

Časovo - frekvenčná analýza a waveletová transformácia (pokračovanie)

Wigner-Villove rozdelenie(WVR) - predchodca waveletov

Wigner-Villove rozdelenie signálu $x(t)$ je dané:

$$W_x(t, f) = \int_{\tau} x(t + \tau/2) x^*(t - \tau/2) e^{-i2\pi f \tau} d\tau$$

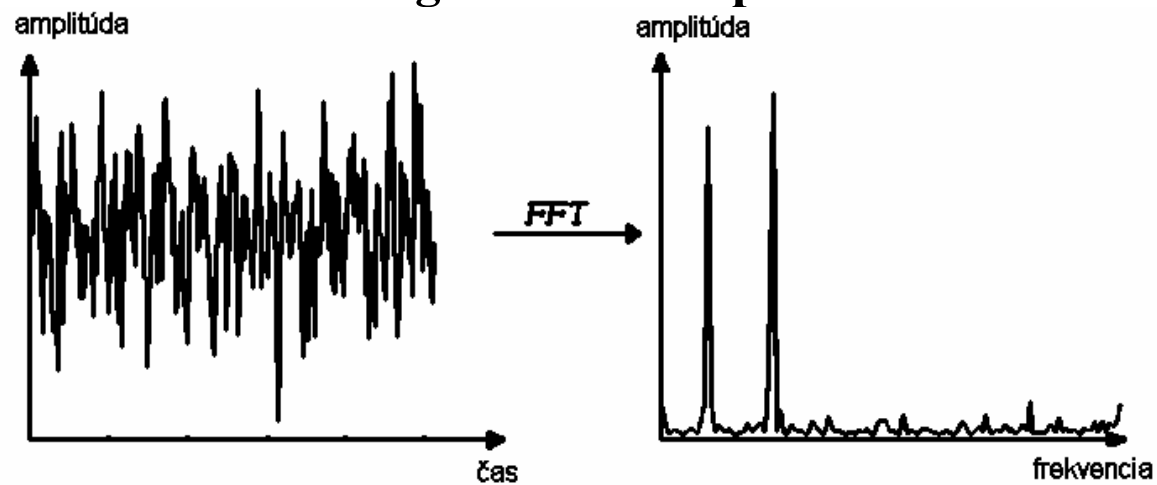
WVR je:

- 1) Fourierova transformáciu autokorelačnej funkcie signálu s rôznym posunutím τ počiatku v čase.
- 2) STFT, kde oknová funkcia je otočená a posúvaná kópia signálu $x(t)$.

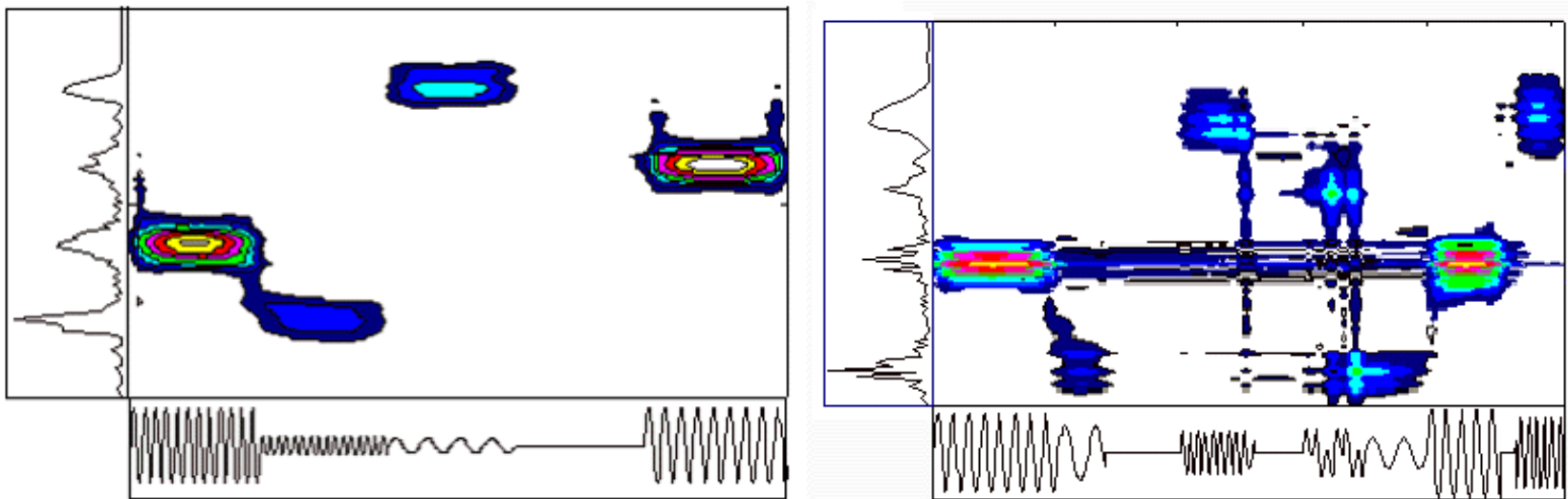
Vlastnosti:

- 1) WVR ponúka vo všeobecnosti oveľa lepšie časovo-frekvenčné rozlíšenie ako STFT.
- 2) Pre WVR platí $W_x(t, f) \in R$, t.j. obor hodnôt sú reálne a nie komplexné čísla
- 3) Problematická rekonštrukcia signálu

Informácia o signále získané pomocou FFT



Informácia o signále v časovo-frekvenčnej rovine získané pomocou WVR



Triviálne riešenie vychádzajúce z Fourierovej transformácie (opakovanie):

Riešenie vo forme oknovej *STFT (Short Time Fourier Transform)*, Gábor (1946), posúva okno fixnej veľkosti pozdĺž signálu a extrahuje frekvenčný obsah v danom intervale

$$F(\omega, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t - \tau)e^{-j\omega t} dt \langle f(t)g(t - \tau), e^{j\omega t} \rangle$$

,kde $g(t)$ je oknová funkcia a $f(t)$ vstupná funkcia. Ak oknová funkcia je gaussovská funkcia, tak STFT sa volá *Gáborova transformácia*.

Pre STFT platí:

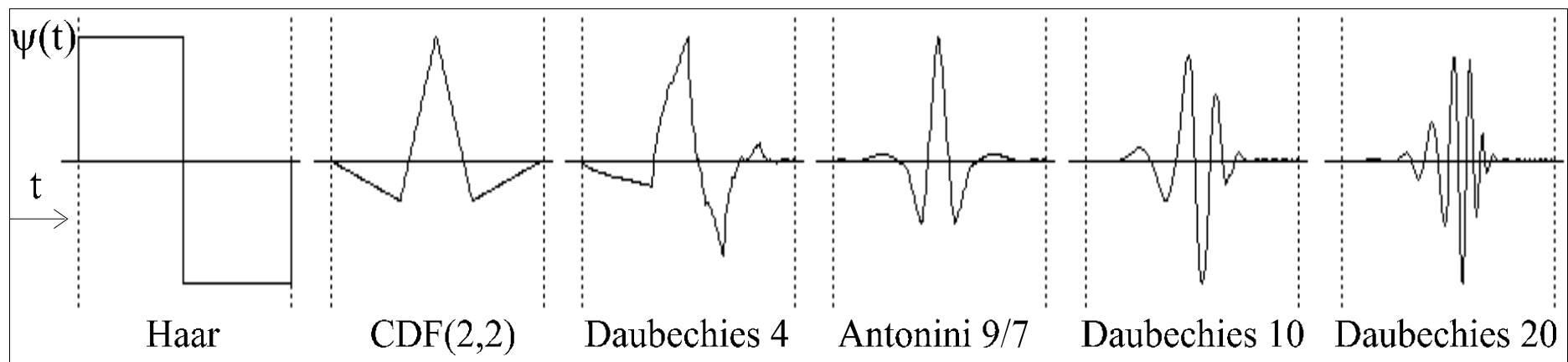
- Bázové funkcie sú generované *moduláciou* a *posunom* oknovej (prototypovej) funkcie $g(t)$.
- STFT má pre danú oknovú funkciu *pevné rozlíšenie vo frekvencii*.

Waveletová transformácia (WT)

má oproti STFT funkcie formované

- zmenou mierky a
- posunom

prototypovej funkcie (základného waveletu) $\psi(t)$



Príklady rôznych druhov základných waveletov v $L^2(R)$

Spojité waveletová transformácia (SWT) funkcie $f(t) \in L^2(R)$ je definovaná ako zobrazenie $L^2(R) \rightarrow L^2(R^2)$ vzťahom

$$SWT_f(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{a,b}^*(t) dt = \langle f(t), \psi_{a,b}(t) \rangle \quad a \in R^+, b \in R$$

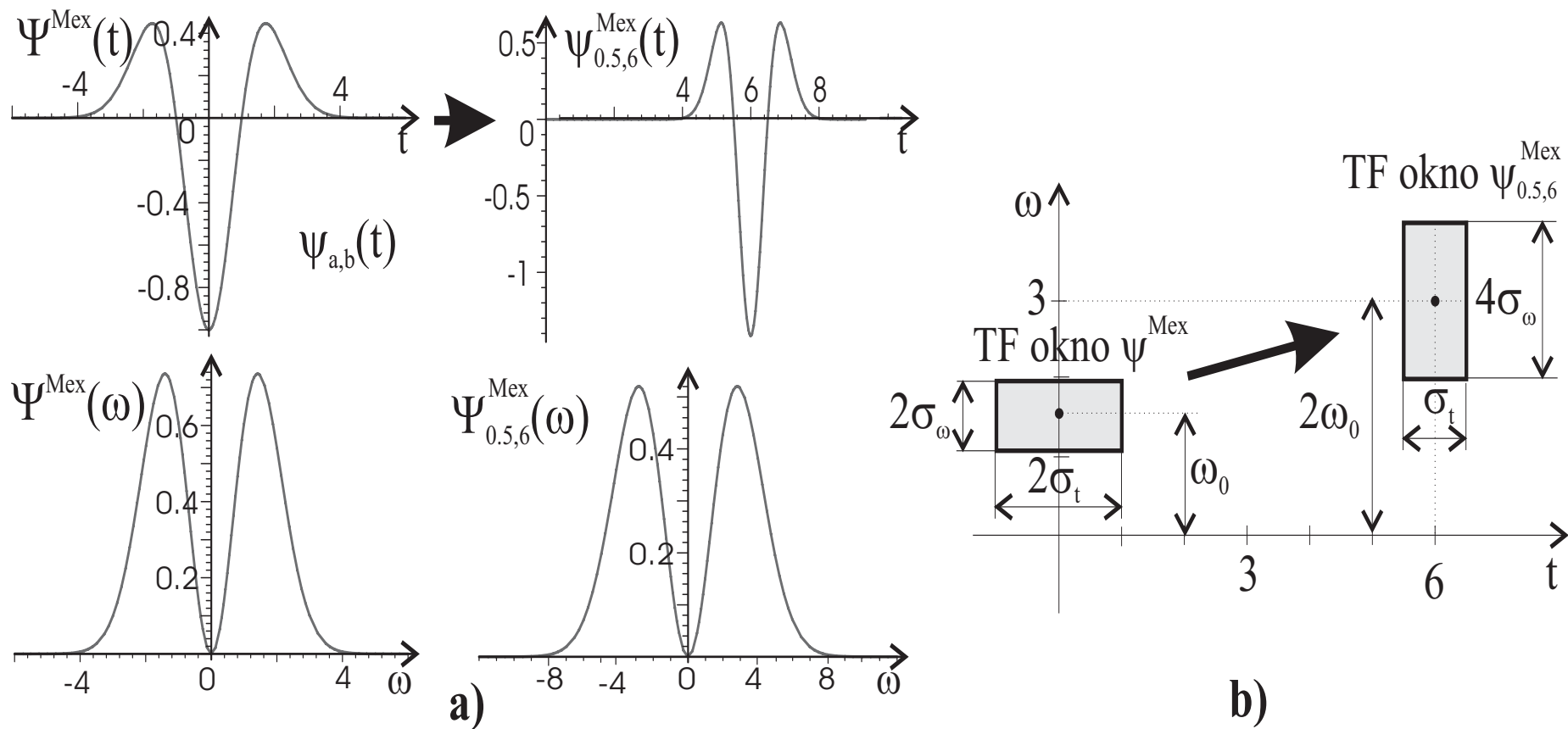
Funkcie $\psi_{a,b}(t)$ sú definované zo *základného waveletu* $\psi(t)$ pomocou parametrov *zmeny mierky* a *posunu* a, b nasledovne:

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad \psi(t) \in L^2(R)$$

SWT v závislosti od parametra a poskytuje pružné časovo - frekvenčné rozlíšenie. Ak *časovo - frekvenčné okno* $\psi(t)$ má rozmery σ_t, σ_ω a stred v bode $S = (t_0, \omega_0)$, potom

$$\sigma_{ab_t} = a \sigma_t \quad \sigma_{ab_\omega} = \sigma_\omega / a \quad S_{ab} = (at_0 + b, \omega_0 / a)$$

T.j. obsah okna ostáva konštantne $4\sigma_t\sigma_\omega$.



Príklad zobrazenia základného waveletu a jeho zmenenej a posunutej verzie,
a) v čase a frekvencii b) v TF rovine

Príklad: Ak funkcia $f(t)$ má nenulové hodnoty na intervale (t_0, t_1) , kde bude nenulová $f[(t - b)/a]$?

Riešenie: Hľadáme taký interval (t_0^*, t_1^*) , ktorý sa daným prepisom zobrazí na (t_0, t_1) , t.j.: $t_0 = (t_0^* - b)/a$ a $t_1 = (t_1^* - b)/a$ z toho $t_0^* = at_0 + b$, $t_1^* = at_1 + b$. Riešením je teda interval $(at_0 + b, at_1 + b)$.

SWT je *invertovateľná*, ak pre Fourierovu transformáciu $\Psi(\omega)$ základného waveletu platí:

$$C_{\psi} = \int_0^{\infty} \left| \frac{\Psi(\omega)}{\omega} \right|^2 d\omega < \infty \qquad \Psi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$$

t.j. $\Psi(\omega)$ má charakter pásmového priepustu. Potom existuje inverzná SWT v tvare:

$$f(t) = \frac{1}{C_{\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} SWT_f(a,b) \cdot \psi_{a,b}(t) \frac{da db}{a^2}$$

Pozn.1: Základné wavelety majú zvyčajne jednotkovú energiu, t.j. $\|\psi(t)\| = 1$.

Pozn.2: Normalizácia $1/\sqrt{a}$ pri výpočte $\psi_{a,b}(t)$ z $\psi(t)$ zabezpečuje $\|\psi_{a,b}(t)\| = \|\psi(t)\|$.

Zovšeobecnenie

Pri SWT je možné použiť pri rozklade a rekonštrukcii signálu *rôzne základné wavelety* $\tilde{\psi}(t)$ a $\psi(t)$:

$$f(t) = \frac{1}{C_{\tilde{\psi}, \psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle f, \tilde{\psi}_{a,b} \rangle \psi_{a,b} \frac{da db}{a^2}$$

Invertovateľnosť je podmienená vzťahom pre výpočet $C_{\tilde{\psi}, \psi}$ nasledovne:

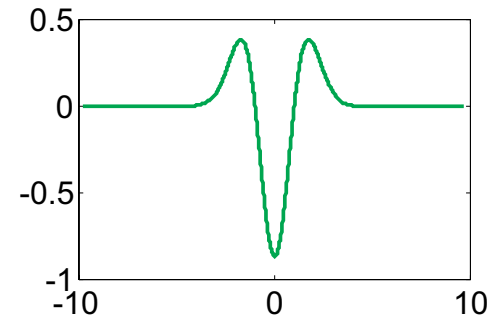
$$C_{\tilde{\psi}, \psi} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tilde{\Psi}(\omega)| |\Psi(\omega)|}{|\omega|} d\omega < \infty$$

Táto podmienka je postačujúca, základné wavelety nemusia spĺňať žiadne iné podmienky.

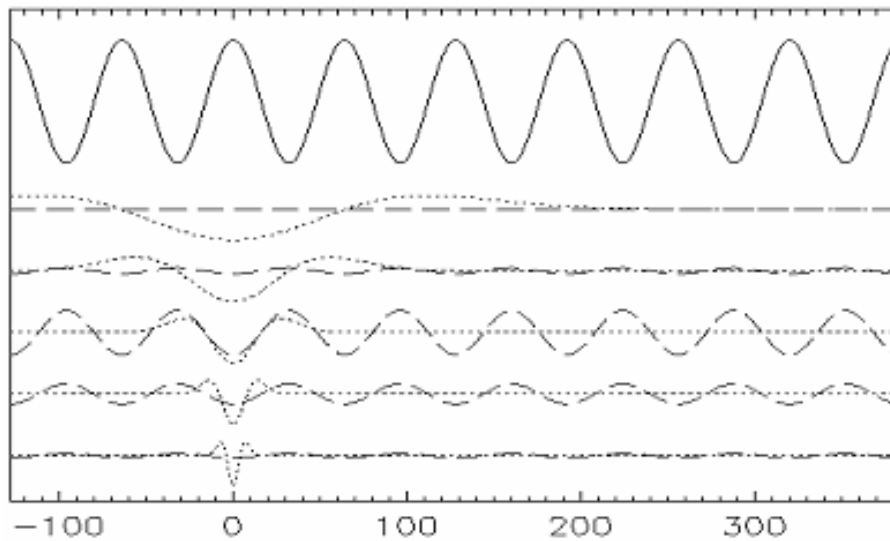
Príklad

Wavelet "Mexický klobúk" (obrátená verzia)

$$\psi_{mex}(t) = (t^2 - 1)e^{-\frac{t^2}{2}}$$

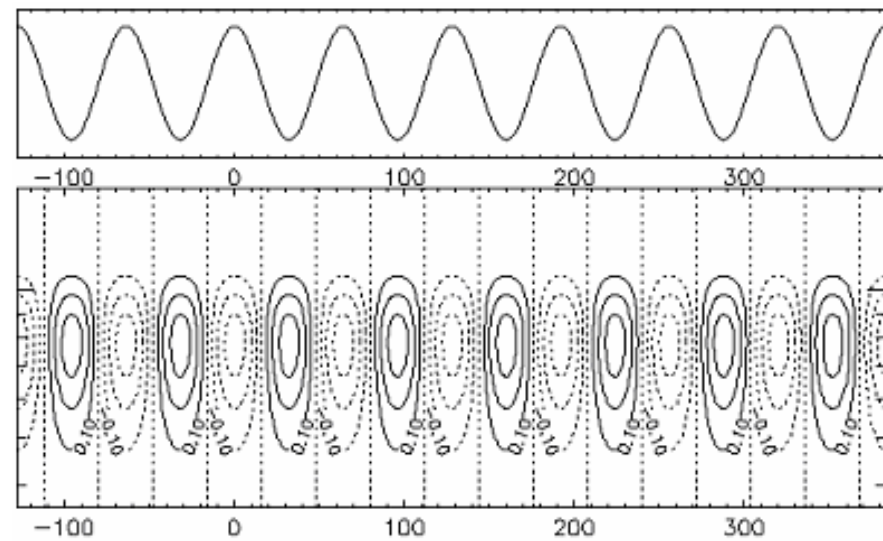


Analýza signálu $f(t) = \cos(t/10)$ pomocou $\psi_{mex}(t)$



a) Zhoda $f(t)$ s $\psi_{mex}(t)$ s meniacou sa mierkou

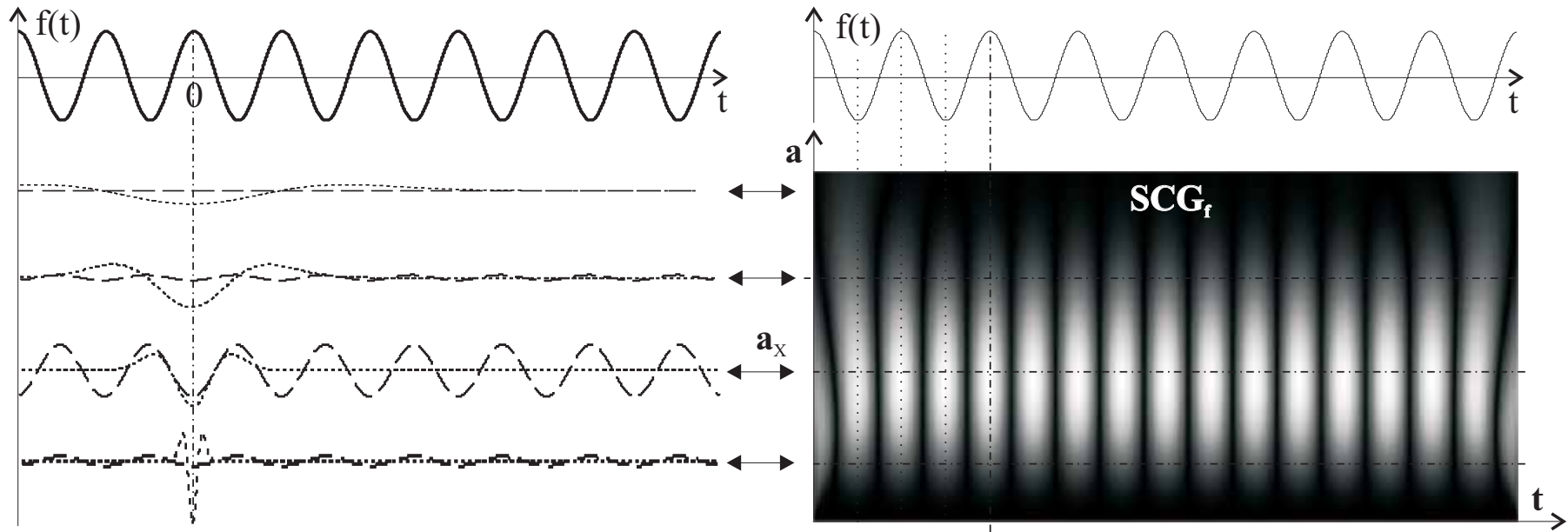
(výsledok znázornený bodkovane)



b) Znáznorená výsledná SWT

$$SWT(k, \tau) = \sqrt{k} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{mex}[k(t - \tau)] dt$$

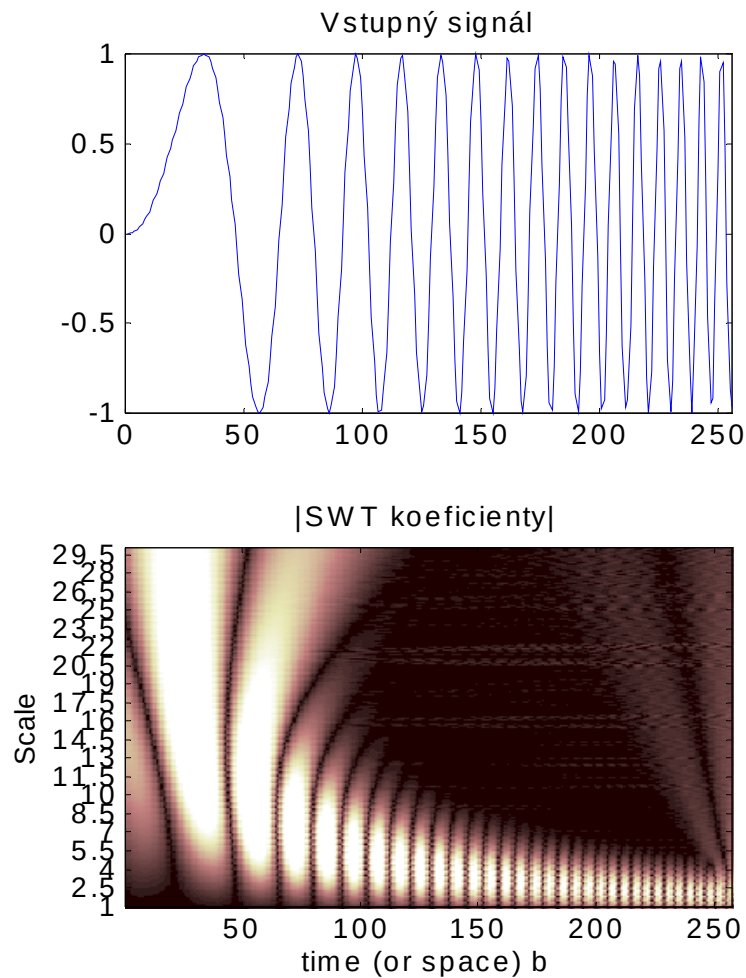
Ako štandardne znázorniť výsledky ➔ škálogram (SCG)



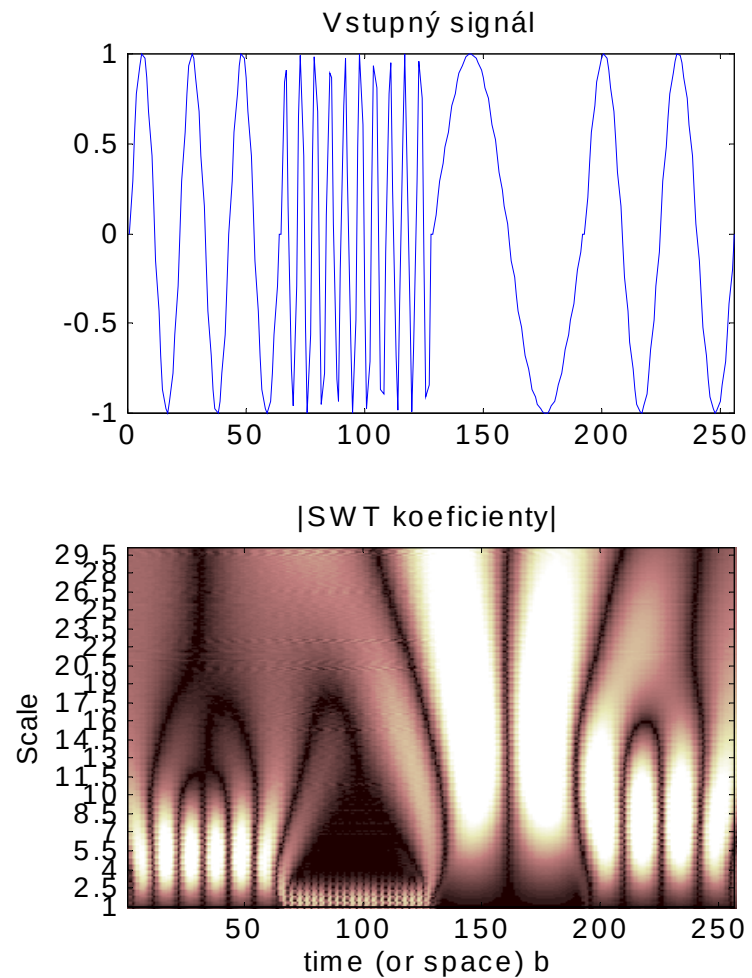
Aký je vzťah medzi od spektrogramom a škálogramom ?

➔ Prepočet súradníc (t, a) na (t, ω) je triviálny, treba si uvedomiť, že súradnici $a = 1$ zodpovedá ω_0 t. j. stredná frekvencia základného waveletu.

Príklady škálogramov SWT, použitý wavelet: $\psi_{mex}(t)$



a) $f(t) = \sin(t^2)$



a) $f(t)$ je kombináciou $\sin(3t, 10t, 1t, 2t)$

Vlastnosti SWT

Linearita:

Vyplýva priamo z linearity skalárneho súčinu

Posun v čase:

$$g(t) = f(t - b_0) \Rightarrow SWT_g(a, b) = SWT_f(a, b - b_0)$$

Zmena mierky:

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} f\left(\frac{t}{s}\right) \Rightarrow SWT_g(a, b) = SWT_f\left(\frac{a}{s}, \frac{b}{s}\right)$$

Základné charakteristiky waveletov

- 1) *Existencia nosiča* na intervale vypovedá o tom, že funkcia (wavelet) má nenulové funkčné hodnoty len na danom intervale. Ak sú mimo neho funkčné hodnoty presne nulové, oovoríme, že na danom intervale $\langle a, b \rangle$ *má kompaktný nosič*. Ak sú „približne“ nenulové, t.j. zanedbateľne malé hovoríme, že má *efektívny nosič*.
- 2) *Počet nulových momentov*. *K-ty moment* $\psi(t)$ definujeme ako $m(k) = \int t^k \psi(t) dt$. Platí, že ak $\psi(t)$ je K krát *diferencovateľná* a pre $t \rightarrow \pm\infty$ klesá dostatočne rýchlo, potom prvých $K-1$ momentov bude nulových. Potom ak $f(t)$ je na nejakom intervale polynómom max. $K-1$ stupňa, pre wavelety $\psi_{a,b}(t)$ podporované v tomto intervale budú príslušné waveletové koeficienty $SWT_f(a,b)$ nulové.
- 3) *Regularita* (Daubechies 1988) poskytuje *mieru hladkosti funkcie* $f(t)$. Je to také maximálne číslo r pre ktoré platí $|F(\omega)| \leq c/(1+|\omega|^{r+1})$, $\omega \in R$. Potom $f(t)$ je $r-1$ krát spojite diferencovateľná, r -tá derivácia môže byť nespojitá.

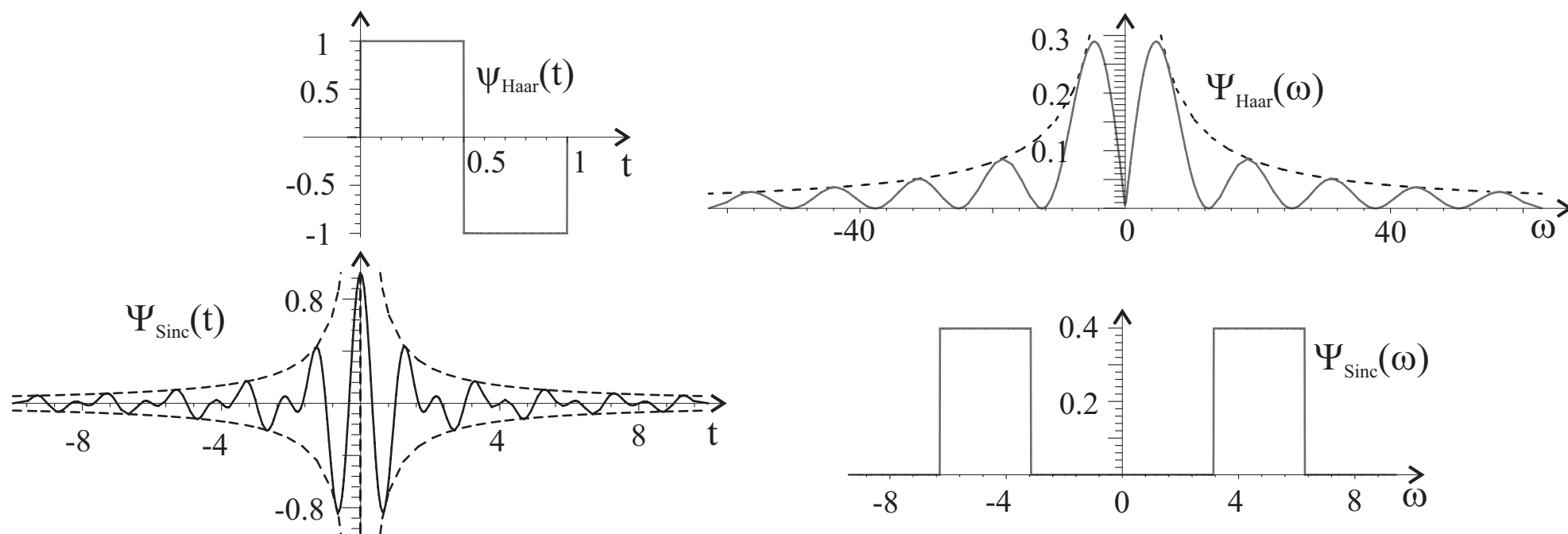
Príklady waveletov

Haarov wavelet:
$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{pre } 0 < t < 0.5 \\ -1 & \text{pre } 0.5 < t < 1 \\ 0 & \text{ináč} \end{cases} .$$

Sinc wavelet:
$$\psi(t) = 2\varphi(2t) - \varphi(t), \text{ kde } \varphi(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

Morletov wavelet:
$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-j\omega_0 t} e^{-t^2/2} .$$

Wavelet	Počet nulových momentov	Regularita r	Charakter resp. podpora v čase	Charakter resp. podpora vo frekvencii
Haar	1	0	$\langle 0, 1 \rangle$	$1/\omega$
Sinc	∞	∞	$1/t$	$\langle \pi, 2\pi \rangle$
Daubechies N	N	$\alpha(N)$	$\langle 0, 2N-1 \rangle$	$1/\omega^{\alpha(N)}$



Časové a frekvenčné priebehy triviálneho Haarovho a Sinc waveletu.

Waveletové rady a rámce

Redundancia SWT (oba parametre a , b sú spojité) sa dá odstrániť *vzorkovaním* a , b . Potom hovoríme o *waveletových radoch (WR)*. Pri voľbe vzorkovania sú dôležité otázky kompletnosti, redundancie a minimálnosti výslednej množiny funkcií.

Štandardná voľba *typu* vzorkovacej mriežky

- $a = a_0^m$.
- $b = nb_0a_0^m$ (volíme tak, aby bola pomocou σ_{ab_t} pri danej mierke a “pokrytá” celá časová os)

Pre $\psi(t)$ (a analogicky pre $\tilde{\psi}(t)$) dostávame množinu funkcií:

$$\psi_{mn}(t) = a_0^{-\frac{m}{2}} \psi(a_0^{-m}t - nb_0) , \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

Každú $f(t) \in L^2(R)$ potom môžeme vyjadriť superpozíciou vo *waveletových rámcoch (Wavelet Frames – WF)*:

$$f(t) = \sum_m \sum_n d_{m,n} \tilde{\psi}_{m,n}(t) \quad d_{m,n} = \langle f(t), \psi_{m,n}(t) \rangle \quad m, n \in Z$$

(WF)

ak množiny $\{\psi_{m,n}\}, \{\tilde{\psi}_{m,n}\}$ sú *kompletné duálne rámce*, pre ktoré $\forall f(t) \in L^2(R)$ platí:

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{m,n} |\langle f, \psi_{m,n} \rangle|^2 \leq B\|f\|^2 \quad B^{-1}\|f\|^2 \leq \sum_{m,n} |\langle f, \tilde{\psi}_{m,n} \rangle|^2 \leq A\|f\|^2$$

Koeficienty $d_{m,n}$ nazývame *waveletové koeficienty*.

Ak $A = B = 1$, $\|\psi_{m,n}\| = 1$ rámec $\{\psi_{m,n}\}$ tvorí *ortonormálnu bázu* v $L^2(R)$. Funkciu $\psi \in L^2(R)$ potom nazývame *ortonogonálny* resp. *ortonormálny wavelet*.

Najbežnejšia sa redundancia reprezentácie vo waveletových rámcoch odstraňuje voľbou vzorkovacej mriežky :

$$a_0 = 2, b_0 = 1$$

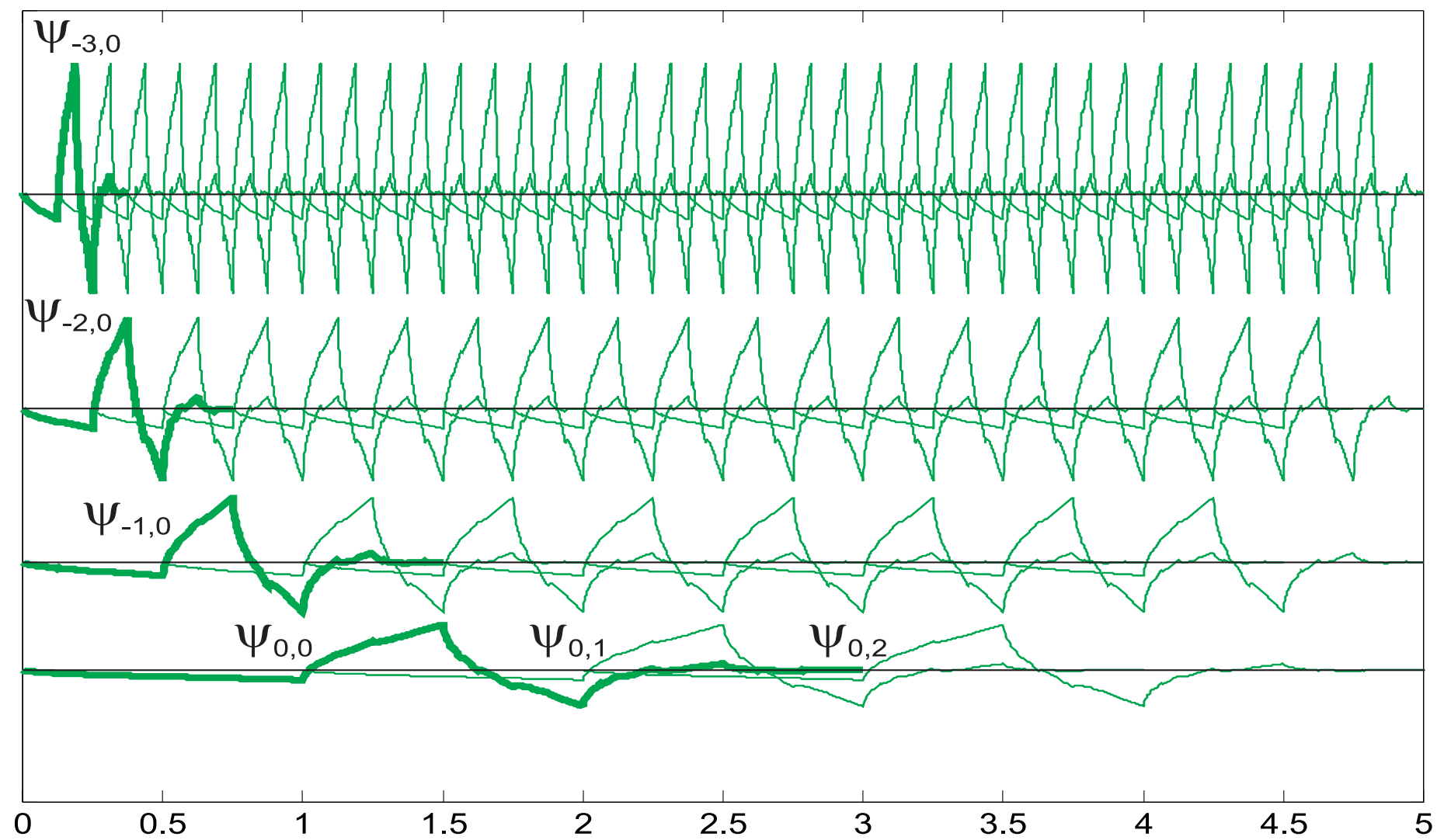
Platí :

$$\psi_{m,n}(t) = 2^{-\frac{m}{2}} \psi(2^{-m}t - n)$$

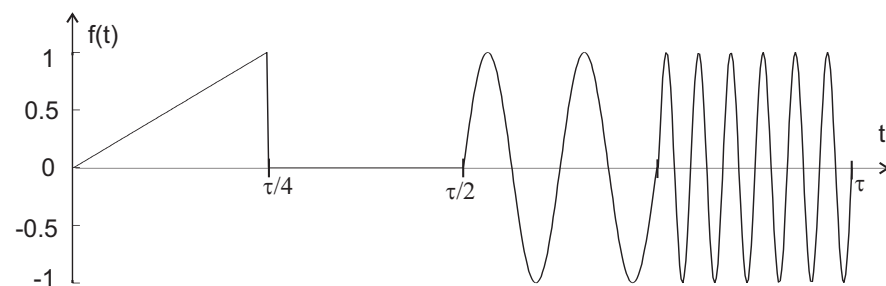
funkciu $\psi_{m,n}(t)$ potom nazývame *dyadický wavelet* a vzťahmi (WF):

$$f(t) = \sum_m \sum_n d_{m,n} \tilde{\psi}_{m,n}(t) \quad d_{m,n} = \langle f(t), \psi_{m,n}(t) \rangle \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

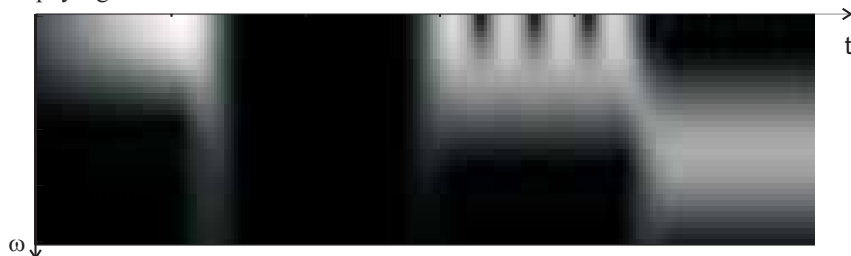
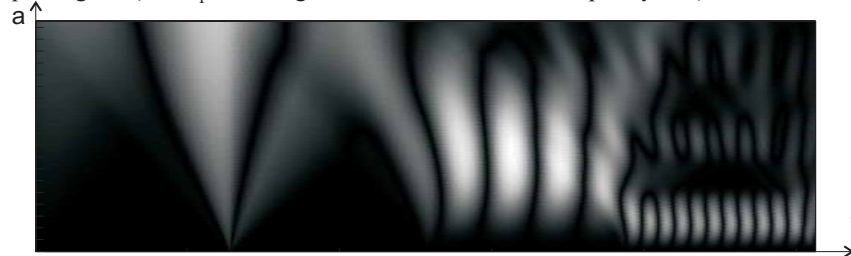
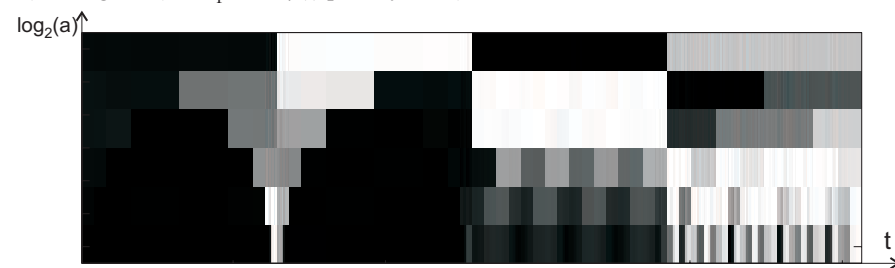
sú definované *waveletové rady (WR)*.



Poloha bázových funkcí(odvozených od Db2) v dyadických waveletových radoch



a) vstupný signál

b) spektrogram (STFT_f , Hanningovo okno, veľkosť okna 50, prekryv 48)c) škálogram (SWT_f , ako $\psi(t)$ použitý Db2)d) diskrétny škálogram (WR_f , ako $\psi(t)$ použitý Db2)

Ortogonalita, biortogonalita a semiortogonalita

Pre ortonormálne wavelety platí $\tilde{\psi} \equiv \psi^*$ a

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m} \rangle = \delta(j-l)\delta(k-m) \quad j,k,l,m \in \mathbb{Z}$$

čo charakterizuje ortogonalitu v rovnakých úrovniach rozlíšenia a aj medzi rôznymi úrovňami.

Pár $(\psi, \tilde{\psi})$ spĺňa podmienku *biortogonalita* (hovoríme o *biortogonálnych waveletoch*), ak množiny $\{\psi_{m,n}\}$ a $\{\tilde{\psi}_{m,n}\}$ sú duálne bázy, spĺňajúce podmienku biortogonalita:

$$\langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{l,m} \rangle = \delta(j-l)\delta(k-m) \quad j,k,l,m \in \mathbb{Z}$$

Wavelet $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ $j,k,l,m \in \mathbb{Z}$ sa nazýva *semiortogonálny* (nazývaný aj pre-wavelet), ak platí:

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m} \rangle = \delta(j-l) \quad j,k,l,m \in \mathbb{Z}$$

t.j. je zachovaná ortogonalita len medzi rôznymi úrovňami rozlíšenia.

Prechod k analýze viacúrovňovým rozlíšením (MultiResolution Analysis - MRA)

Označme :

$$W_m = L(\{\psi_{m,n}\}, n \in \mathbb{Z})$$

$$\tilde{W}_m = L(\{\tilde{\psi}_{m,n}\}, n \in \mathbb{Z})$$

$L^2(\mathbb{R})$ potom môžeme vyjadriť ako priamu sumu podpriestorov W_m resp. $\tilde{W}_m$:

$$L^2(\mathbb{R}) = \dots \oplus W_1 \oplus W_0 \oplus W_{-1} \oplus \dots$$

$$L^2(\mathbb{R}) = \dots \oplus \tilde{W}_1 \oplus \tilde{W}_0 \oplus \tilde{W}_{-1} \oplus \dots$$

Ako odstrániť nekonečné sumy pri reprezentácii resp. aproximácii signálu ???