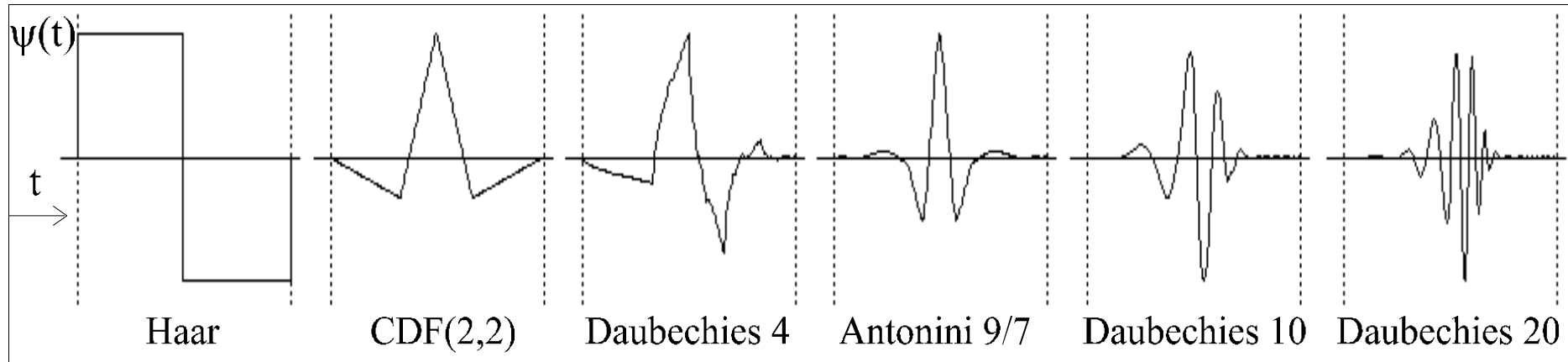


Wavelet, čo to je?

(fr. ondelette = vlnka, angl. wavelet)

→ predstavte si ho ako vlnový balík
(= v praxi je to čosi medzi dirakovým impulzom a vlnou)



Waveletová transformácia

→ funkcie, pomocou ktorých signál transformujeme a potom spätne skladáme sú „vlnky“

Reprezentácia signálov

→ poznáte reprezentáciu signálov v čase, vo frekvencii (FT)

→ wavelety umožňujú flexibilnú a cieleňú reprezentáciu niekde medzi.

Histórické korene

- Prvý "wavelet" skonštruoval I.Haar v r. 1910 pri konštrukcii alternatívneho ortonormálneho systému k Fourierovmu
- teórie Littlewood-Paleyho, **harmonická analýza**, atomická dekompozícia a **teória rámcov**
- Objavenie tesných vzťahov medzi **bankami filtrov** a waveletovými bázami. - S.Mallat, 1985

Aplikácie waveletov

- Analýza signálov (spojitých, disktrétnych, fyzikálne veličiny, zvuk, obraz, ...)
- Filtrácia (napr. kôli odstraňovaniu šumu, ...)
- Kompresia (obraz, zvuk, video)
- Počítačová grafika (interpolácie, aproximácie, vyhladzovanie, modelovanie ...)
- ...

Demo MATLABU

Praktický postup

A) Lineárna algebra ➔ Hilbertove priestory ➔ Signály v čase a frekvencii

B) Fourierova analýza (spojitá, diskrétna) ➔ Signály v čase a frekvencii

A) Hilbertove priestory a rozklady signálov

Definícia 1.1: *Vektorový priestor* E nad komplexnými C alebo reálnymi číslami R je množina vektorov E spolu s operáciou sčítania a skalárneho násobenia, pre ktoré $(E, +, \cdot)$ je *lineárny priestor* nad poľom C alebo R .

Definícia 1.2: *Podpriestor vektorového priestoru* E je taká podmnožina $M \subset E$, pre ktorú platí:

$$1) \forall x, y \in M; x + y \in M$$

$$2) \forall x \in M \text{ a pre } \alpha \in C \text{ alebo } \alpha \in R \text{ platí, že } \alpha x \in M$$

M je *uzavretý*, ak obsahuje aj všetky limity ľubovoľných postupností vektorov z M .

Definícia 1.3: *Lineárny obal* $L(M)$ množiny $M \subset E$ s prvkami x_i je *podpriestorom* E a platí

$$L(M) = \left\{ \sum_i \alpha_i x_i; \alpha_i \in C \text{ alebo } R, x_i \in M \right\}$$

Definícia 1.4: *Bázou* vektorového priestoru E nazývame neprázdnu podmnožinu $B \subset E$ práve vtedy, ak $L(B) = E$ a B je množina lineárne nezávislých vektorov.

Definícia 1.5: *Hilbertov priestor* E je vektorový priestor E , ktorý je *kompletný* (obsahuje aj všetky limity ľubovoľných postupností vektorov z E) a na ktorom je definovaný *skalárny súčin* ktorý označujeme $\langle \cdot, \cdot \rangle$

Definícia 1.6: *Veľkosť vektora* x (označujeme $\|x\|$) je v Hilbertových priestoroch daná skalárnym súčinom $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Definícia 1.7: Nech $M_1 = \{x_i\}$ a $M_2 = \{y_j\}$ sú podpriestory Hilbertovho priestoru E :

- a) x_i a y_j sú *ortogonálne* ($x_i \perp y_j$) ak $\langle x_i, y_j \rangle = 0$
- b) x_i a M_2 sú *ortogonálne* ($x_i \perp M_2$) ak $\forall y_j; \langle x_i, y_j \rangle = 0$
- c) M_1 a M_2 sú *ortogonálne* ($M_1 \perp M_2$) ak $\forall x_i, \forall y_j; \langle x_i, y_j \rangle = 0$

Definícia 1.8: Nech M_i sú podpriestory Hilbertovho priestoru E . Ak každý vektor $x \in E$ môžeme jednoznačne vyjadriť v tvare $x = x_1 + x_2 + \dots + x_k$ pričom $x_i \in M_i$, potom E je *priamou sumou porpiestorov* M_i . Píšeme $E = M_1 \oplus M_1 \oplus \dots \oplus M_k$

Definícia 1.9: Nech M je podpriestor Hilbertovho priestoru E . Potom *ortogonálny doplnok* k M v E je množina $M^\perp = \{x \in E; x \perp M\}$.

Veta 1.1: Nech podpriestor $M \subset E$ je uzavretý. Potom pre daný vektor $z \in E$ existuje $x \in M$ a $y \in M^\perp$ také, že $z = x + y$. T.j. platí: $E = M \oplus M^\perp$.

Separabilné Hilbertove priestory

Komplexné / reálne priestory

Komplexný priestor C^n je množina všetkých n -tíc $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ s **konečnými hodnotami** x_i na množine C . *Skalárny súčin* je definovaný ako:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i^* \quad x, y \in C^n$$

Analogická definícia platí aj pre R^n . Kvôli jednoznačnosti budeme používať aj klasickú notáciu $\bar{x} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T$.

Priestor $l^2(Z)$

Vektormi x v priestore $l^2(Z)$ sú sekvencie $x(n) \in C$, $n \in Z$, s konečnou energiou $\|x\| < \infty$. Zvyčajne reprezentujú signály diskkrétne v čase. *Skalárny súčin* je definovaný ako:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) y(n)^* \quad x, y \in l_2(Z)$$

Priestor $L^2(R)$

Vektormi x v priestore $L^2(R)$ sú funkcie $x(t) \in C$, $t \in R$, ktoré sú po štvorcoch integrovateľné, t.j. $\|x\| < \infty$. *Skalárny súčin* je definovaný ako:

$$\langle x, y \rangle = \int_{t \in R} x(t) y(t)^* dt \quad x, y \in L_2(R)$$

Pozn.: Analogicky pre funkcie n premenných môžeme definovať priestory $L_2(R^n)$

Ortonormálne bázy

Množina $B = \{x_i\}$ je *ortonormálny systém* ak

$$\forall x_i, x_j \in M_1; \quad \langle x_i, x_j \rangle = \delta(i - j)$$

$B = \{x_i\}$ je bázou priestoru E , ak všetky $y \in E$ môžeme vyjadriť

$$y = \sum_k \alpha_k x_k$$

kde α_k sú *spektrálne koeficienty*

$$\alpha_k = \langle x_k, y \rangle.$$

Pre takýto systém platí *Parsevalova rovnosť*

$$\|y\|^2 = \sum_i |\langle x_i, y \rangle|^2 \quad \forall y \in E$$

Analogické tvrdenia platia aj pre *ortogonálne systémy*, vo vzťahoch je iba pridaná normalizačná konštanta.

Biortogonálne bázy

Nech množiny $B = \{x_i\}$ a $\tilde{B} = \{\tilde{x}_i\}$ sú bázami priestoru E . Tieto bázy sú navzájom *duálne* resp. *biortogonálne*, ak:

a) ich bázové vektory sú *navzájom ortogonálne*, t. j. *biortogonálne*:

$$\forall i, j \in Z ; \quad \langle x_i, \tilde{x}_j \rangle = \delta(i - j)$$

b) existujú kladné konečné konštanty $C, D, \tilde{C}, \tilde{D}$, že pre $\forall y \in E$ platí:

$$C\|y\|^2 \leq \sum_k |\langle x_k, y \rangle|^2 \leq D\|y\|^2 \quad \tilde{C}\|y\|^2 \leq \sum_k |\langle \tilde{x}_k, y \rangle|^2 \leq \tilde{D}\|y\|^2$$

Potom signál $y \in E$ môžeme vyjadriť ako

$$y = \sum_k \langle x_k, y \rangle \tilde{x}_k = \sum_k \langle \tilde{x}_k, y \rangle x_k$$

Parsevalova rovnosť má tvar:

$$\|y\|^2 = \sum_i \langle x_i, y \rangle^* \langle \tilde{x}_i, y \rangle \quad \forall y \in E$$

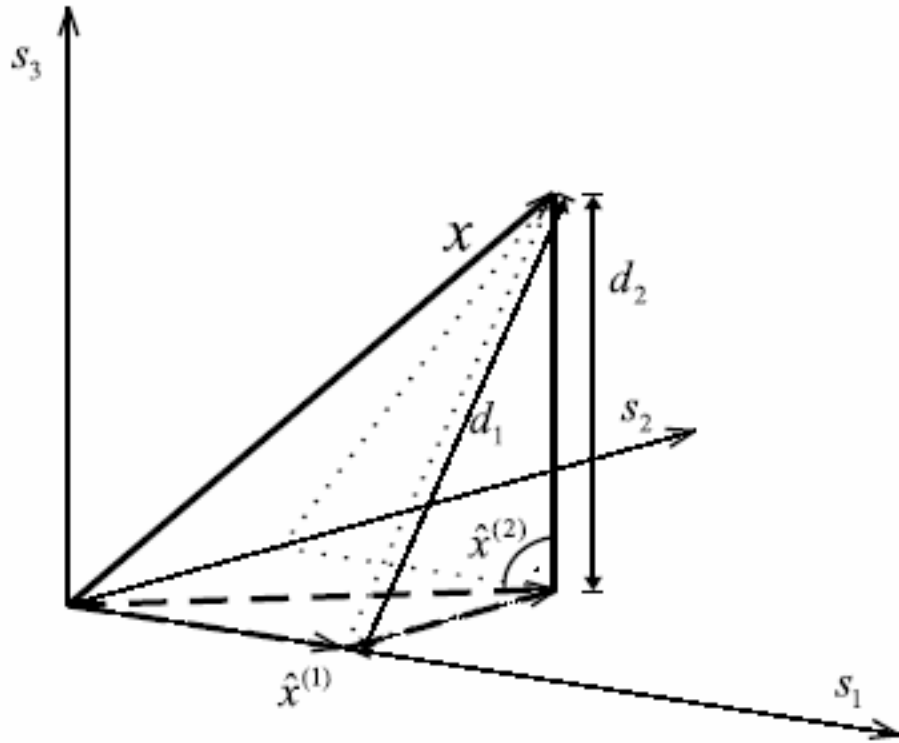
Ortogonalná projekcia a aproximácia signálu

Definícia: *Ortogonalná projekcia(priemet)* vektora x do vektora s je zložka vektora x v smere vektora s nazývaná x_s s veľkosťou:

$$\|x_s\| = \langle x, s \rangle / \|s\|^2 = x_{s_1} s.$$

Skalár x_{s_1} nazývame *súradnicou vektora x vo vektore s* .

Aproximujme $x \in E$ v uzavretom podpriestore S_k s bázou $S_k = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$.



Projekcia vektora $x \in R^3$ do podpriestoru $S_2 \subset R^3$ daného ako $L(\{s_1, s_2\})$.

Označme ortogonálnu projekciu $x \in E$ do S_k ako $\hat{x}^{(k)}$.

Platí $(x - \hat{x}) \perp S_k$ a zároveň

$$\|x - \hat{x}\| = \min \|x - s\| \quad \forall s \in S_k$$

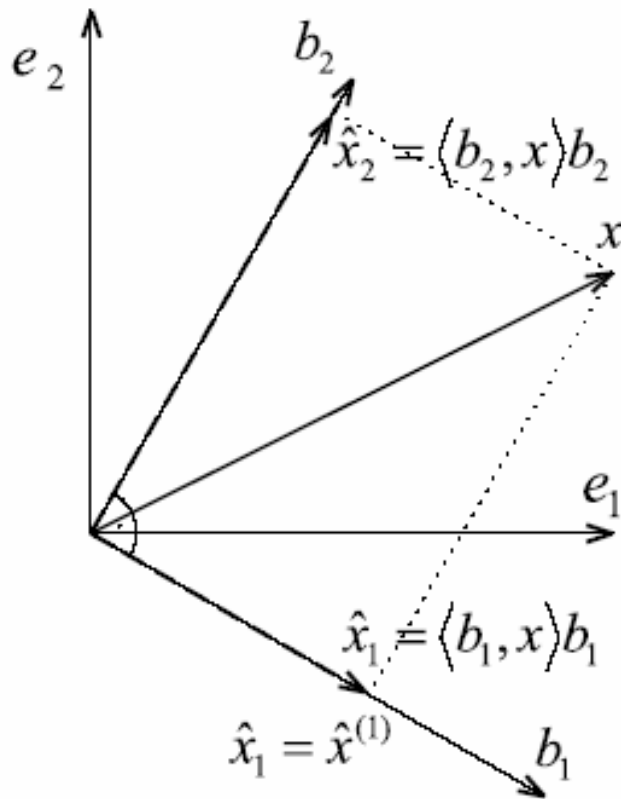
T.j. aproximácia ortogonálnou projekciou je najlepšia v zmysle *najmenších štvorcov*.

Postupná aproximácia:

- A) Nech S_k je *ortonormálna* báza S_k . Označme ortogonálnu projekciu $x \in E$ do S ako $\hat{x}^{(k)} = \sum_i \langle s_i, x \rangle s_i$. Keďže s_i sú vzájomne ortogonálne (stačí aby báza S_k bola ortogonálna), zachováva sa vlastnosť najlepšej aproximácie v zmysle najmenších štvorcov. *Platí vlastnosť postupnej aproximácie*, t.j.:

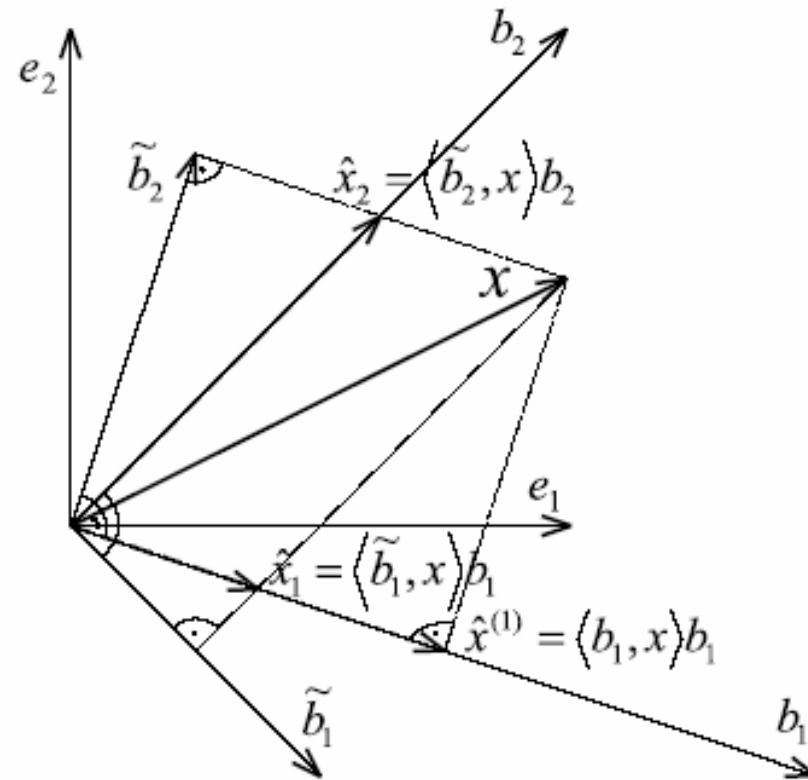
$$\hat{s}^{(k+1)} = \hat{s}^{(k)} + \langle s_{k+1}, x \rangle s_{k+1} .$$

- B) Keď S_k , báza S_k nie je ortogonálna, *neplatí vlastnosť postupnej aproximácie*, t.j. aproximáciu v S_{k-1} nemôžeme priamo použiť, je nutné celú aproximáciu prepočítať znovu.



a) Ortonormálna báza B

$$B = \{b_1, b_2\} = \{(1.5, -0.5), (1, 1)\}$$



b) B je neortogonálna

$$B = \{b_1, b_2\} = \left\{ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0.5 \right), \left(0.5, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\}$$

$$\tilde{B} = \{\tilde{b}_1, \tilde{b}_2\} = \{(0.5, -0.5), (0.25, 0.75)\}$$

Príklad reprezentácie signálu v $x = \{1, 0.5\}$ v $E = \mathbb{R}^2$ v báze B : a) B je ortonormálna b) B je neortogonálna

Zmena súradníc pri prechode k inej báze v C^n .

Nech $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ a $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ sú bázy Hilbertovho priestoru C^n . Prepísaním do maticovej notácie dostaneme *štvorcové matice* hodnosti n :

$$\mathbf{A} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n) \quad \mathbf{B} = (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_n)$$

kde, $\bar{a}_i = a_i^T$ a $\bar{b}_i = b_i^T$ sú stĺpcové vektory.

Definícia: Každý vektor z bázy B môžeme jednoznačne vyjadriť ako lineárnu kombináciu vektorov bázy A , t.j. platí $B = AP_{AB}$. Maticu P_{AB} nazývame *maticou prechodu* od bázy A k báze B .

Analogicky označme P_{BA} maticu prechodu od B k A . Potom platí:

$$P_{BA} = P_{AB}^{-1}.$$

Veta: Nech $\bar{x} \in C^n$ má v báze A súradnice $\bar{x}(A) = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ a v B súradnice $\bar{x}(B) = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$. Potom platí:

$$\bar{x}(B) = P_{AB}^{-1} \bar{x}(A) = P_{BA} \bar{x}(A).$$

V praxi sú naše vstupné vektory reprezentáciou diskretných signálov v **čase**. Potom:

$$A = I \quad P_{AB} = I_n^{-1} B = B$$

, kde I je jednotková matica.

Doprednou transformáciou signálu $x(n) = x(I) = \bar{x} \in C^n$ potom budeme rozumieť zmenu vektora $\bar{x}$ na vektor $\bar{y} = \bar{x}(B)$. Označme $T = P_{IB}^{-1} = B^{-1}$:

$$\bar{y} = T\bar{x}$$

T je *transformačná matica*, vektor $\bar{y}$ predstavuje *spektrum*, jeho zložky y_i sú *spektrálne koeficienty*,

Signál $\bar{x}$ *rekonštruujeme (spätnou transformáciou)*:

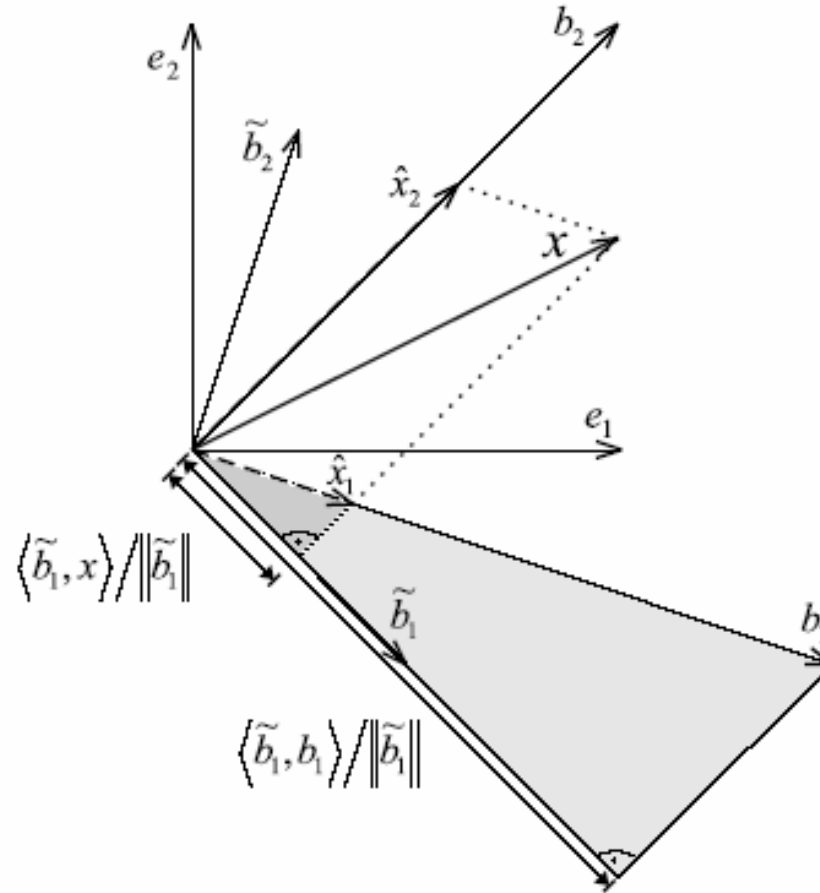
$$\bar{x} = T^{-1}\bar{y} = B\bar{y} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \bar{a}_1 y_1 + \bar{a}_2 y_2 + \dots + \bar{a}_n y_n$$

A) Pre ortonormálne bázy $B = \{b_i\}$,

platí $T^{-1} = B \quad T = B^{-1} = B^{*T}$

B) Všeobecný prípad: riadky matice $T = B^{-1} = B^{*T}$ predstavujú bazové vektory tzv. duálnej bázy $\tilde{B} = \{\tilde{b}_i\}$ „duálnej“ k $B = \{b_i\}$

platí $T^{-1} = B \quad T = \tilde{B}^T$



➔ Súradnice vektora $\bar{x}$ vo vektorovom priestore s bázou $B = \{b_i\}$, získame jeho ortogonálnou projekciou do vektorov bázy $\tilde{B} = \{\tilde{b}_i\}$ duálnej k báze B .

Rámce

Definícia: *Rámcom* vo vektorovom priestore E nazývame neprázdnu podmnožinu $B = \{\psi_i\}$, $B \subset E$ práve vtedy, ak $L(B) = E$ a $\forall f \in E$ existujú kladné konečné konštanty C, D také, že platí:

$$C\|f\|^2 \leq \sum_{m,n} \left| \langle f, \psi_{m,n} \rangle \right|^2 \leq D\|f\|^2$$

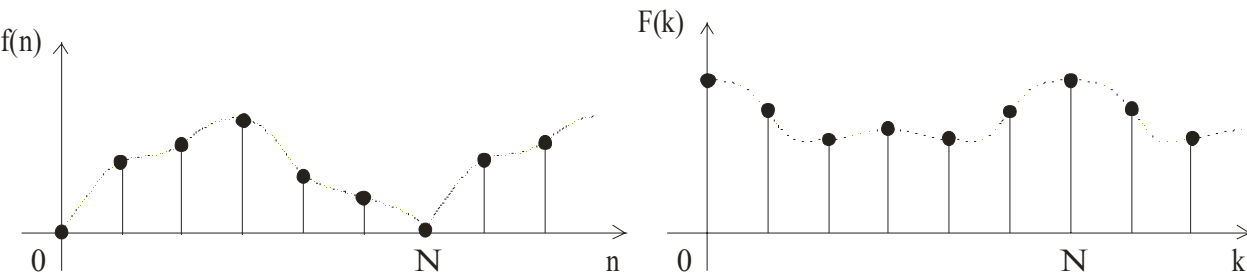
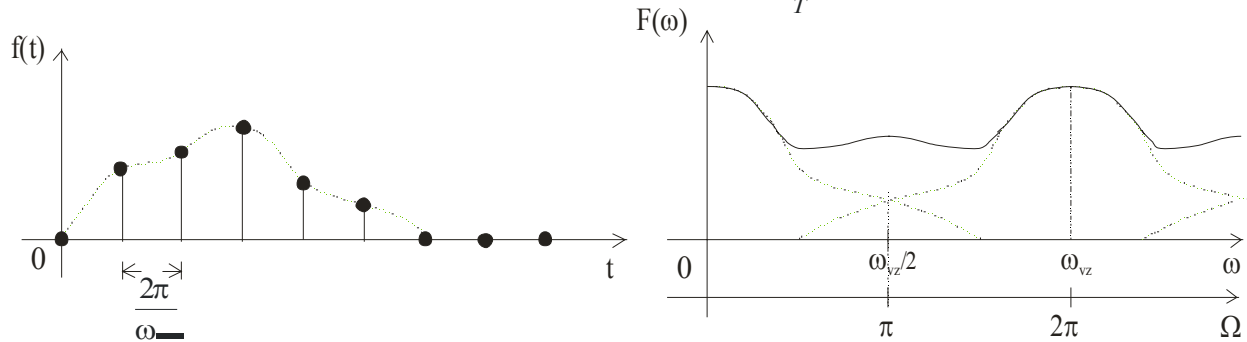
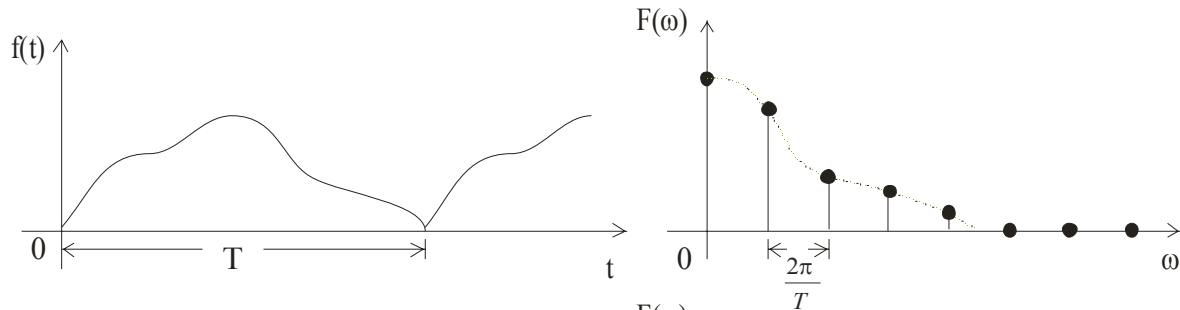
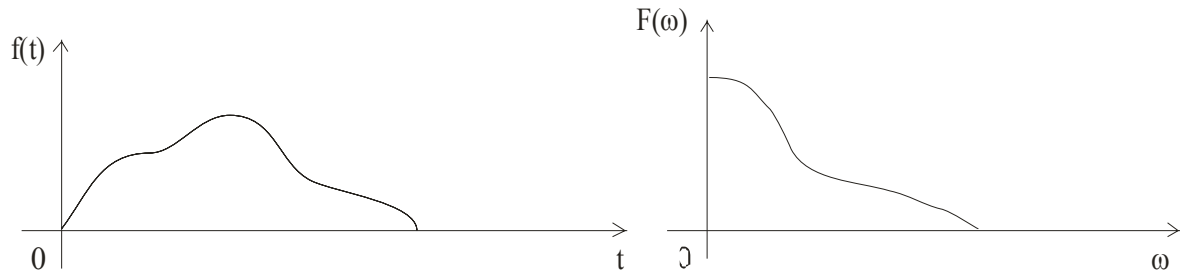
Rámce:

- nie su nutne lineárne nezávislé množiny
- reprezentácia vektoru pomocou rámcov môže byť redundantná a nejednoznačná
- ak $A = B$, rámec sa nazýva *tesný* a navyše ak $\|\psi_{m,n}\| = 1$, potom A udáva mieru redundancie rámca oproti báze (ak $A=2$, potrebujeme 2x viac vektorov na vyjadrenie f).
- ak $A = B = 1$, $\|\psi_{m,n}\| = 1$ rámec $\{\psi_{m,n}\}$ tvorí *ortonormálnu bázu* E

Základné pojmy

- Pod pojmom „*signál*“ rozumieme vektor v niektorom z *Hilbertových priestorov*.
- Signál zvyčajne predstavuje priebeh nejakej meniacej sa veličiny v *časovej oblasti*.
- *Transformáciou* signálu sa dostávame do tzv. *transformačnej oblasti*, kde je reprezentovaný tzv. *spektrom*.
- *Spektrum* je tvorené *spektrálnymi koeficientami* signálu.
- Najznámejšou transformačnou oblasťou je *Fourierovská*, kde je signál reprezentovaný *frekvenčným* spektrom.
- *Fourierova transformácia* rozkladá signál iba na frekvenčné zložky. Neposkytuje však informáciu, *kedy* signál vykazuje dané frekvenčné charakteristiky (jej bázové funkcie rovnomerne pokrývajú celú časovú os)

Fourierova transformácia a jej druhy



a) CTFT (Continuous Time Fourier Transform)

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

b) CTFS (Continuous Time Fourier Series)

$$F(k) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j2\pi kt/T} dt$$

$$f(t) = \sum_k F(k) e^{j2\pi kt/T}$$

c) DTFT (Discrete Time Fourier Transform)

$$F(\Omega) = \sum_n f(n) e^{-j\Omega n} \quad \Omega = 2\pi\omega / \omega_{vz}$$

$$f(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

d) DTFS (Discrete Time Fourier Series)

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-j2\pi nk/N} = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) W_N^{-nk}$$

$$f(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k) e^{j2\pi nk/N} = \sum_{k=0}^{N-1} F(k) W_N^{nk}$$

$$W_N = e^{j2\pi/N}$$

Reprezentácia signálu v čase a frekvencii

Pri analýze a reprezentácii signálov je častokrát výhodné použiť transformáciu, ktorá reprezentuje signál súčasne v čase aj frekvencii.

- Riešenie vo forme oknovej *STFT (Short Time Fourier Transform)*, Gábor (1946), posúva okno fixnej veľkosti pozdĺž signálu a extrahuje frekvenčný obsah v danom intervale

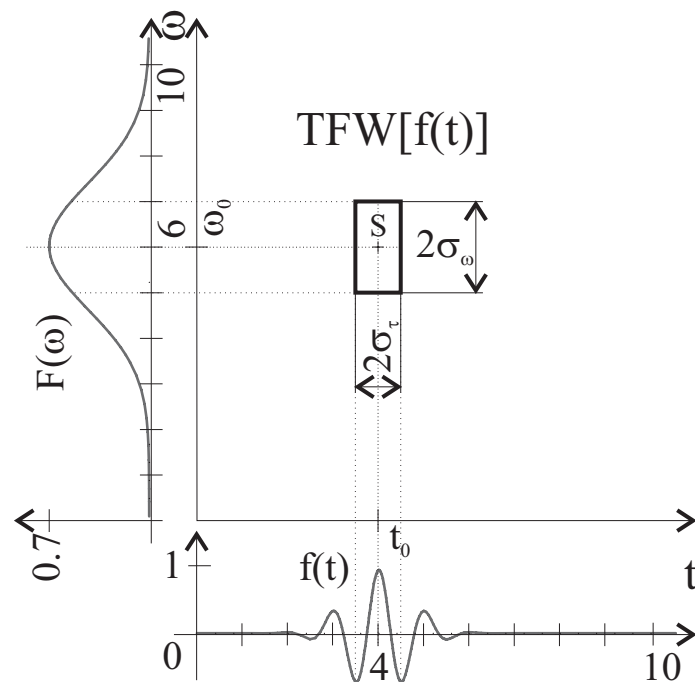
$$F(\omega, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t - \tau)e^{-j\omega t} dt = \left\langle f(t)g(t - \tau), e^{j\omega t} \right\rangle$$

,kde $g(t)$ je oknová funkcia a $f(t)$ vstupná funkcia. Ak oknová funkcia je gaussovská funkcia, tak STFT sa volá *Gáborova transformácia*.

Pre STFT platí:

- Bázové funkcie sú generované *moduláciou* a *posunom* oknovej (prototypovej) funkcie $g(t)$.
- STFT má pre danú oknovú funkciu *pevné rozlíšenie vo frekvencii*.

Každý signál môže byť znázornený v *časovo-frekvenčnej rovine (TF rovina)*, ktorá charakterizuje rozdelenie napr. energie signálu v čase a frekvencii:



$$x(t) = e^{-(t-4)^2} \cos(6(t-4))$$

Rozlíšenie v čase a frekvencii pre danú funkciu $x(t)$ a jej fourierovu transformáciu $X(\omega)$ je dané *časovo – frekvenčným oknom (TF okno)*. Jeho stred je v bode $S = (t_0, \omega_0)$, a veľkosti strán sú $2\sigma_t, 2\sigma_\omega$. Platí:

$$t_0 = \|x(t)\|^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} t |x(t)|^2 dt \quad \omega_0 = \|X(\omega)\|^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \omega |X(\omega)|^2 d\omega \quad (1.\text{moment})$$

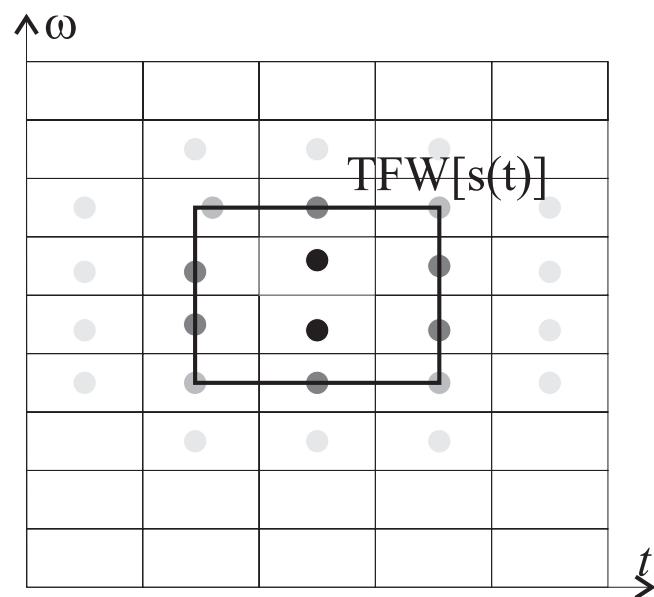
$$\sigma_t^2 = \|x(t)\|^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} (t - t_0)^2 |x(t)|^2 dt \quad \sigma_\omega^2 = \|X(\omega)\|^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_0)^2 |X(\omega)|^2 d\omega \quad (2.\text{moment})$$

Pozn: Rôzne τ, ω pri STFT zodpovedajú posunom základného TF okna v čase a frekvencii

➔ TF okno nám hovorí o tom aké drobné detaily sme schopní v signále sledovať.

➔ Hranice okna sú definované “štatisticky”, t.j. neznamená to, že mimo okna má signal nulové hodnoty

TF okno signálu a jeho význam pri určovaní hodnôt signálu v čase a frekvencii

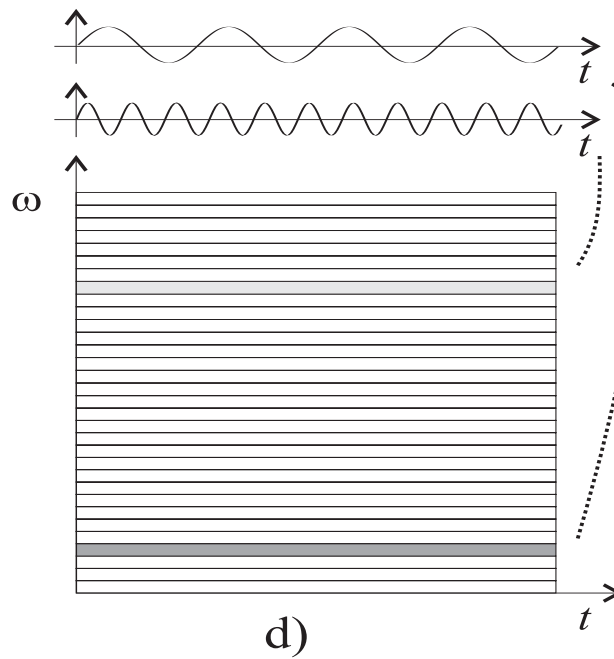
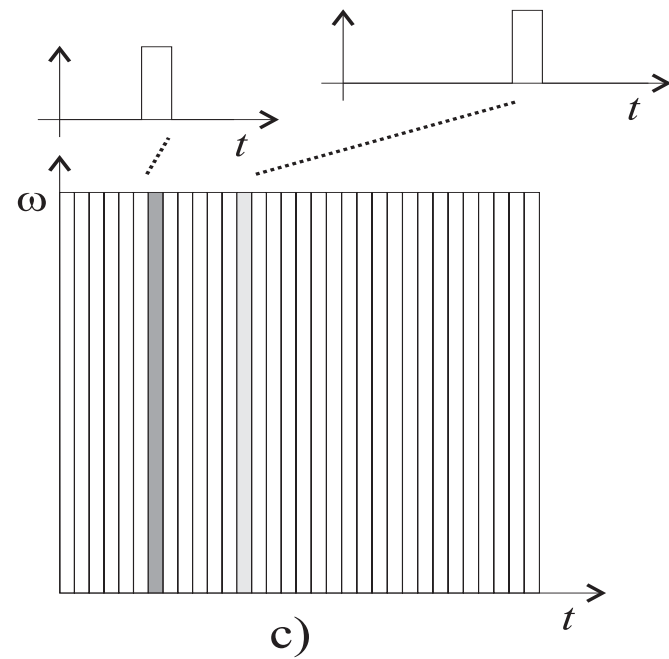
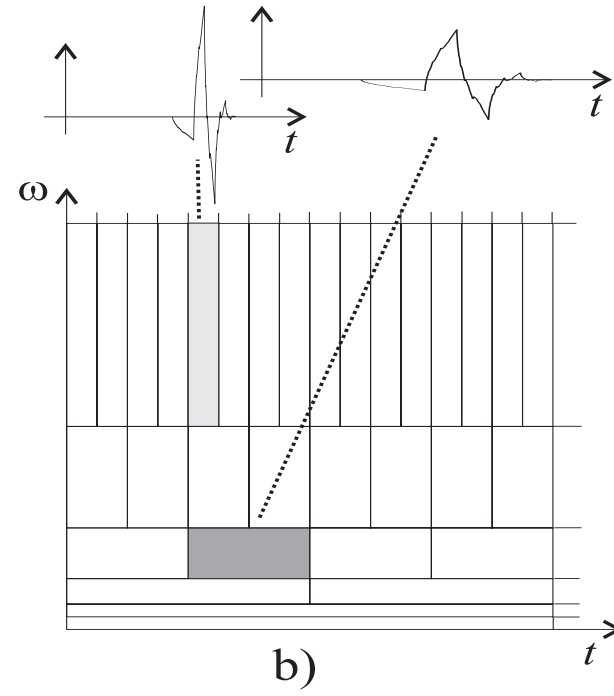
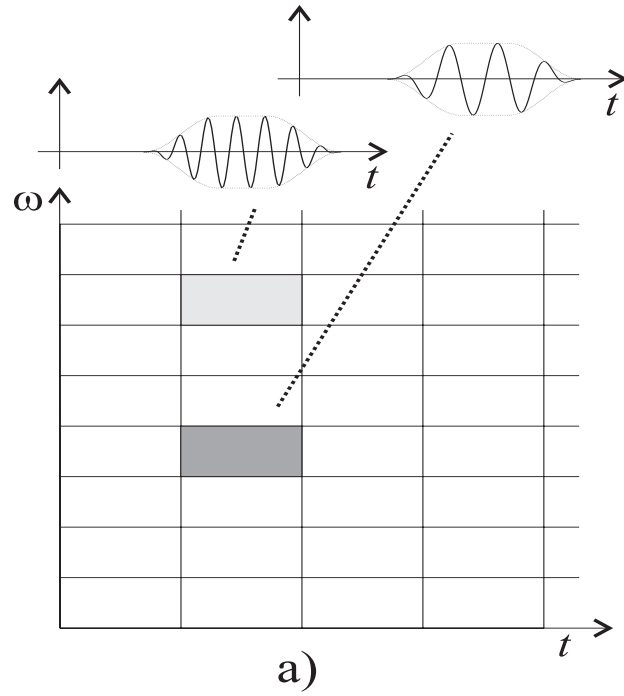


Princíp neurčitosti:

Pre $x(t)$ idúce k nule rýchlejšie ako $1/\sqrt{t}$ ak $t \rightarrow \pm\infty$ platí:

$$\sigma_t^2 \cdot \sigma_\omega^2 \geq 1/4$$

Najznámejšie príklady delenia TF roviny pri reprezentácii signálov(znázornené schématicky)



Spektrogram signálu = pohľad na TF rovinu so zobrazenými magnitúdami spektrálnych koeficientov STFT(!) v strede TF okien odpovedajúcich bázových funkcií

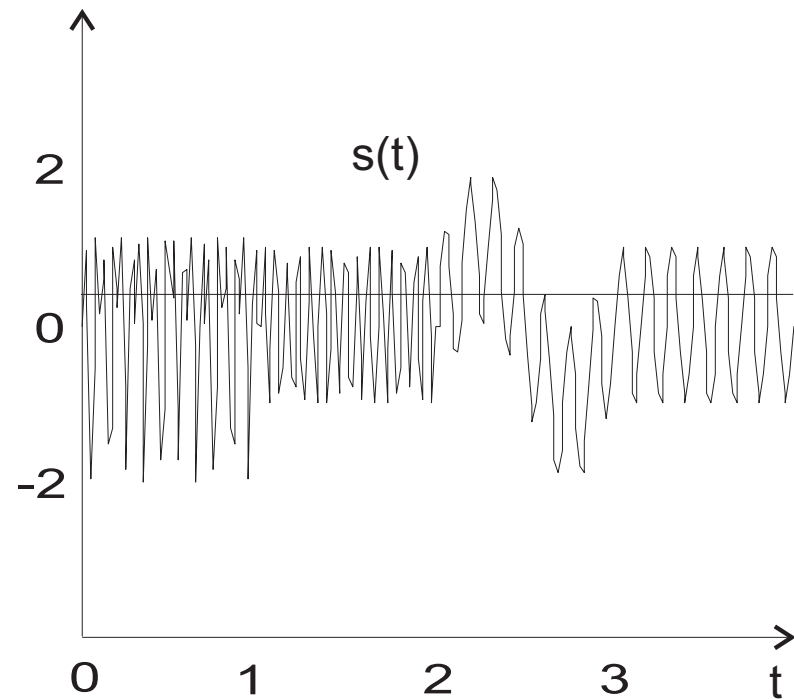
a) Signál zložený zo 4 častí

1) $2\sin(5t)\sin(15t)$

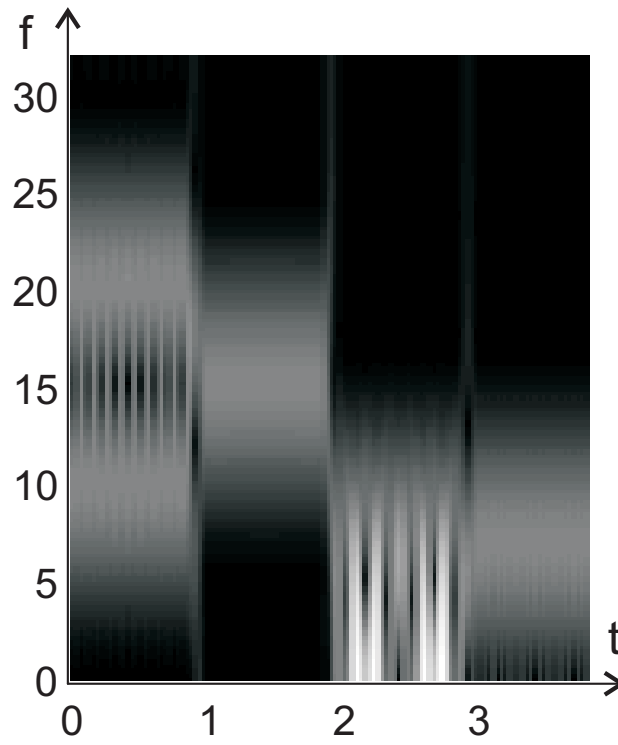
2) $\sin(15t)$

3) $\sin(t) + \sin(7t)$

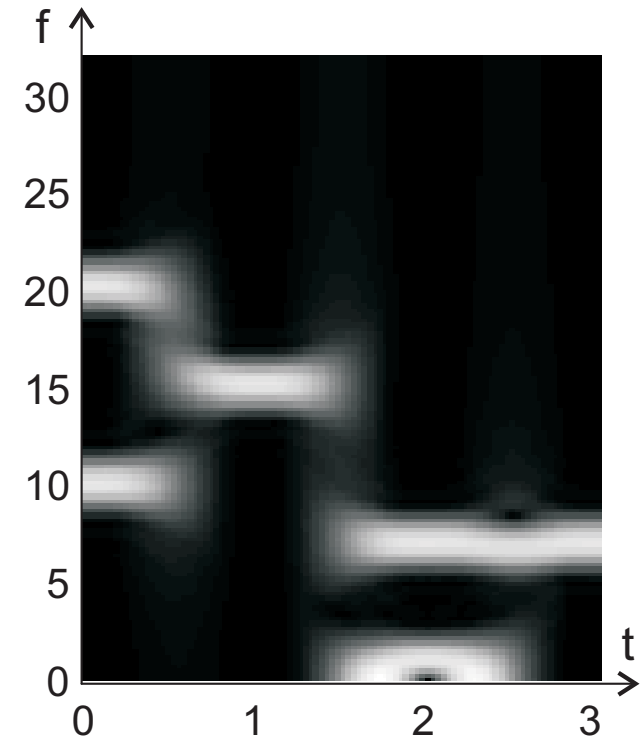
4) $\sin(7t)$



a)



b)



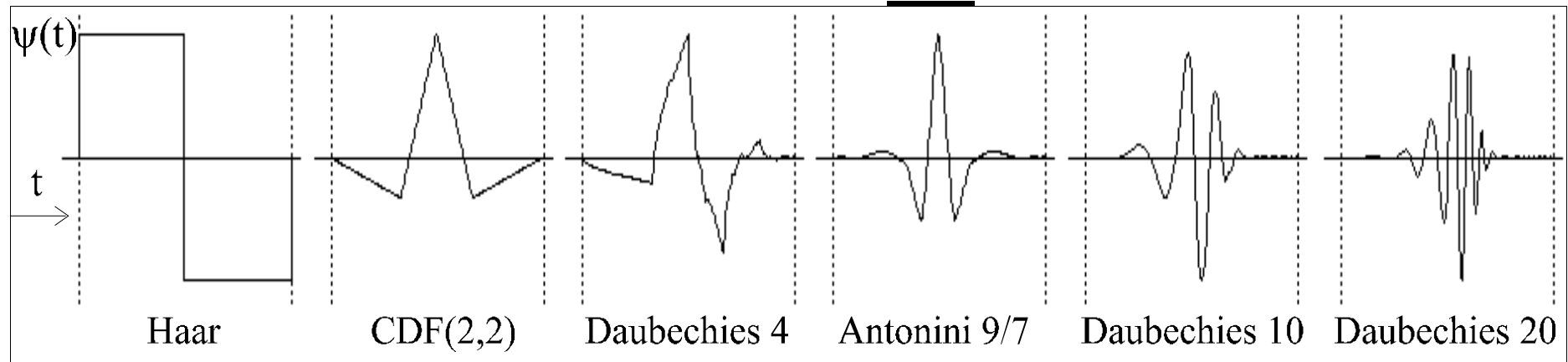
c)

Diskrétna aproximácia spektrogramov (signál s je navzorkovaný, $f_{vz} = 64\text{Hz}$)

b) spektrogram signálu a): Hanningovo okno veľkosti 12, prekryv okien 10

c) spektrogram signálu a): Hanningovo okno veľkosti 60, prekryv okien 58

Waveletová transformácia (WT) má oproti STFT funkcie formované iba zmenou mierky a posunom prototypovej funkcie (základného waveletu) $\psi(t)$



Príklady rôznych druhov základných waveletov

Príklady základných biortogonalných spline waveletov ($\psi(t)$ zelené, $\tilde{\psi}(t)$ červené)

