Opakovanie:

Veta2: K danému kauzálnemu FIR filtru $\widetilde{H}(z)$ existuje komplementárny filter $\widetilde{G}(z)$ vtedy a len vtedy, ak polyfázové komponenty $\widetilde{H}(z)$ sú nesúdeliteľné.

Dôkaz2: Nutná a postačujúca podmienka na úplnú rekonštrukciu FB je aby determinant ich polyfázovej matice $\widetilde{\mathbf{F}}_p(z)$ bol ***mononóm***. Nesúdeliteľnosť $\widetilde{H}_e(z)$ a $\widetilde{H}_o(z)$ je nutná, ináč by sa ich spoločný faktor vyskytoval v determinante. Postačujúcosť vyplýva s Euklidovho algoritmu:

> Ak máme nesúdeliteľné polynómy *a(z)* a *b(z),* potom *a(z)p(z) +b(z)q(z)=c(z)* má jednoznačné riešenie. Voľbou $c(z)=z^{-k}$ získané riešenie {*p(z), q(z)*} predstavuje polyfázové komponenty $\widetilde{G}(z)$.

<u>Príklad:</u> Uvažujme filter $\widetilde{H}(z)=\left(1+z^{-1}\right)^4=1+4z^{-1}+6z^{-2}+4z^{-3}+z^{-4}$. Zistite, či k nemu existuje komplementárny filter a ak áno nájdite ho pri $\det\left(\widetilde{\mathbf{F}}_p(z)\right)=z^{-1}$.

<u>Riešenie:</u> na základe príkladu pri NSD vieme že polyfázové komponenty $\widetilde{H}(z)$ sú nesúdeliteľné. Aby sme našli komplementárny filter hľadáme riešenie rovnice

$\det\left(\widetilde{\mathbf{F}}_p(z)\right)=\widetilde{H}_e(z)\widetilde{G}_o(z)-\widetilde{H}_o(z)\widetilde{G}_e(z)=z^{-1}$ pre $\widetilde{H}_e(z)=1+6z^{-1}+z^{-2}$ a $\widetilde{H}_o(z)=4+4z^{-1}$ v tvare $\widetilde{G}_o(z)=a$ $\widetilde{G}_e(z)=b\left(1+z^{-1}\right)$. Riešením sústavy rovníc je *a=1/4, b=1/16*, t.j. $\widetilde{G}(z)=\left(1+4z^{-1}+z^{-2}\right)/16$.

Lifting schéma

- Lifting schéma umožňuje jednoducho zlepšiť špecifické vlastností danej WT – odiaľ názov „*lifting*“

- Jednoducho opisuje závislosti medzi pármi filtrov, ktoré zdieľajú ten istý HP, resp. DP filter. Takto môžeme začať z triviálneho prípadu "lenivého" waveletu a postupne vybudovať pár filtrov s požadovanými vlastnosťami, t.j. postupujeme podľa tzv. *Lifting schémy*

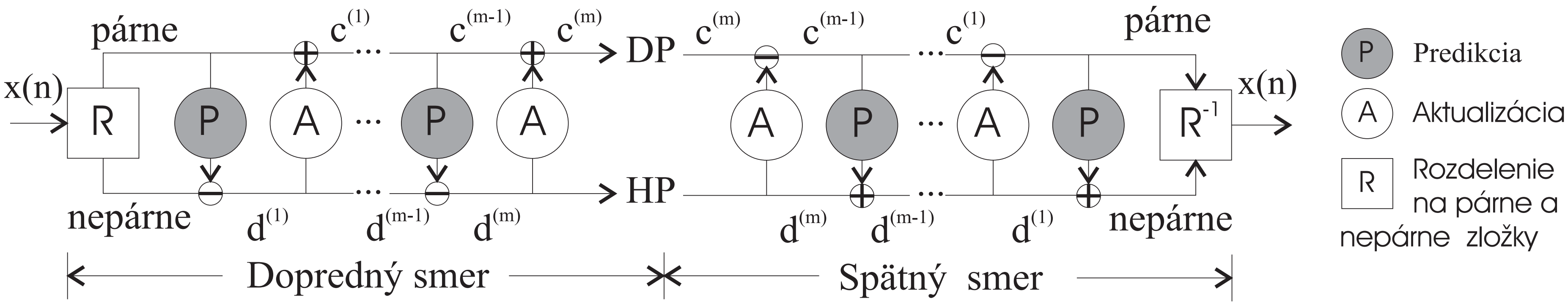
- Umožnuje efektívne realizovať klasické WT s nasledovnými výhodami:
    - urýchlenie implementácie WT (napr. v 1D prípade až dvojnásobne)
    - možnosť vykonať výpočty bez použitia prídavnej pamäte (t.j. "in-place")
    - jednoduchý dizajn vlastných WT (naviac so zaručenej invertovateľnosťou)

- Umožnuje jednoducho rozširovať klasickú WT, zaujímavé su napr.
    - konštrukcia nelineárnych WT (napr. adaptívnych, celočíselných)
    - použitie WT pre nerovnomerne navzorkované signály
    - konštrukcia WT na intervaloch, krivkách, povrchoch

Konštrukcia lifting schémy je založená na koncepte polyfázového rozkladu bánk filtrov:

- každú FB, môžme rozložiť (faktorizovať jej filtre) na jednoducho invertovateľnú postupnosť krokov
- Tieto kroky tvoria v algoritme priečkovú štruktúru, ktorú môžme interpretovať ako postupnosť *predikcií* a *aktualizácií* dvoch množín v obraze až po ich vzájomnú dekoreláciu

Principiálne môžeme waveletovú transformáciu implementovanú lifting schémou prekresliť podľa nasledovného obrázku. Sú vyznačené základné bloky lifting schémy: *rozdelenie, predikcia* a *aktualizácia*:



- cieľom predikcie je získanie čo najmenších hodnôt v HP časti po doprednej transformácii.
- aktualizáciou sa snažíme zachovať v DP časti čo najviac vlastností pôvodného obrazu, čo sa stáva dôležitým najmä pri rekurzii v DP časti (aby bola predikcia aj naďalej účinná)

Príklad A: Lenivý wavelet

Aké vlastnosti má naše spektrum?

Vstupný signál je jednoducho podvzorkovaný, takže máme najhorší možný aliasing. Charakter oboch zložiek signálu je rovnaký.

Príklad B: Haarov wavelet

V DP časti chceme dostať priemer susedných koeficientov, v HP časti zase rozdiel. Ak je teda funkcia po častiach konštantná dostávame v HP časti nulové koeficienty.

1) Signál si rozdelíme na párne a nepárne časti:

$$c^{(0)}(n) = x(2n) \qquad d^{(0)}(n) = x(2n+1)$$

2) Aktualizujeme priemer (nenormovaný):

$$c^{(1)}(n) = c^{(0)}(n) + d^{(0)}(n)$$

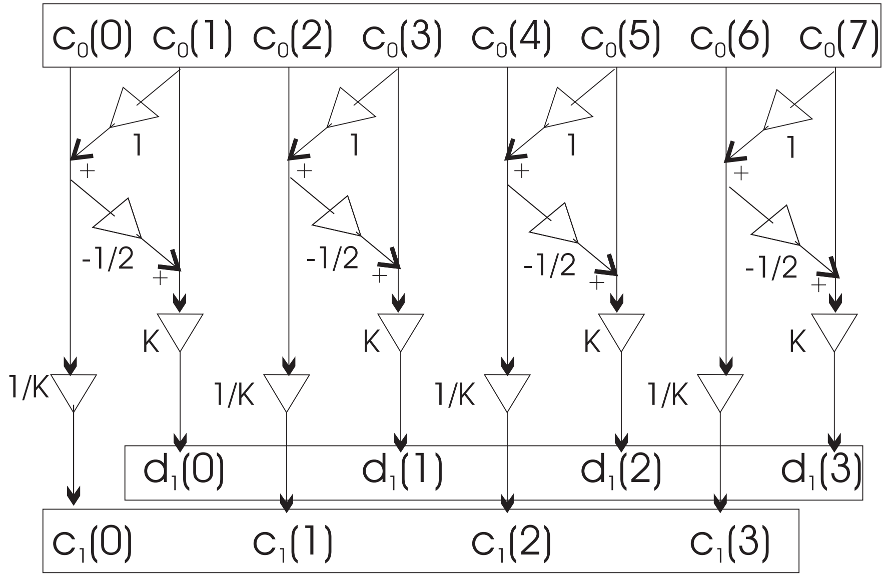
3) Predikujeme HP časť:

$$d^{(1)}(n) = d^{(0)}(n) - 0.5c^{(0)}(n)$$

4)Normalizujeme ($K = \sqrt{2}$):

$$d(n) = Kd^{(1)}(n) = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\left(x(2n) - x(2n+1)\right)$$

$$c(n) = \tfrac{1}{K}c^{(1)}(n) = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\left(x(2n) + x(2n+1)\right)$$



Príklad C: CDF 2,2 wavelet

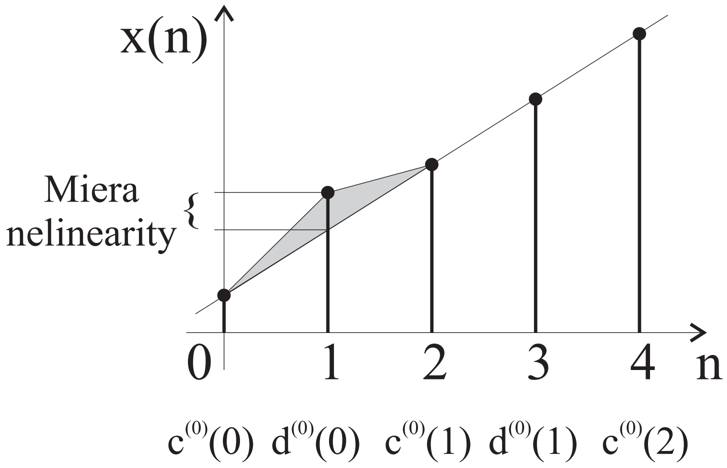
Čo ak chceme reprodukovať po častiach lineárme funkcie?

1) Najprv si rozdelíme signál na párne a nepárne časti:

$$c^{(0)}(n) = x(2n) \qquad d^{(0)}(n) = x(2n+1)$$

2) Waveletové koeficienty nám vtedy určujú mieru, ako sa náš signál líši od lineárneho:

$$d^{(1)}(n) = d^{(0)}(n) - \tfrac{1}{2}\left[c^{(0)}(n) + c^{(0)}(n+1)\right]$$



3) V DP časti chceme zachovať aspoň priemer, t.j. jednosmernú zložku signálu. Hľadáme riešenie v tvare:

$$c^{(1)}(n) = c^{(0)}(n) + A\left[d^{(1)}(n) + d^{(1)}(n-1)\right]$$

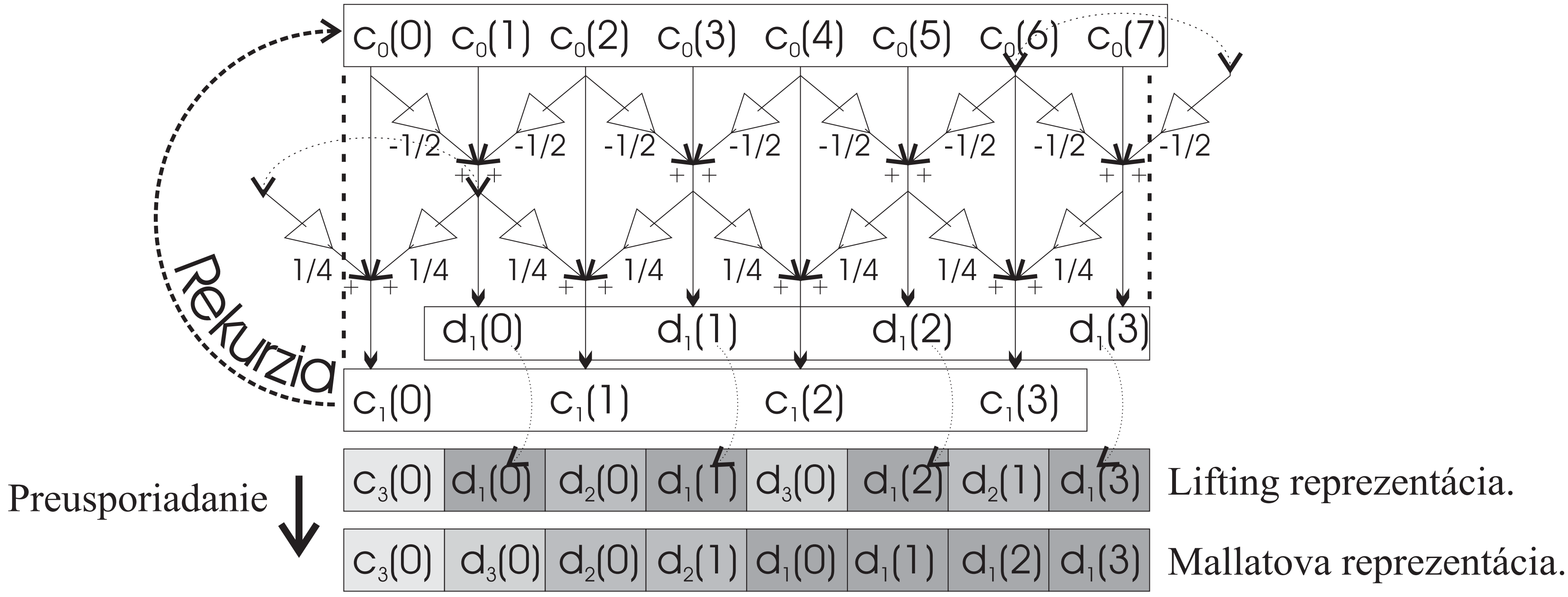
Ak uvážime, že koeficientov c(n) je polovičný počet ako x(n), musí platiť:

$$\sum_n c^{(1)}(n) = \tfrac{1}{2}\sum_n x(n)$$

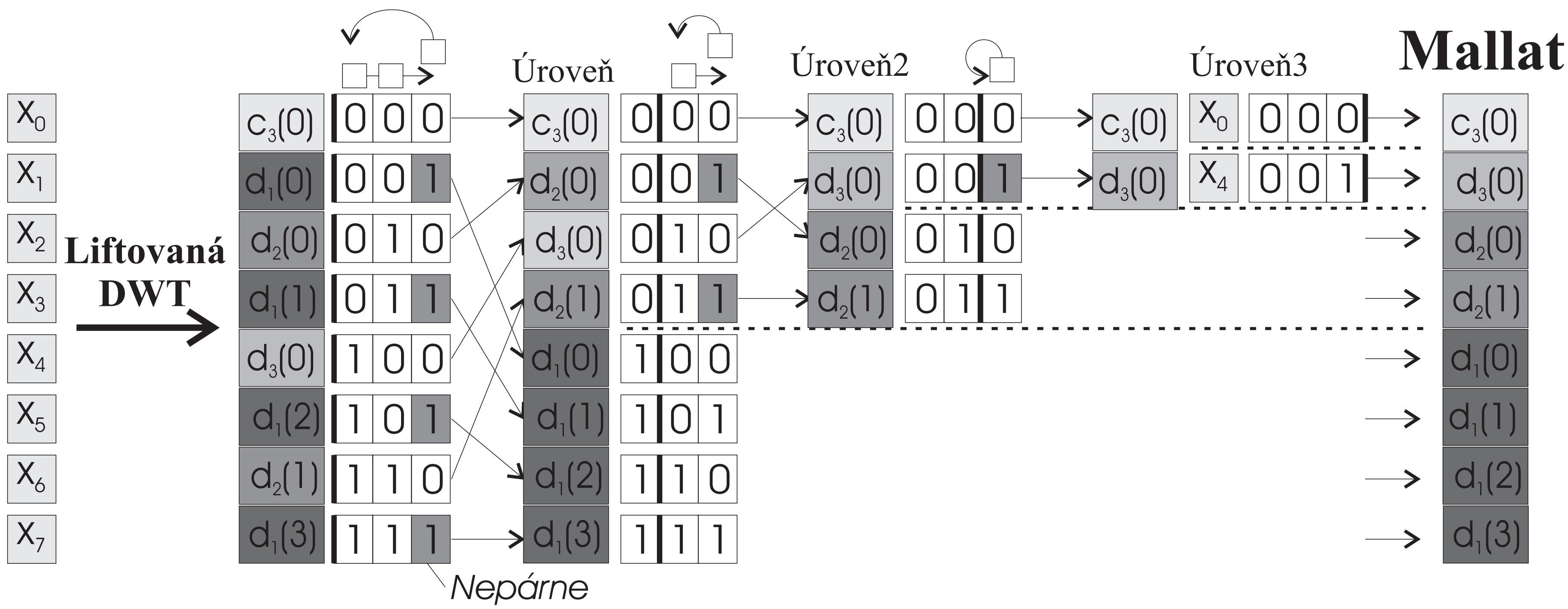
dostanemie hodnotu A=1/4.

3) Dostali sme CDF 2,2 filter s $\widetilde{h}(n) = \left(-\tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{8}\right)$

Reprezentácia signálu po liftingu (príklad CDF 2,2 wavelet)



Ako preusporiadať koeficienty z Liftingovej reprezentácie do Mallatovej(klasickej)?



O prediktoroch

- Vlastnosti výslednej transformácie sú určené vlastnosťami a spôsobom aplikácie prediktorov
- Teoreticky môžeme použiť ľubovoľné prediktory. Priečková štruktúra nám zaručuje biortogonalitu a tým aj úplnú rekonštrukciu. Môžeme použiť nelineárne prediktory, napr. adaptívne alebo celočíselné. Celočíselné prediktory dostaneme napr. jednoduchým zaokrúhlením hodnoty (nelineárna operácia).

Koncept prediktorov predstavuje silný vzťah medzi *transformačným* a *prediktívnym* kódovaním, kde sa snažíme predpovedať (aproximovať) signál a kódovať iba prípadnú diferencia od originálneho signálu

Lifting schéma takto principiálne umožnuje dvojaký prístup k dekorelácii dát:

a) použiť transformačný princíp (t.j. WT) a celý postup faktorizovať na kroky liftingu
b) b) využiť priamo predikčný princíp a snažiť sa data dekorelovať priamo dizajnom sústavy prediktorov použitých v lifting schéme

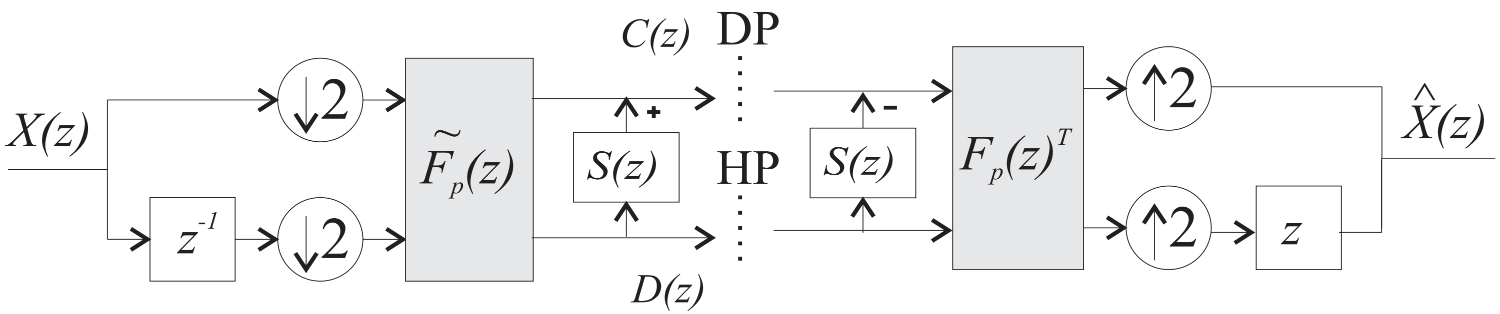
Kroky liftingu a polyfázové matice

Nech $\widetilde{H}(z)$ a $\widetilde{G}(z)$ v FB sú komplementárne, t.j. $\det\left(\widetilde{\mathbf{F}}_p(z)\right) = z^{-1}$. Potom platí:

- každý nový FIR filter $\widetilde{H}^{new}(z)$ resp. $G^{new}(z)$ komplementárny k $\widetilde{G}(z)$ resp. $H(z)$ môžeme vyjadriť tzv. ***liftingom*** z pôvodného filtra ($\det\left(\widetilde{\mathbf{F}}_p(z)\right) = z^{-1}$ sa zachová, lebo $|AB| = |A|\,|B|$) ako

$$\widetilde{H}^{new}(z) = \widetilde{H}(z) + S(z^2)\widetilde{G}(z) \qquad G^{new}(z) = G(z) - S(z^{-2})H(z)$$

$$\widetilde{\mathbf{F}}_p^{new}(z) = \begin{pmatrix} 1 & S(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\widetilde{\mathbf{F}}_p \qquad \mathbf{F}_p^{new}(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -S(z^{-1}) & 1 \end{pmatrix}\mathbf{F}_p$$



Pozámky:

1) Uvedomme si, že $\left[S(z^2)\widetilde{G}(z)\right]_e = \widetilde{G}_e(z)S(z)$, $\left[S(z^2)\widetilde{G}(z)\right]_o = \widetilde{G}_o(z)S(z)$

2) $\mathbf{P}(z) = \mathbf{F}_p^T(z)\widetilde{\mathbf{F}}_p(z) = \mathbf{F}_p^T \begin{pmatrix} 1 & -S(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & S(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \widetilde{\mathbf{F}}_p = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -S(z^{-1}) & 1 \end{pmatrix} \mathbf{F}_p \right)^T \begin{pmatrix} 1 & S(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \widetilde{\mathbf{F}}_p$

3) Uvedomme si, že liftingom zmodifikujeme $\widetilde{H}(z)$ avšak pri rekonštrukcii to odpovedá modifikácii $G(z)$

4) Uvedomme si, že analýzu a syntézu môžeme zameniť keďže sú vzájomne inverzné.

- každý nový FIR filter $\widetilde{G}^{new}(z)$ resp. $H^{new}(z)$ komplementárny k $\widetilde{H}(z)$ resp. $G(z)$ môžeme vyjadriť tzv. ***duálnym liftingom*** z pôvodného filtra ako

$$\widetilde{G}^{new}(z) = \widetilde{G}(z) + T(z^2)\widetilde{H}(z) \qquad H^{new}(z) = H(z) - T(z^{-2})G(z)$$

$$\widetilde{\mathbf{F}}_p^{new}(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T(z) & 1 \end{pmatrix} \widetilde{\mathbf{F}}_p \qquad \mathbf{F}_p^{new}(z) = \begin{pmatrix} 1 & -T(z^{-1}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{F}_p$$

, kde

$$S(z) = \sum_n s(n) z^{-n} \qquad T(z) = \sum_n t(n) z^{-n}$$

sú prenosovými funkciami FIR filtrov a môžu byť interpretované ako *prediktory*.

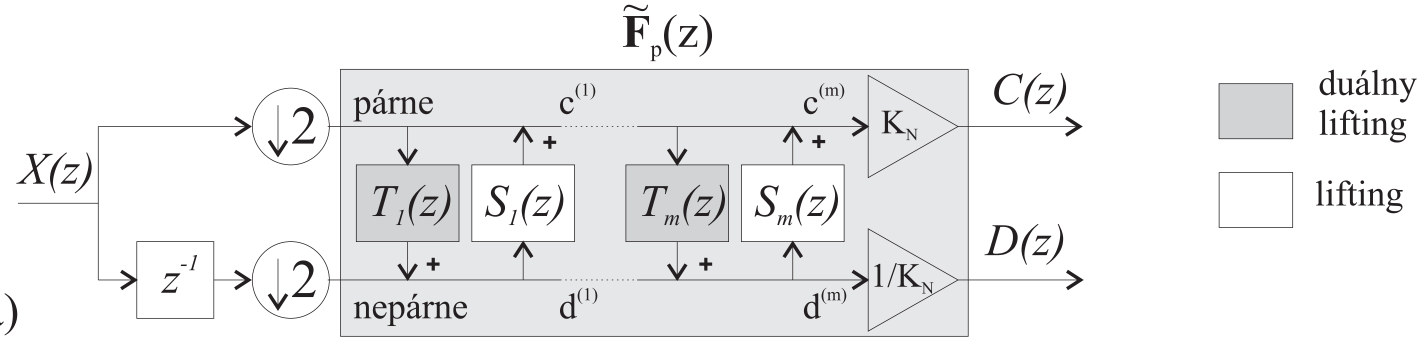
Vidíme, že determinanty $\widetilde{\mathbf{F}}_p$ a $\mathbf{F}_p$ po liftingu resp. duálnom filtingu zostávajú konštantné.

Striedaním krokov liftingu a duálneho liftingu začínajúc s "lenivým" waveletom, pre ktorý platí $\widetilde{\mathbf{F}}_p(z) = \mathbf{I}$, t.j.

$$\begin{pmatrix} C(z) \\ D(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_e(z) \\ z^{-1} X_o(z) \end{pmatrix}$$

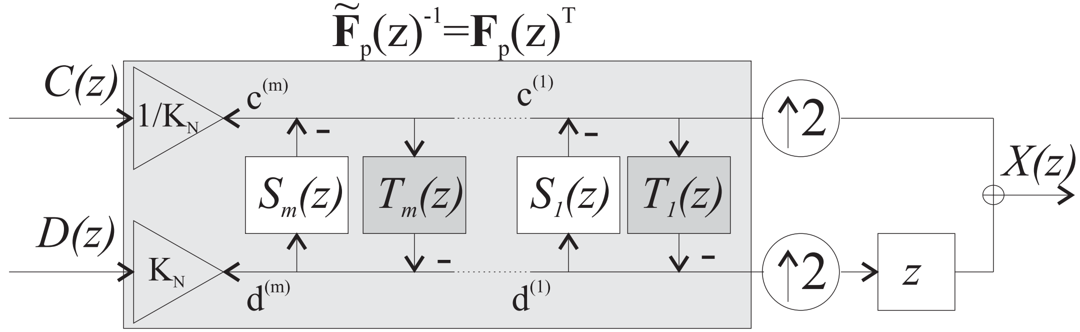
môžeme postupne konštruovať wavelet s lepšími a lepšími vlastnosťami:

Rozklad



a)

Rekonštrukcia



b)

Každá polyfázová matica reprezentujúca FB s FIR filtrami a úplnou rekonštrukciou môže byť zapísaná v tvare:

Analýza

$$\mathbf{F}_p(z)=\begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 1/K \end{pmatrix}\prod_{i=m}^{1}\left\{\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & S_i(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}^{\text{lifting}}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T_i(z) & 1 \end{pmatrix}}_{\text{duálny lifting}}\right\}$$

Rekonštrukcia

$$\mathbf{F}_p^{-1}(z)=\prod_{i=1}^{m}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -T_i(z) & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -S_i(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} 1/K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}$$

Opačný smer: Máme maticu $\mathbf{F}_p(z)$ a chceme získať kroky liftingu.

Rozklad danej matice $\mathbf{F}_p(z)$ na *dolné a horné trojuholníkové matice* dostaneme tzv. *faktorizáciou*, čo je postup analogický euklidovému algoritmu na hľadanie najväčšieho spoločného deliteľa (NSD) polynómov (v našom prípade prenosových funkcií filtrov v *z* rovine).

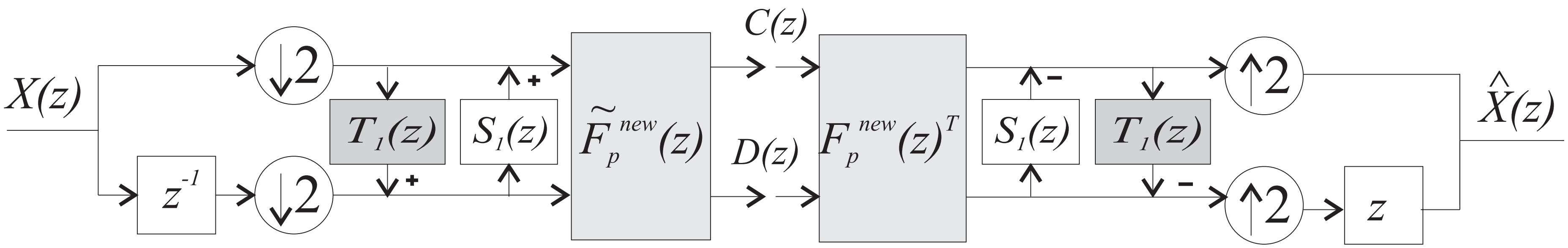
- Pre polynómy NSD nie je jedinečný.
- Pri faktorizácii *odštiepujeme* striedavo $T_i(z)$ (duálny lifting) a $S_i(z)$ (lifting) ktoré nám efektívne znižujú Laurentove dĺžky polyfázových komponentov
- Striedaním týchto dvoch krokov sa snažíme dopracovať k *diagonálnej matici*.

$$\widetilde{\mathbf{F}}_p(z)=\begin{pmatrix}\widetilde{H}_e(z) & \widetilde{H}_o(z)\\ \widetilde{G}_e(z) & \widetilde{G}_o(z)\end{pmatrix}=\left\langle\begin{array}{l}\begin{pmatrix}\widetilde{H}_e^{new}(z) & \widetilde{H}_o(z)\\ \widetilde{G}_e^{new}(z) & \widetilde{G}_o(z)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ T_i(z) & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\widetilde{H}_e(z)-\widetilde{H}_o(z)T_i(z) & \widetilde{H}_o(z)\\ \widetilde{G}_e(z)-\widetilde{G}_o(z)T_i(z) & \widetilde{G}_o(z)\end{pmatrix}\\[2ex] \begin{pmatrix}\widetilde{H}_e(z) & \widetilde{H}_o^{new}(z)\\ \widetilde{G}_e(z) & \widetilde{G}_o^{new}(z)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & S_i(z)\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\widetilde{H}_e(z) & \widetilde{H}_o(z)-\widetilde{H}_e(z)S_i(z)\\ \widetilde{G}_e(z) & \widetilde{G}_o(z)-\widetilde{G}_e(z)S_i(z)\end{pmatrix}\end{array}\right.$$

Otázka: Prečo sú odštiepené matice na konci vzťahu?

Pri odštiepovaní $T_i(z)$ volíme $T_i(z)=\widetilde{H}_e(z)/\widetilde{H}_o(z)$ alebo $T_i(z)=\widetilde{G}_e(z)/\widetilde{G}_o(z)$, t.j. podľa toho či chceme cielene minimalizovať $\widetilde{H}_e^{new}(z)$ alebo $\widetilde{G}_e^{new}(z)$.
Pri odštiepovaní $S_i(z)$ volíme $S_i(z)=\widetilde{H}_o(z)/\widetilde{H}_e(z)$ alebo $S_i(z)=\widetilde{G}_o(z)/\widetilde{G}_e(z)$, t.j. podľa toho či chceme cielene minimalizovať $\widetilde{H}_o^{new}(z)$ alebo $\widetilde{G}_o^{new}(z)$

Odštiepovanie z polyfázovej matice, odštiepené prvé $T_i(z)$ a $S_i(z)$:



Ako teda nájsť faktorizáciu na kroky liftingu ?

Ak chceme pár komplementárnych filtrov $H(z), G(z)$ faktorizovať, musia byť $H_e(z)$ a $H_o(z)$ nesúdeliteľné, lebo kvoli ich spoločnému faktoru by determinant polyfázovej matice nebol mononóm. Použitím Euklidovho algoritmu dostaneme rozklad:

$$\begin{pmatrix} H_e(z) \\ H_o(z) \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} Q_i(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K \\ 0 \end{pmatrix}$$

, kde vhodnou voľbou kvocientov môžeme vďaka nejednoznačnosti delenia dostať $A_n(z)$=konštanta=K.

Ak máme daný filter $H(z)$, vždy môžeme k nemu nájsť komplementárny filter (označme ho $G_0(z)$) voľbou:

$$\mathbf{F}_{p0}^{T}(z) = \begin{pmatrix} H_e(z) & G_{0e}(z) \\ H_o(z) & G_{0o}(z) \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} Q_i(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 1/K \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n/2} \begin{pmatrix} 1 & Q_{2i-1}(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Q_{2i}(z) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 1/K \end{pmatrix}$$

a ľubovoľný $G(z)$ komplementárny k $H(z)$ môžeme obdržať z $G_0(z)$ jedným liftingom, napr.:

$$\mathbf{F}_p(z) = \mathbf{F}_{p0}(z) \begin{pmatrix} 1 & s(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pozn1: Na precvičenie dokázať, že $\begin{pmatrix} Q_a(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_b(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & Q_a(z) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Q_b(z) & 0 \end{pmatrix}$

Kombináciou uvedených vzťahov dostávame tvrdenie:

Pre dané komplementárne filtre $H(z), G(z)$ vždy existujú Laurentove polynómy $S_i(z),\ T_i(z)$ a taká konštanta K, že platí:

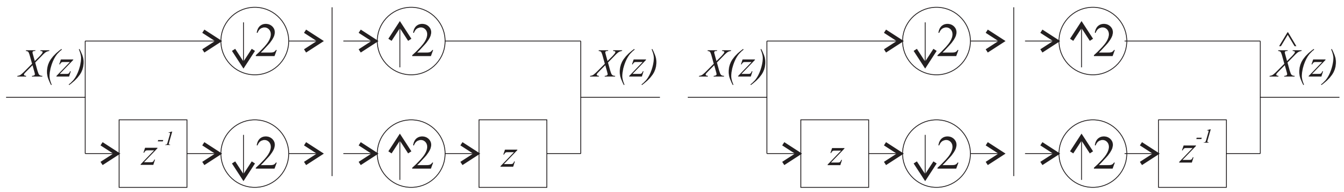
$$\begin{pmatrix} H_e(z) & G_e(z) \\ H_o(z) & G_o(z) \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} 1 & S_i(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T_i(z) & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 1/K \end{pmatrix}$$

resp. z vlastností transponovania súčinu

$$\begin{pmatrix} H_e(z) & H_o(z) \\ G_e(z) & G_o(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 1/K \end{pmatrix} \prod_{i=n}^{1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ S_i(z) & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & T_i(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

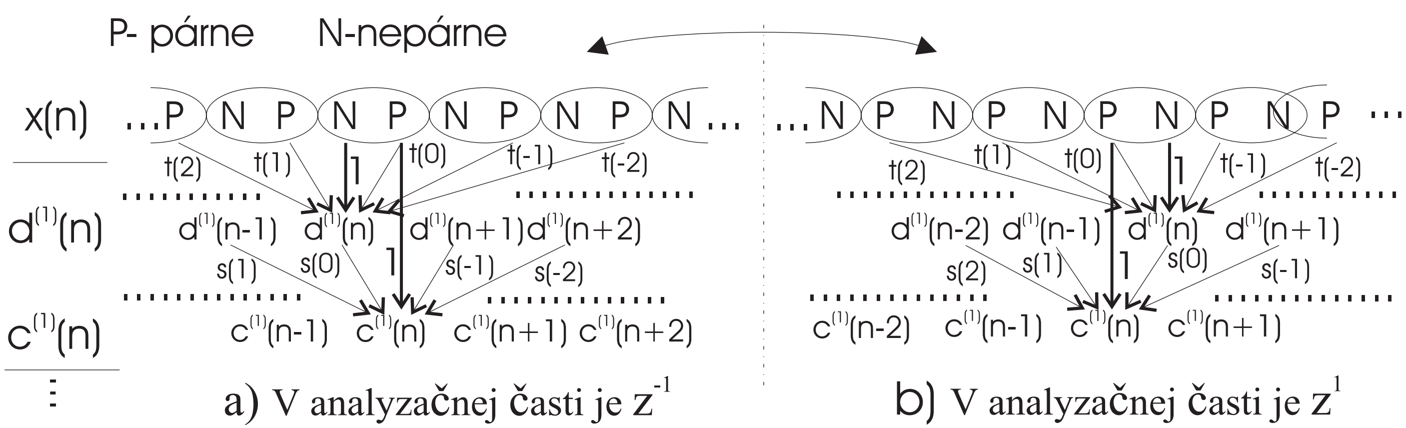
Máme kroky liftingu vypočítané, ako aplikovať pri výpočte naše $T_i(z)$ a $S_i(z)$?

Akým spôsobom sme rozložili filtre na polyfázové komponenty?



a) oneskorenie v analýze b) oneskorenie v syntéze

Prvý krok predikcie a následného potvrdenia pri liftingu môžeme potom znázorniť:



a) V analyzačnej časti je z^{-1} b) V analyzačnej časti je z^{1}

Odpovedajúci matematický zápis:

Predikcia: $$d^{(j+1)}(n) = d^{(j)}(n) + \sum_{\forall k} t(k) c^{(j)}(n-k)$$

Potvrdenie: $$c^{(j+1)}(n) = c^{(j)}(n) + \sum_{\forall k} s(k) d^{(j)}(n-k)$$

<u>Príklad1:</u> Nájdite faktorizáciu filtrov:

$$\tilde{h}(z) = -\frac{1}{8}z^{-2} + \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}z - \frac{1}{8}z^{2}$$

$$\tilde{g}(z) = \frac{1}{4}z^{-2} - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}$$

<u>Riešenie1</u>:Vstupný signál je v tvare:

$$x(z) = x_e(z^2) + z^{-1}x_o(z^2)$$

Filtre sú v tvare:

$$\widetilde{h}(z) = \underbrace{\left\{-\frac{1}{8}z^{-2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{8}z^{2}\right\}}_{\widetilde{h}_e(z^2)} + z^{-1}\underbrace{\left\{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}z^{2}\right\}}_{\widetilde{h}_o(z^2)}$$

$$\widetilde{g}(z) = \underbrace{\left\{\frac{1}{4}z^{-2} + \frac{1}{4}\right\}}_{\widetilde{g}_e(z^2)} + z^{-1}\underbrace{\left\{-\frac{1}{2}\right\}}_{\widetilde{g}_o(z^2)}$$

t.j.:

$$\widetilde{h}_e(z) = -\frac{1}{8}z^{-1} + \frac{3}{4} - \frac{1}{8}z \qquad \widetilde{h}_o(z) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z$$

$$\widetilde{g}_e(z) = \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{1}{4} \qquad \widetilde{g}_o(z) = -\frac{1}{2}$$

Polyfázová matica $\widetilde{\mathbf{F}}_p$ z nich vytvorená je:

$$\widetilde{\mathrm{P}}(z) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8}z^{-1} + \frac{3}{4} - \frac{1}{8}z & \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z \\ \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Jej determinant je mononóm:

$$\left(-\frac{1}{8}z^{-1}+\frac{3}{4}-\frac{1}{8}z\right)\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}z\right)\left(\frac{1}{4}z^{-1}+\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{2}$$

Začneme striedavo odštiepovať:

1) KROK A

$$\widetilde{\mathrm{P}}(z)=\begin{pmatrix}\widetilde{h}_e^{new}(z) & \frac{1}{4}+\frac{1}{4}z\\ \widetilde{g}_e^{new}(z) & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \widetilde{t}(z) & 1\end{pmatrix}$$

T.j. hľadáme riešenie pre:

$$-\frac{1}{8}z^{-1}+\frac{3}{4}-\frac{1}{8}z=\widetilde{t}(z)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}z\right)+\widetilde{h}_e^{new}(z)$$

$$\frac{1}{4}z^{-1}+\frac{1}{4}=\widetilde{t}(z)\left(-\frac{1}{2}\right)+\widetilde{g}_e^{new}(z)$$

Ak inicializujeme Euklidov algoritmus s $a_0=\widetilde{h}_e(z)$ and $b_0=\widetilde{h}_o(z)$, máme po prvom kroku 3 možnosti:

$$-\frac{1}{8}z^{-1}+\frac{3}{4}-\frac{1}{8}z=\begin{cases}\left(-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{7}{2}\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}z\right) & -z\\ \left(-\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}z\right) & +1\\ \left(\frac{7}{2}z^{-1}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}z\right) & -z^{-1}\end{cases}$$

Z nich si vyberieme symetrické riešenie:

$$\widetilde{\mathrm{P}}(z)=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{4}+\frac{1}{4}z\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$$

Pokračovaním postupu dostaneme:

$$\widetilde{\mathrm{P}}(z)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{4}+\frac{1}{4}z\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$$

Teraz už len treba výsledky správne interpretovať.

Príklad2: Ak sme faktorizovaním BF dostali(viď predchádzajúci príklad):

$$\widetilde{\mathbf{F}}_p(z) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} + \frac{1}{4} z \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} z^{-1} - \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Napíšte kroky liftingu pre doprednú transformáciu v čase:

Riešenie:

$$c^{(0)}(n) = x(2n) \qquad d^{(0)}(n) = x(2n-1)$$

$$d^{(1)}(n) = d^{(0)}(n) + \left[-\frac{1}{2} c^{(0)}(n) - \frac{1}{2} c^{(0)}(n-1) \right]$$

$$c^{(1)}(n) = c^{(0)}(n) + \left[\frac{1}{4} d^{(0)}(n+1) + \frac{1}{4} d^{(0)}(n) \right]$$

$$c(n) = \sqrt{2}\, c^{(1)}(n) \qquad d(n) = \frac{1}{\sqrt{2}} d^{(1)}(n)$$

Grafická reprezentácia je ako v Príklade C na začiatku prednášky - až na opačné spájanie do dvojíc ako v obrázku na strane 16 po a) resp b).