujeme ortogonálny systém

Pri ***biortogonálnom*** riešení

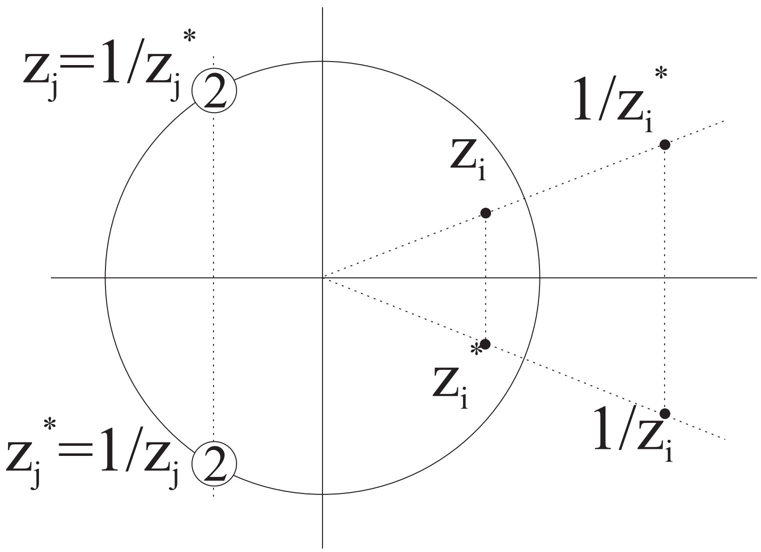
- Dvojicu $F(z), H(z)$ použijeme tak, že $H(z)$ a $\tilde{H}(z) = F(z)$ budú spolu generovať biortogonálny systém

<u>Návrh Biortogonálnych waveletov</u>

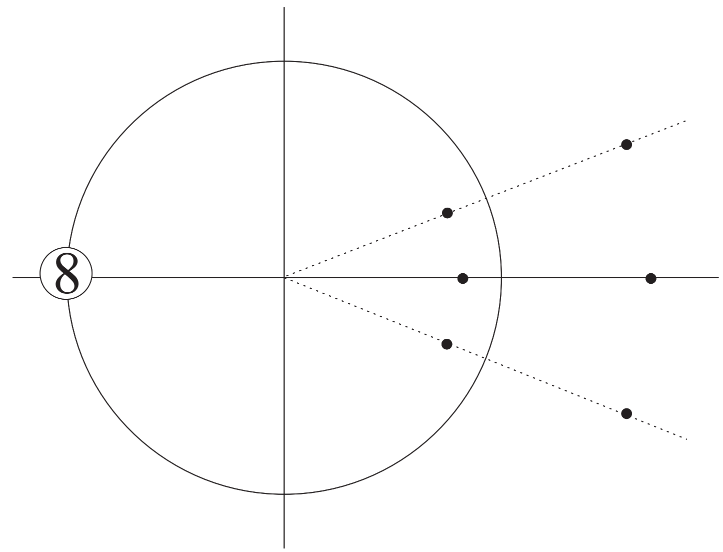
Začneme navrhovať ortogonálny wavelet s K nulovými momentmi avšak výsledok faktorizujeme až po získaní polpásmového filtra :

$$P(z) = 2\left(\frac{1+z}{2}\right)^{2K} Q(z)$$

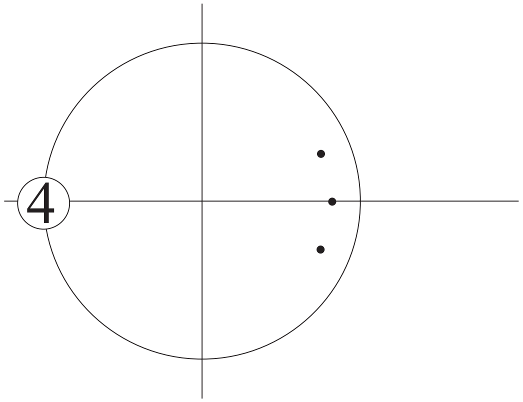
T.j hľadáme takú faktorizáciu $P(z) = \tilde{H}(z)H(z)$, aby $H(z)$ a $\tilde{H}(z)$ mali lienárnu fázu.

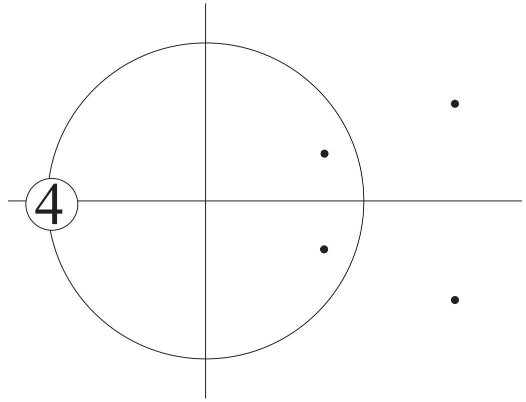


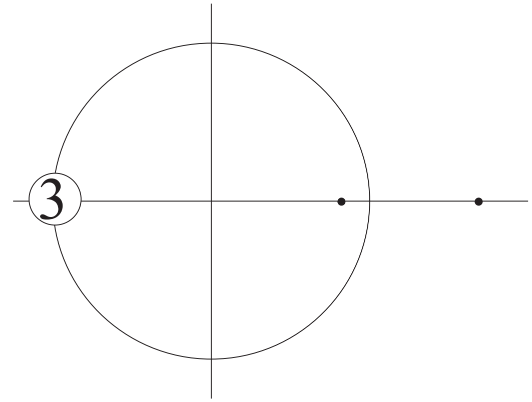
Všeobecné umienstnenie núl P(z)



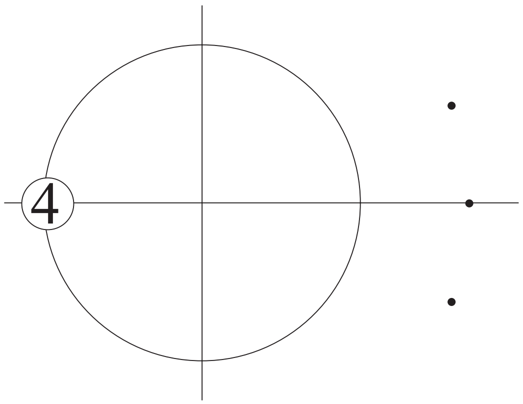
Umienstnenie núl pre maximálne hladký polpásmový filter so 14 nulami v P(z)

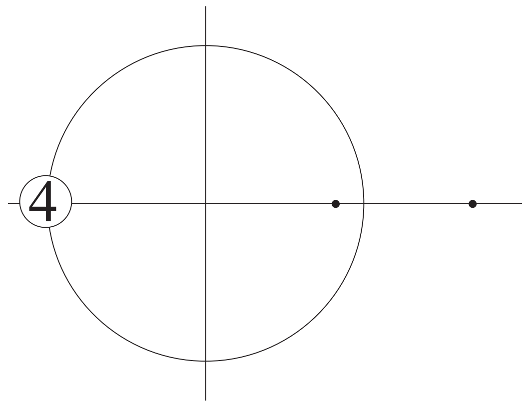


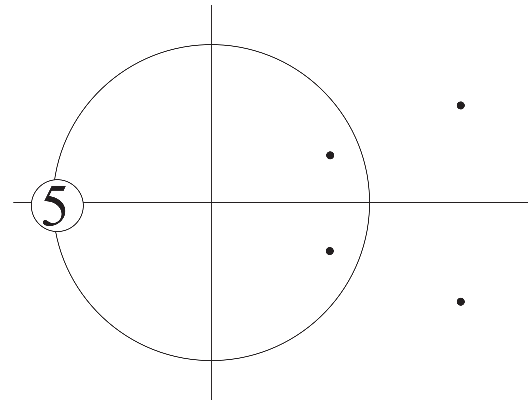




8/8 ortogonálne   9/7 symetrické   6/10 symetrické







Príklady faktorizácie P(z) maximálne hladkého filtra so 14 nulami

Sú možné nasledujúce tvary $H(z)$ resp. $\widetilde{H}(z)$ FIR filtrov pre wavelety:

1) filtre pre ortogonálne wavelety, $h(n)$ je nesymetrické

2) filtre s lineárnou fázou, biortogonálne, symetrické $h(n), \tilde{h}(n)$

- oba sú s *nepárnou* dĺžkou impulzovej odpovede
- oba sú s *párnou* dĺžkou impulzovej odpovede

Návrh Biortogonálnych B-spline waveletov

Polpásmový filter

$$P(z) = \tilde{H}(z)H(z)$$

faktorizujeme tak, aby jeden faktor obsahoval iba nuly v $z=-1$, t.j. bol v tvare:

$$H(z) = H_{SM}(z) = \sqrt{2}\left(\frac{1+z}{2}\right)^{M+1}$$

Príklad:

Pre Db2 dostávame návrhom pre K=2 nulových momentov:

$$Q(z) = -\frac{1}{2}z + 2 - \frac{1}{2}z^{-1} = \frac{2+\sqrt{3}}{2}\left[1 - \frac{\left(2-\sqrt{3}\right)}{z}\right]\left[1 - \frac{z}{\left(2+\sqrt{3}\right)}\right]$$

Potom $P(z) = 2\left(\frac{1+z}{2}\right)^4 Q(z)$. Ak chceme utvoriť Biortogonálny wavelet, môžeme vzhľadom na umiestnenie koreňov manipulovať iba s koreňmi v z=-1. Takže $Q(z)$ nebolo treba faktorizovať . Môžeme vytvoriť verzie:

1) Rbio1.3:

$$H(z) = \sqrt{2}\left(\frac{1+z}{2}\right)^1 \qquad \widetilde{H}(z) = \sqrt{2}\left(\frac{1+z}{2}\right)^3 Q(z)$$

$$h(n) = \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad \widetilde{h}(n) = \tfrac{\sqrt{2}}{2}(-1/8, 1/8, 1, 1, 1/8, -1/8)$$

2) Rbio2.2:

$$H(z) = \sqrt{2}\left(\frac{1+z}{2}\right)^2 \qquad \widetilde{H}(z) = \sqrt{2}\left(\frac{1+z}{2}\right)^2 Q(z)$$

3) Rbio3.1(Kvadratický B-Spline):

$$H(z) = \sqrt{2}\left(\frac{1+z}{2}\right)^3 \qquad \widetilde{H}(z) = \sqrt{2}\left(\frac{1+z}{2}\right)^1 Q(z)$$