

Analýza signálu viacúrovňovým rozlíšením

Signál pri *analýze viacúrovňovým rozlíšením* (AVR) rozkladáme do systému hierarchických podpriestorov, pričom každý z podpriestorov charakterizuje rôzne rýchle zmeny v signále. AVR pozostáva zo sekvencie uzavretých podpriestorov priestoru $L^2(R)$:

$$\{0\} \dots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \dots L^2(R)$$

← horšia aproximácia lepšia →

Vlastnosti MRA:

- kompletnosť

$$\bigcap_{m \in \mathbb{Z}} V_m = \{0\}$$

$$\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} V_m = \{L^2(R)\}$$

- Invariancia vzhl'adom na

$$\text{zmenu mierky} \quad - \quad f(t) \in V_m \Leftrightarrow f(2^m t) \in V_0 \quad \forall m \in \mathbb{Z}$$

$$\text{posun v čase} \quad - \quad f(t) \in V_0 \Leftrightarrow f(t - n) \in V_0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

- Existencia bázy - existuje také $\varphi \in V_0$, že množina $\{\varphi(t - n), n \in \mathbb{Z}\}$ je ortonormálnou bázou V_0 . Funkciu $\varphi \in V_0$ nazývame *funkcia mierky*
- Existencia *bázy ortogonálneho doplnku*. Nech W_m je ortogonálny doplnok V_m do V_{m-1} . Potom existuje taký ortonormálny wavelet $\psi \in W_0$, že množina $\{\psi(t - n), n \in \mathbb{Z}\}$ je ortonormálnou bázou podpriestoru W_0 .

Dôsledky:

- Aby AVR bola úplná, musia mať funkcie mierky *jednosmernú zložku*, t.j.

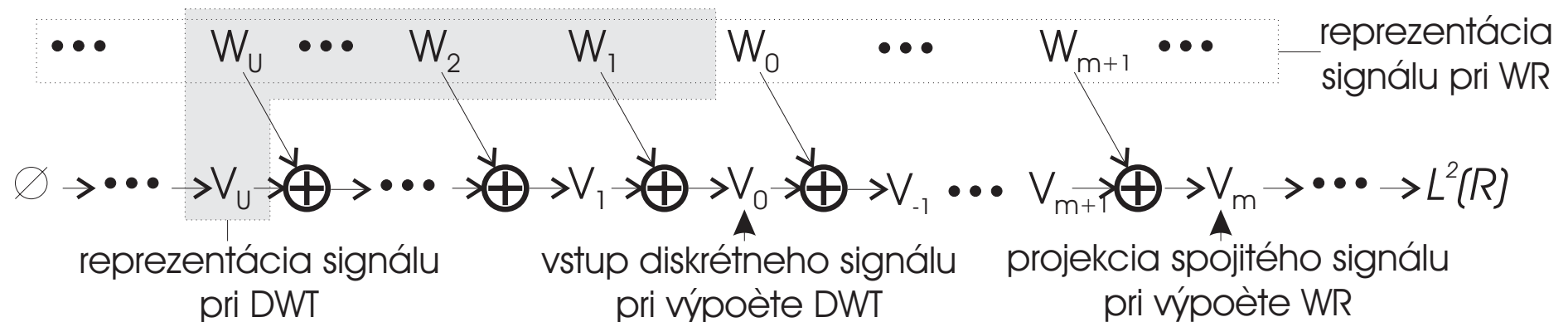
$$\int \varphi(t) dt \neq 0$$
- $\{\varphi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \varphi(2^{-m}t - n), n \in \mathbb{Z}\}$ je bázou V_m .
- $\{\psi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \psi(2^{-m}t - n), n \in \mathbb{Z}\}$ je bázou W_m

Platia nasledovné relácie:

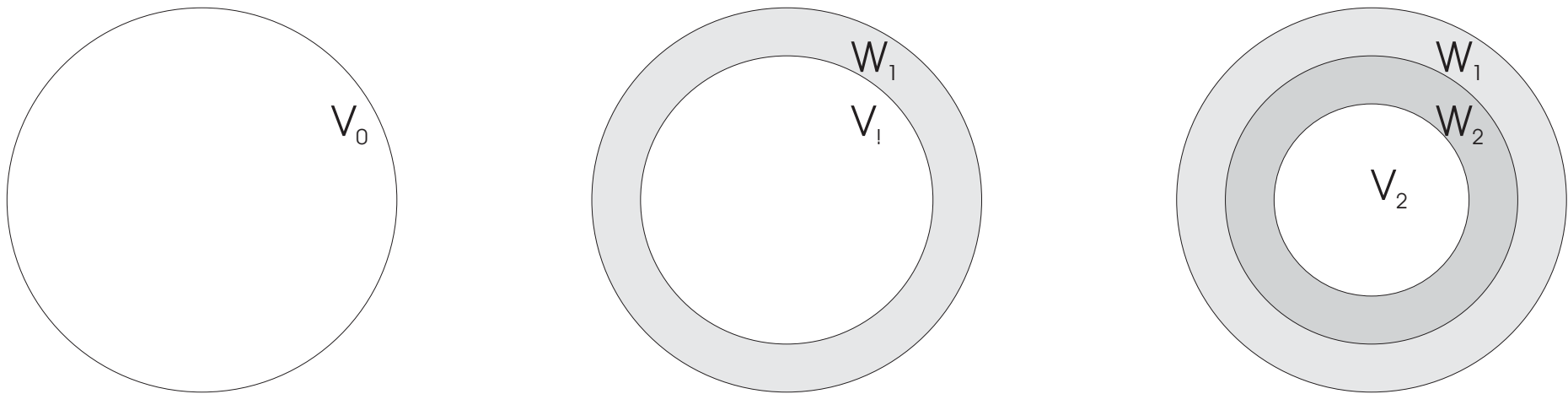
$$V_m = V_{m+1} \oplus W_{m+1}$$

$$L_2(R) = \underbrace{\dots \oplus W_2 \oplus W_1 \oplus W_0}_{V_1} \oplus \underbrace{W_{-1} \oplus W_{-2} \dots}_{V_0}$$

Vidíme, že priestory V_m majú *aproximačný charakter*, pričom W_m obsahujú iba *detaily* na rôznych úrovniach rozlíšenia.



Hierarchia aproximačných V_m a diferenčných W_m podpriestorov v MRA



Znázornenie hierarchie aproximačných V_m a diferenčných W_m podpriestorov v rovine.

Keďže V_0 je obsiahnuté vo V_{-1} , pre $\varphi(t) \in V_0$ platí aj, že $\varphi(t) \in V_{-1}$. Bázou vo V_{-1} je $\{\sqrt{2}\varphi(2t - n), n \in \mathbb{Z}\}$, takže $\varphi(t)$ môžeme vyjadriť ako lineárnu kombináciu:

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n) \varphi(2t - n)$$

Na základe vlastností ortogonálnom doplnku platí analogicky

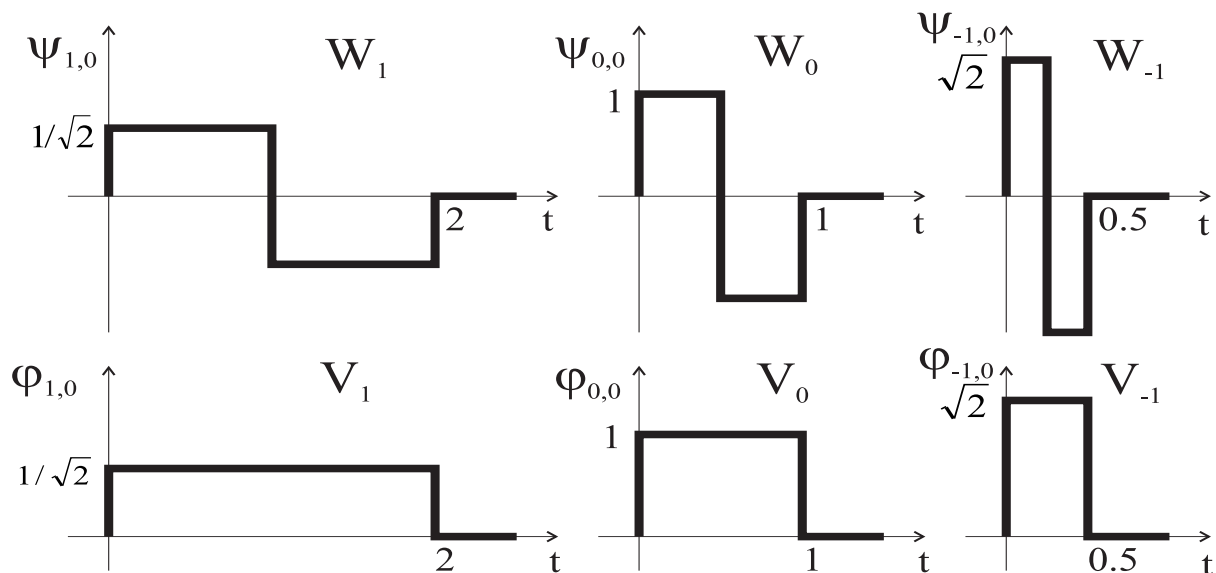
$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{mr}(n) \varphi(2t - n)$$

Tieto dva vzťahy sa nazývajú *relácie zmeny rozlíšenia* resp. *dilatačné rovnice*.

Koeficienty h_{mr} a g_{mr} charakterizujú vzťahy medzi bázami na susedných úrovniach rozlíšenia a nazývajú sa *koeficienty pre zmenu rozlíšenia* resp. *dilatačné koeficienty*

Uvedomme si, že platí (na základe vlastností AVR)

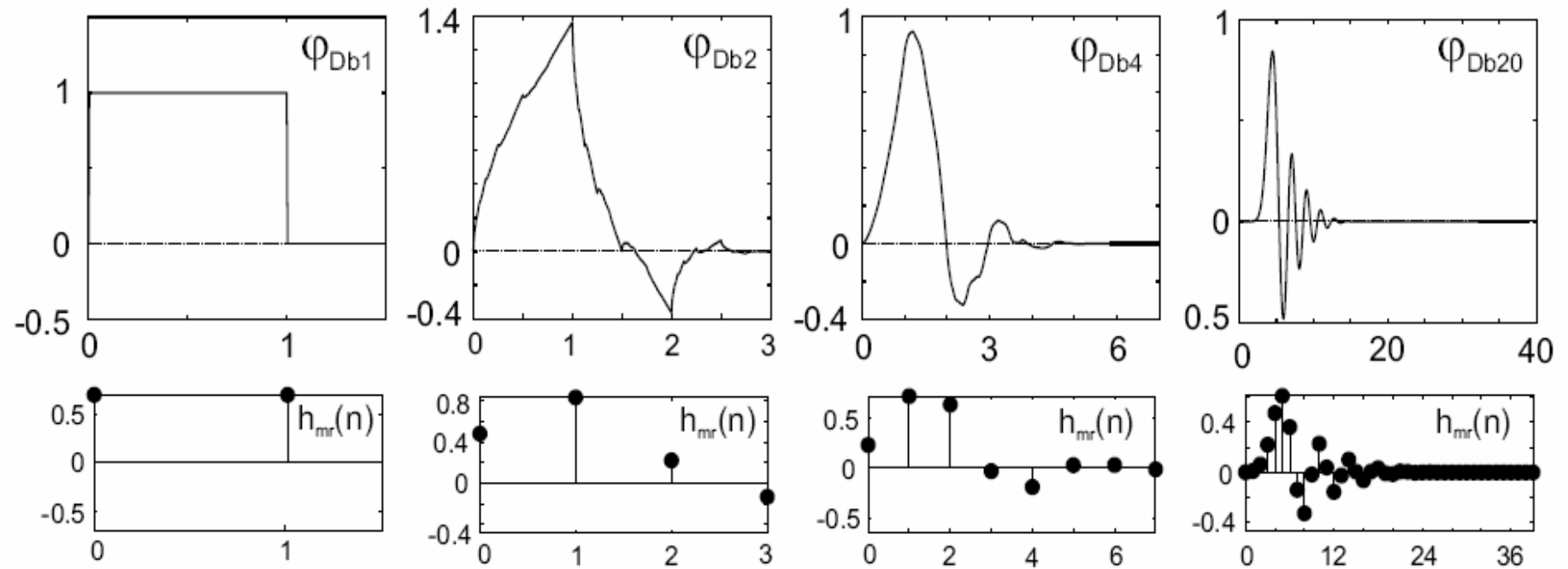
$$\varphi_{m+1,n}(t) = 2^{-1/2} \varphi_{m,n}(t/2) \quad \psi_{m+1,n}(t) = 2^{-1/2} \psi_{m,n}(t/2)$$



Na báзовých funkciách pre Haarovu WT môžeme vidieť, že

- 1) Priamy súčet podpriestorov V_1 a W_1 je V_o , t.j. báзовé funkcie V_o sa dajú vyjadriť ako lineárna kombinácia báзовých funkcií V_1 a W_1
- 2) Bázy vo V_1 a W_1 môžeme vyjadriť pomocou bázy V_o , t.j.:

$$\begin{aligned} \varphi_{1,n}(t) &= (\varphi_{0,n}(t) + \varphi_{0,n+1}(t)) \frac{\sqrt{2}}{2} & \Rightarrow & \quad h_{mr} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ \psi_{1,n}(t) &= (\varphi_{0,n}(t) - \varphi_{0,n+1}(t)) \frac{\sqrt{2}}{2} & \Rightarrow & \quad g_{mr} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \end{aligned}$$



Obr. 1.14. Příklady funkcí mierok $\varphi(t)$ a zodpovedajúcich dilatačných koeficientov $h_{\text{mr}}(n)$ pre Daubechieovej (Db) wavelety rádu 1, 2, 4, 20. Vidíme, že dĺžky $h_{\text{mr}}(n)$ presne zodpovedajú *nosičom* funkcií mierky.

Algoritmus výpočtu Waveletových radov a disktrétnej waveletovej transformácie

Nech funkcie $f(t) \in V_m$. Potom $f(t)$ môžeme vyjadriť ako:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_m(n) \varphi_{m,n}(t)$$

,kde $c_m(n) = \langle f(t), \varphi_{m,n}(t) \rangle$ je množina *projekčných* koeficientov $f(t)$ vo V_m nazývaných *koeficienty mierky*. Projekciou $f(t)$ do V_{m+1} a W_{m+1} môžeme získať koeficienty:

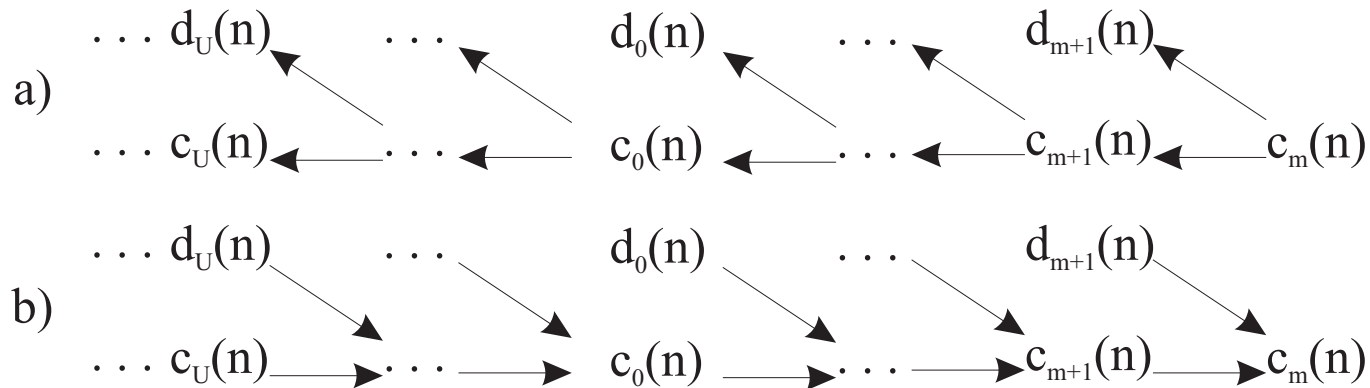
$$c_{m+1}(n) = \langle f(t), \varphi_{m+1,n}(t) \rangle$$

$$d_{m+1}(n) = \langle f(t), \psi_{m+1,n}(t) \rangle$$

Použitím vzťahu opisujúcom vzťahy medzi bázami podpriestorov na susedných úrovniach rozlíšenia, vlastností MRA a následnou úpravou dostávame:

rozklad:
$$c_{m+1}(n) = \sum_k h_{mr}(k - 2n)c_m(k) \quad d_{m+1}(n) = \sum_k g_{mr}(k - 2n)c_m(k)$$

rekonštrukcia:
$$c_m(n) = \sum_k h_{mr}(n - 2k)c_{m+1}(k) + \sum_k g_{mr}(n - 2k)d_{m+1}(k)$$



Rozklad(a) a rekonštrukcia(b) koeficientov mierky pri výpočte WR a DWT

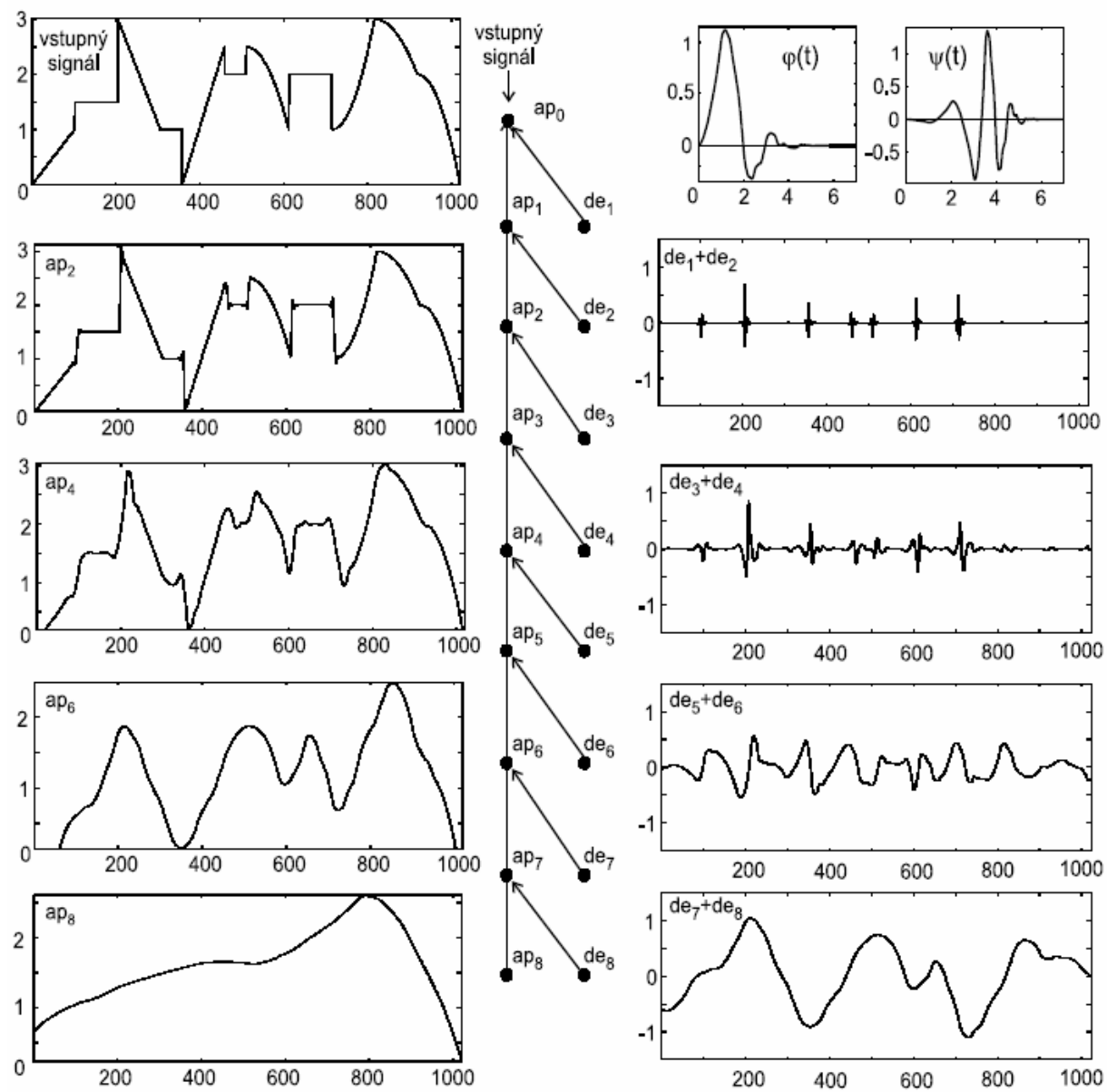
Výpočet waveletových radov

Pri výpočte *waveletových radov* z $s(t) \in L^2(R)$ môžeme zvoliť počiatočné V_m tak, aby $f(t) \in V_m$ aproximovalo $s(t)$ s ľubovoľnou presnosťou. T.j. začneme:

$$c_m(n) = \langle s(t), \varphi_{n,m}(t) \rangle$$

a ďalej pokračujeme v diskkrétnej oblasti pomocou vzťahu na výpočet rozkladu, často iba po želanú úroveň rozkladu (napr. U). V tejto reprezentácii môžeme $s(t)$ vyjadriť sumou rekonštrukcií signálu z koeficientov v príslušnom podpriestore, t.j. aproximácie signálu $s_v^U(t)$ a postupným pridávaním detailov $s_w^i(t)$:

$$s(t) = s_v^U(t) + s_w^U(t) + \dots + s_w^{m+2}(t) + s_w^{m+1}(t)$$



Výpočet DWT

Pri výpočte *diskrétnej waveletovej transformácie* (DWT) interpretujeme vstupné dáta $x(n)$, $n \in \mathbb{Z}$ ako projekčné koeficienty $c_0(n)$ nejakého spojitého signálu $s(t)$ do V_0 a ďalej pokračujeme rozkladmi ako pri WR.

Ak je signál konečnej dĺžky L , potom pre max. počet úrovní rozkladu U platí

$$U \leq \log_2 L$$

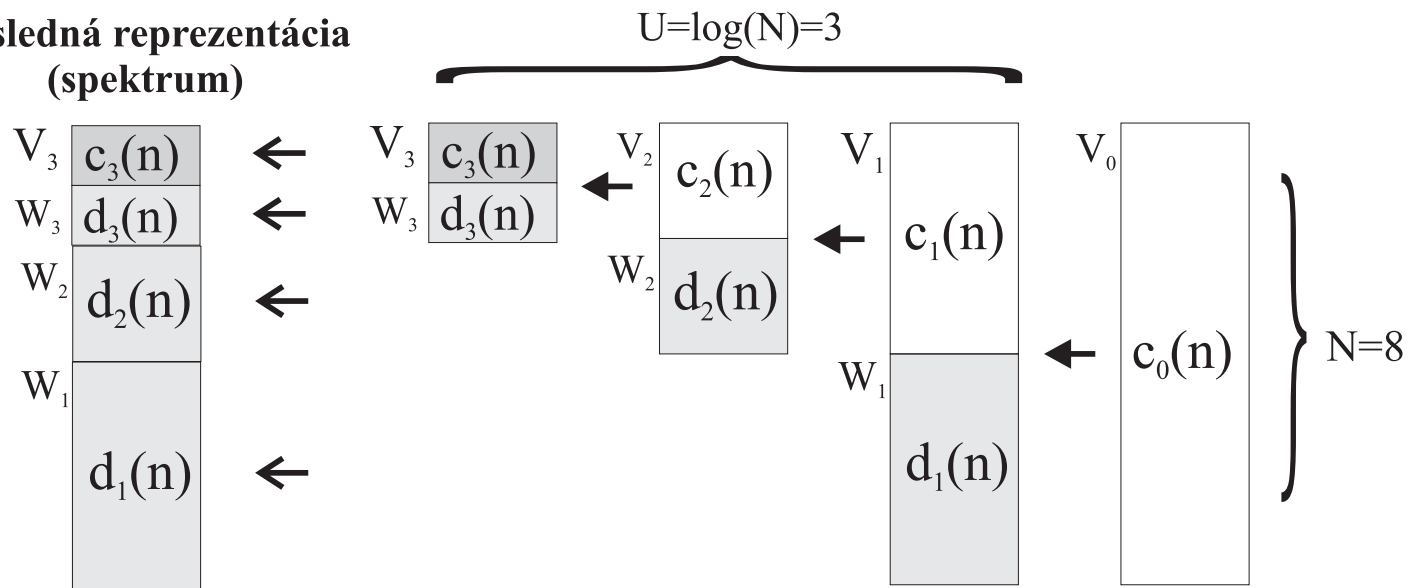
Keďže vstupný signál aj výpočet projekčných koeficientov je diskretný v čase, *báza projekčných priestorov bude diskretná, vytvorená z koeficientov pre zmenu rozlíšenia*. Celá transformácia potom môže byť vyjadrená v maticovom tvare ako ostatné diskretné lineárne transformácie.

rozklad:
$$c_{m+1}(n) = \sum_k h_{mr}(k - 2n)c_m(k) \quad d_{m+1}(n) = \sum_k g_{mr}(k - 2n)c_m(k)$$

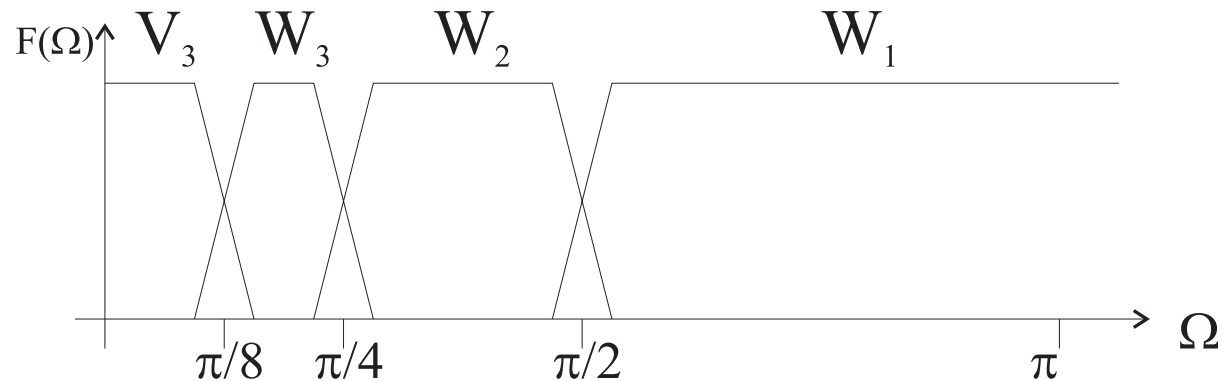
rekonštrukcia:
$$c_m(n) = \sum_k h_{mr}(n - 2k)c_{m+1}(k) + \sum_k g_{mr}(n - 2k)d_{m+1}(k)$$

Výpočet WR a DWT sa v praxi realizuje bankami filtrov.

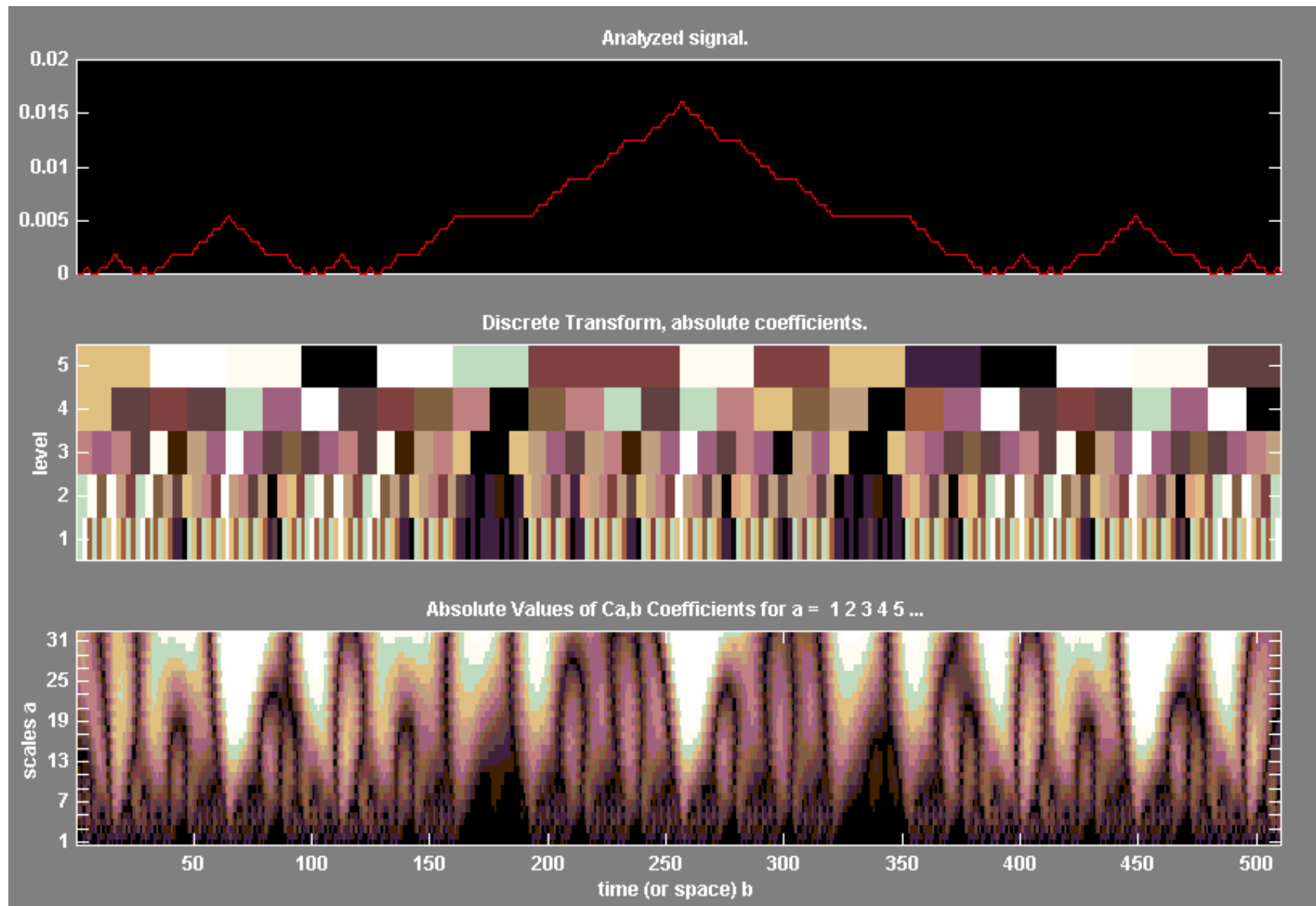
**Výsledná reprezentácia
(spektrum)**

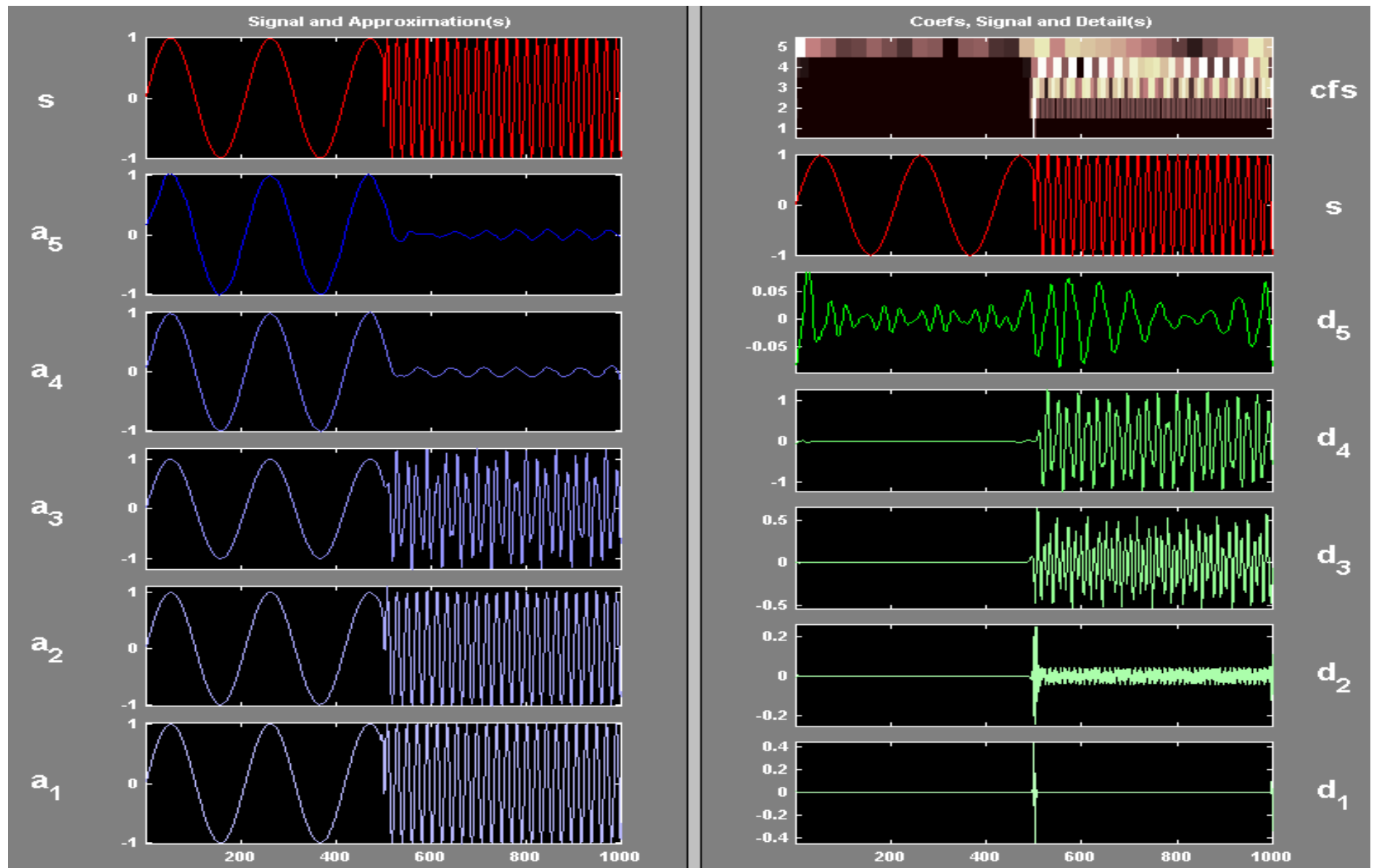


Výpočet koeficientov pri DWT a veľkosti vstupného vektora 8.

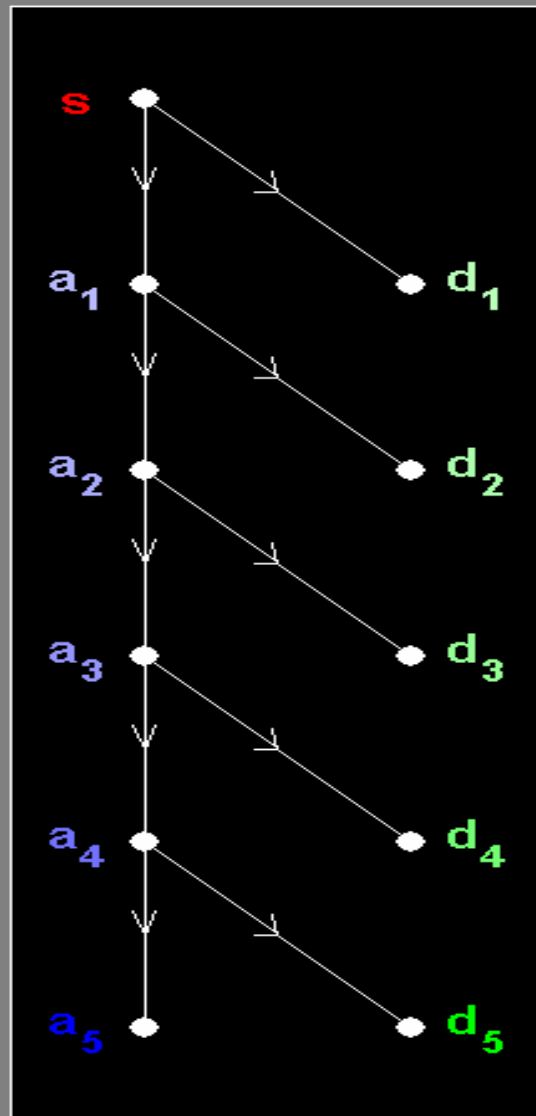


Označme diskretný vstup pre DWT ako $f(n)$. Na príklade jeho DTFT $f(\Omega)$ je znázornené, ktoré časti spektra budú vyjadrené v ktorých podpriestoroch.

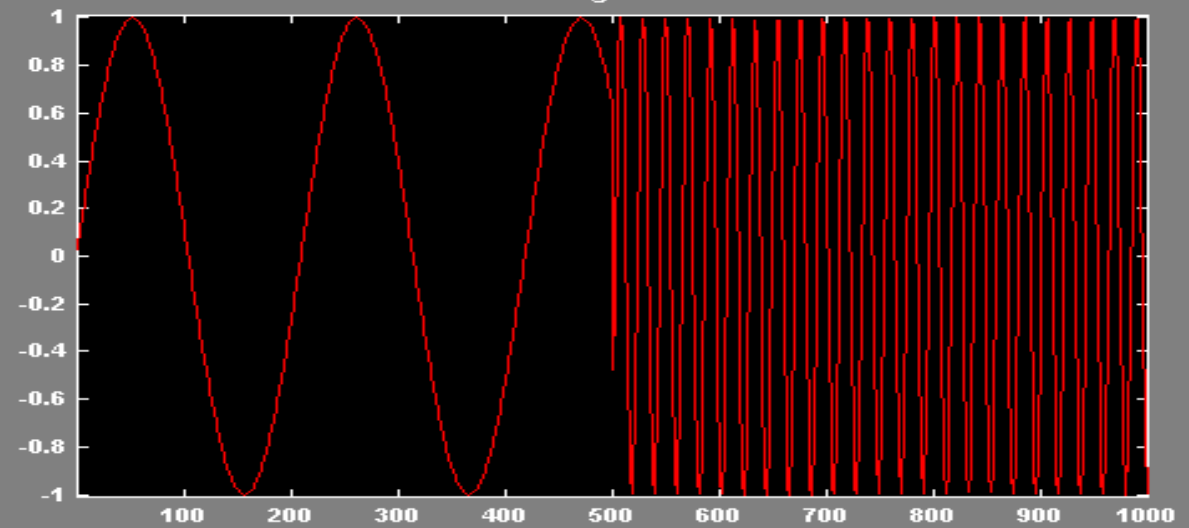




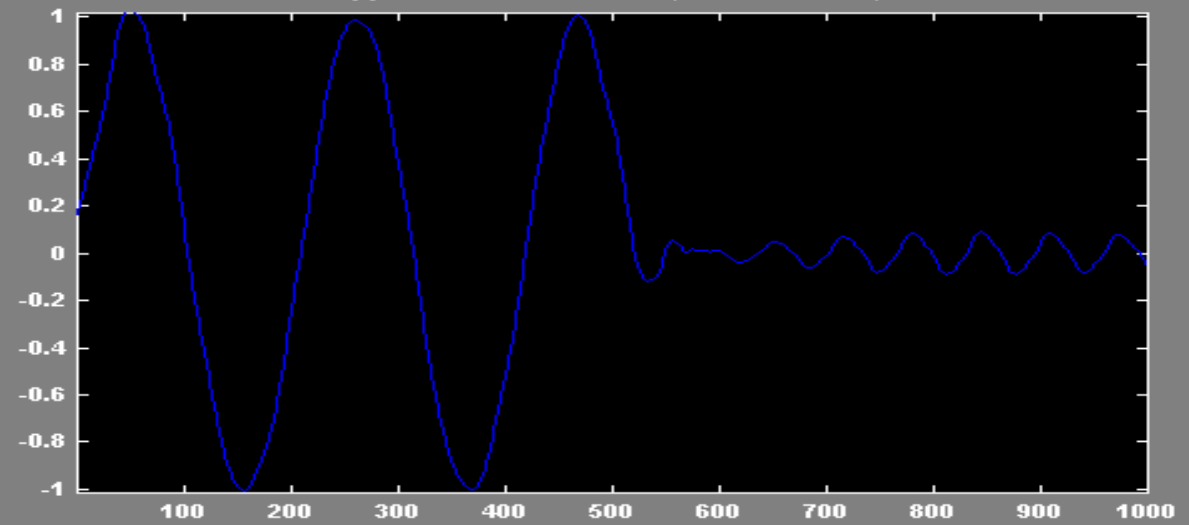
DWT : Wavelet Tree

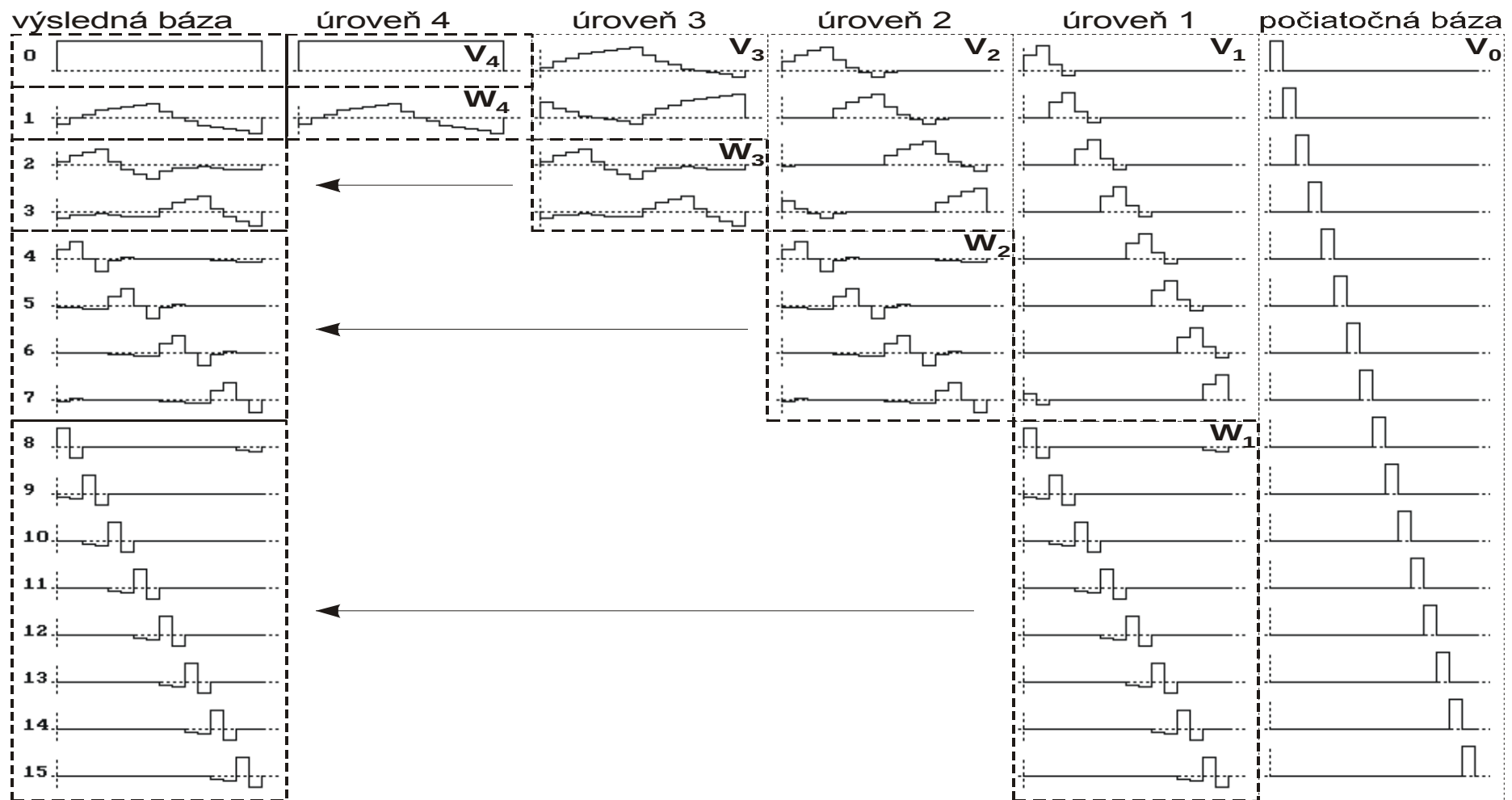


Signal

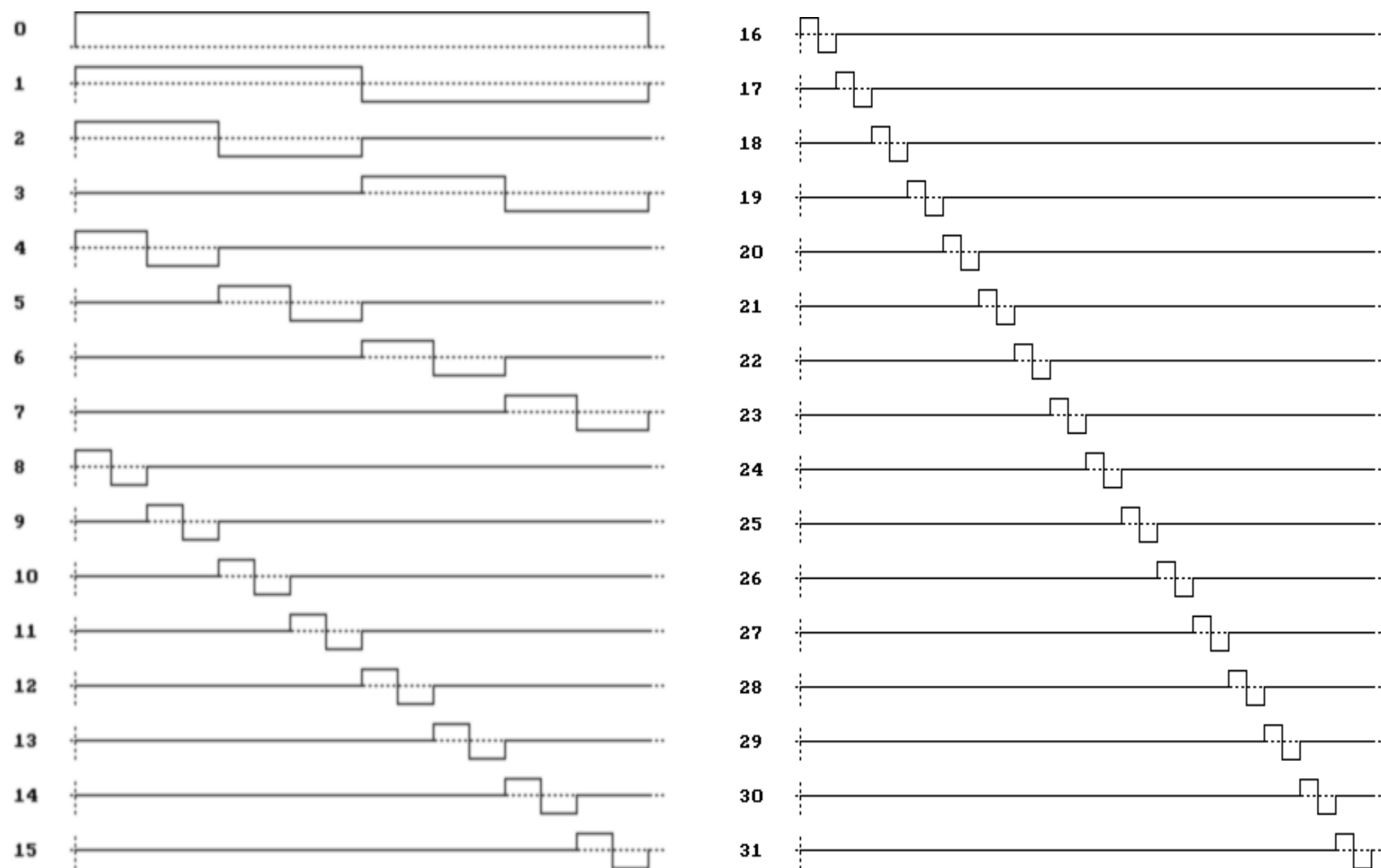


Approximation at level 5 (reconstructed).

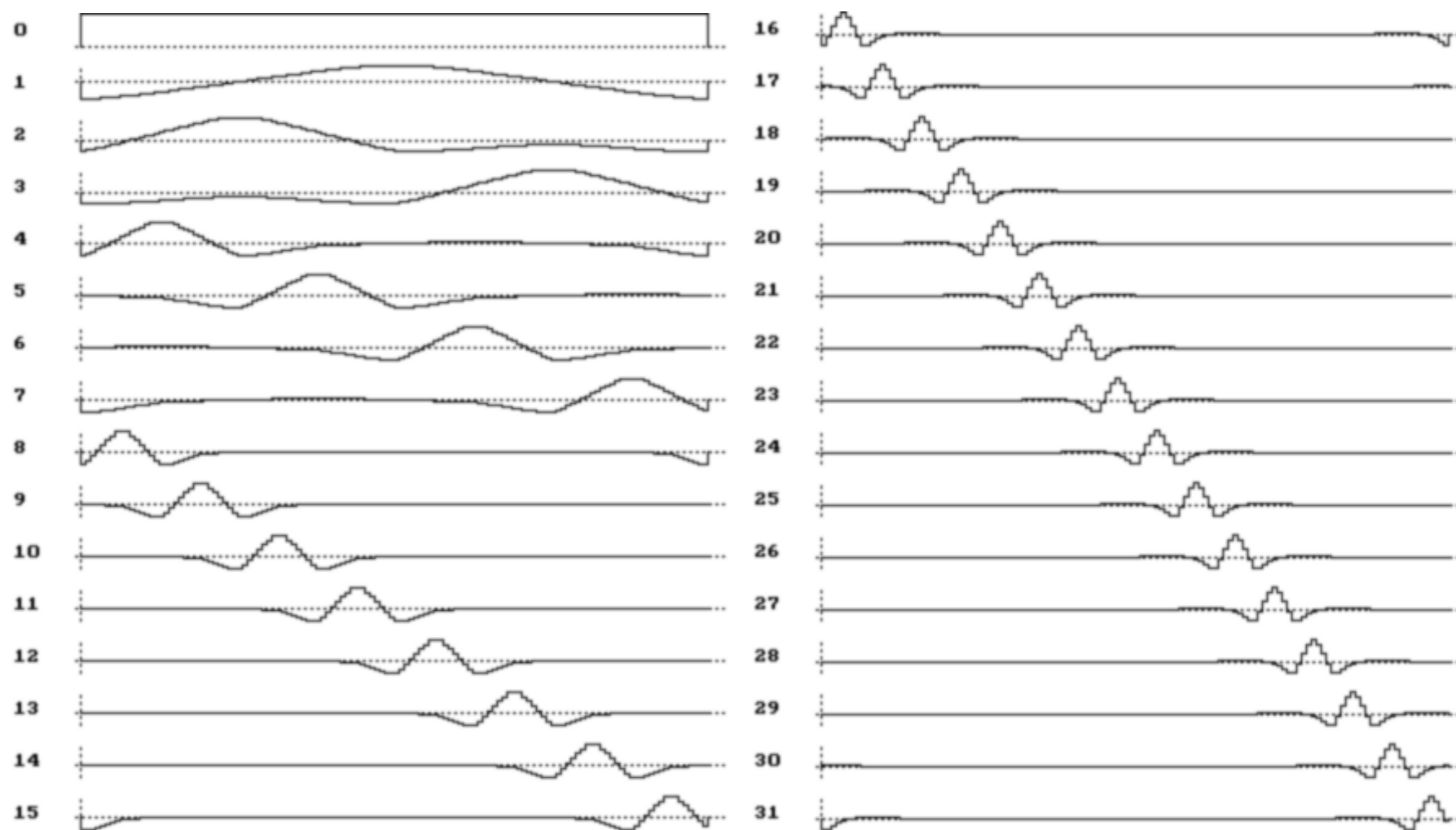




Štruktúra bázy pri ortogonálnej DWT s Db2. Pri vstupe do V_0 je báza tvorená posunmi jednotkových impluzov. Pri rozklade signálu do ďalších podpriestorov predstavujú bazové vektory čoraz lepšiu aproximáciu waveletov.



Bázové funkcie diskkrétnej waveletovej bázy o veľkosti $N=32$ pre Haarov wavelet



Prvých 32 bázových funkcií diskkrétnej waveletovej bázy o veľkosti $N=128$ pre FBI(9,7) wavelet

Biortogonálne wavelety a rozklad signálu

V predchádzajúcom texte sme vytvorili MRA s použitím ortonormálnych báz. Ak bázy $\{\psi_{m,n}\}$ a $\{\tilde{\psi}_{m,n}\}$ sú navzájom biortogonálne potom k základným waveletom $(\psi, \tilde{\psi})$ existujú funkcie mierky $\phi, \tilde{\phi}$ také, že množiny $\{\phi_{mn}\}$ a $\{\tilde{\phi}_{mn}\}$ tvoria bázy pre podpriestory V_{-m} resp. $\tilde{V}_{-m}$ a množiny $\{\psi_{mn}\}$ a $\{\tilde{\psi}_{mn}\}$ tvoria bázy pre podpriestory W_{-m} resp. $\tilde{W}_{-m}$. V $L^2(R)$ potom existujú dve MRA s hierarchiami:

$$\dots V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \dots$$

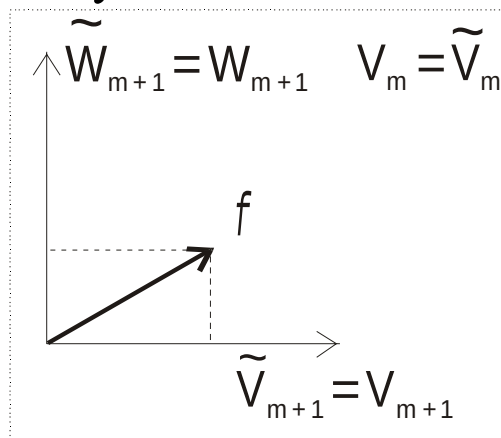
$$\dots \tilde{V}_2 \subset \tilde{V}_1 \subset \tilde{V}_0 \subset \tilde{V}_{-1} \subset \tilde{V}_{-2} \dots$$

pričom platí že W_{m+1} je síce doplnkom k V_{m+1} v priestore V_m , ale nie je to ortogonálny doplnok. W_{m+1} je namiesto toho ortogonálny doplnok k $\tilde{V}_{m+1}$ v priestore $\tilde{V}_m$. Analogicky $\tilde{W}_{m+1}$ je ortogonálny doplnok k V_{m+1} v priestore V_m .

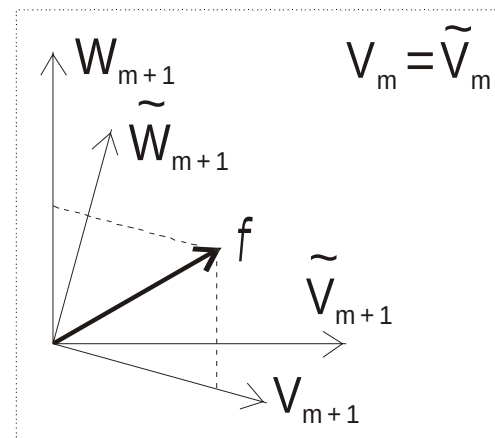
Platia nasledovné vzťahy:

$$\begin{aligned} V_m &= V_{m+1} \oplus W_{m+1} & V_m &= V_{m+1} \overset{\perp}{\oplus} \tilde{W}_{m+1} \\ \tilde{V}_m &= \tilde{V}_{m+1} \oplus \tilde{W}_{m+1} & \tilde{V}_m &= \tilde{V}_{m+1} \overset{\perp}{\oplus} W_{m+1} \end{aligned}$$

Znázornené graficky:



a) ortogonálny rozklad



b) biortogonálny rozklad

Relácie zmeny mierky potom možno vyjadriť vzťahmi:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(t) &= \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{h}_{mr}(n) \tilde{\varphi}(2t - n) & \varphi(t) &= \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n) \varphi(2t - n) \\ \tilde{\psi}(t) &= \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{g}_{mr}(n) \tilde{\varphi}(n - 2t) & \varphi(t) &= \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n) \varphi(n - 2t) \end{aligned}$$

DWT v maticovom tvare.

Uvažujme nasledovné tvary rovníc:

Rozklad(analýza):
$$c_{m+1}(n) = \sum_k \tilde{h}_{mr}(k-2n)c_m(k) \quad d_{m+1}(n) = \sum_k \tilde{g}_{mr}(k-2n)c_m(k)$$

Rekonštrukcia(syntéza):
$$c_m(n) = \sum_k h_{mr}(n-2k)c_{m+1}(k) + \sum_k g_{mr}(n-2k)d_{m+1}(k)$$

Tieto vzťahy môžeme prepísať do maticového tvaru ako transformácie:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C}_{m+1} \\ \mathbf{D}_{m+1} \end{pmatrix} = \mathbf{T}_a \mathbf{C}_m \quad \mathbf{C}_m = \mathbf{T}_s \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{m+1} \\ \mathbf{D}_{m+1} \end{pmatrix}$$

, kde T_a , T_s sú **štvorcové** transformačné matice pre analýzu, resp. pre syntézu a $\mathbf{C}_m$ resp. $\mathbf{D}_m$ sú stĺpcové vektory (matice) :

$$\mathbf{C}_m = (c_m(0), c_m(1), \dots, c_m(N_m-1))^T$$

$$\mathbf{D}_m = (d_m(0), d_m(1), \dots, d_m(N_m-1))^T$$

kde veľkosť vektorov je:

$$N_m = 2^{-m} N_0$$

Pozn.: v ďalšom texte budeme $\tilde{h}_{mr}$, h_{mr} , g_{mr} , $\tilde{g}_{mr}$ používať bez označenia "mr".

Maticový zápis pri periodickom rozšírení signálu

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{H}}_m &= \overbrace{\begin{pmatrix} \tilde{h}(0) & \tilde{h}(1) & \dots & \dots & \dots & \tilde{h}(-1) \\ \dots & \tilde{h}(-1) & \tilde{h}(0) & \tilde{h}(1) & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \tilde{h}(-1) & \tilde{h}(0) & \tilde{h}(1) \end{pmatrix}}^{N_m} & \tilde{\mathbf{G}}_m &= \overbrace{\begin{pmatrix} \tilde{g}(0) & \tilde{g}(1) & \dots & \dots & \dots & \tilde{g}(-1) \\ \dots & \tilde{g}(-1) & \tilde{g}(0) & \tilde{g}(1) & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \tilde{g}(-1) & \tilde{g}(0) & \tilde{g}(1) \end{pmatrix}}^{N_m} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} \tilde{g}(0) & \tilde{g}(1) & \dots & \dots & \dots & \tilde{g}(-1) \\ \dots & \tilde{g}(-1) & \tilde{g}(0) & \tilde{g}(1) & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \tilde{g}(-1) & \tilde{g}(0) & \tilde{g}(1) \end{pmatrix}} \right\} \frac{N_m}{2} \\
 \mathbf{H}_m &= N_m \left\{ \begin{pmatrix} h(0) & \vdots & \dots & \vdots \\ h(1) & h(-1) & \dots & \vdots \\ \vdots & h(0) & \dots & \vdots \\ \vdots & h(1) & \dots & h(-1) \\ \vdots & \vdots & \dots & h(0) \\ h(-1) & \vdots & \dots & h(1) \end{pmatrix} \right. & \mathbf{G}_m &= N_m \left\{ \begin{pmatrix} g(0) & \vdots & \dots & \vdots \\ g(1) & g(-1) & \dots & \vdots \\ \vdots & g(0) & \dots & \vdots \\ \vdots & g(1) & \dots & g(-1) \\ \vdots & \vdots & \dots & g(0) \\ g(-1) & \vdots & \dots & g(1) \end{pmatrix} \right.
 \end{aligned}$$

Analýza: $\mathbf{C}_{m+1} = \tilde{\mathbf{H}}_m \mathbf{C}_m \quad \mathbf{D}_{m+1} = \tilde{\mathbf{G}}_m \mathbf{C}_m$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C}_{m+1} \\ \mathbf{D}_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{H}}_m \\ \tilde{\mathbf{G}}_m \end{pmatrix} \mathbf{C}_m \quad \rightarrow \quad \mathbf{T}_a = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{H}}_m \\ \tilde{\mathbf{G}}_m \end{pmatrix}$$

Syntéza: $\mathbf{C}_m = (\mathbf{H}_m \quad \mathbf{G}_m) \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{m+1} \\ \mathbf{D}_{m+1} \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{T}_s = (\mathbf{H}_m \quad \mathbf{G}_m)$

Všeobecne

$$\mathbf{T}_a \mathbf{T}_s = \mathbf{I}_N = \mathbf{T}_s \mathbf{T}_a$$

Vyjadrame:

$$\mathbf{I}_N = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{N/2} & \mathbf{0}_{N/2} \\ \mathbf{0}_{N/2} & \mathbf{I}_{N/2} \end{pmatrix} = \mathbf{T}_a \mathbf{T}_s = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{H}} \\ \tilde{\mathbf{G}} \end{pmatrix} (\mathbf{H} \quad \mathbf{G}) = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{H} \\ \tilde{\mathbf{G}} \end{pmatrix} (\mathbf{H} \quad \mathbf{G}) = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{H} & \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{G} \\ \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{H} & \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{G} \end{pmatrix}$$

z čoho vyplýva:

$$\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{H} = \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{G} = \mathbf{I} \quad \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{G} = \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{H} = \mathbf{0}$$

T.j. impulzové charakteristiky filtrov sú ortogonálne k párnym posunom svojich duálov a ortogonálne navzájom „nakríž“ = podmienky *biortogonality*.

Pre Ortogonálne DWT platí nasledovná podmienka :

$$\tilde{h}_{mr}(n) = h_{mr}(n) , \quad \tilde{g}_{mr}(n) = g_{mr}(n) \quad g_{mr}(n) = \pm(-1)^n h_{mr}(M-n)$$