

Čo robiť pri DWT na kraji signálu signálu:

1. *Doplnenie nulami* - vnáša diskontinuity na okrajoch signálu.
2. *Periodifikácia signálu* - má za následok periodifikáciu analýzy s rôznym rozlíšením (MRA), čo je v praxi implementované kruhovou konvolúciou pri filtrovaní v čase. Výsledky sú lepšie ako v 1. prípade .
3. *Symetrické rozšírenie signálu* - je podmienené použitím filtrov s lineárnou fázou , t.j. biortogonálnymi waveletmi.
4. *Priama extrapolácia*. Nepredpokladáme žiadnu symetriu, pričom okrajové hodnoty mimo hraníc signálu sa vyjadrujú pomocou transformačných koeficientov (lineárna, polynomická, nelineárna závislosť hraničných hodnôt).
5. *Wavelety na intervale a okrajové filtre* - Originálna definícia waveletov používa funkcie definované na celej reálnej osi. Ďalšou možnosťou je definovanie špeciálnych waveletov na intervale: tieto pozostávajú z obvyklých waveletov, ktorých podpora je úplne vnútri intervalu a špeciálnych “okrajových” waveletov. V praxi sa riešia modifikovaním $h_{mr}(n), g_{mr}(n)$ na okrajoch signálu, t.j. zavedením špeciálnych modifikovaných hraničných filtrov. Existuje celý priestor ortogonálnych riešení hraničných filtrov, t.j. je pomerne veľký stupeň voľnosti pre optimalizáciu.

Doplnenie nulami

Utvorme maticu A prestriedaním riadkov $\tilde{\mathbf{H}}_m \tilde{\mathbf{G}}_m$, filtračných matíc pre analýzu. A z nej utvorme maicu A^* , kde sú koeficienty filtrov sú “useknuté” iba na jednej strane:

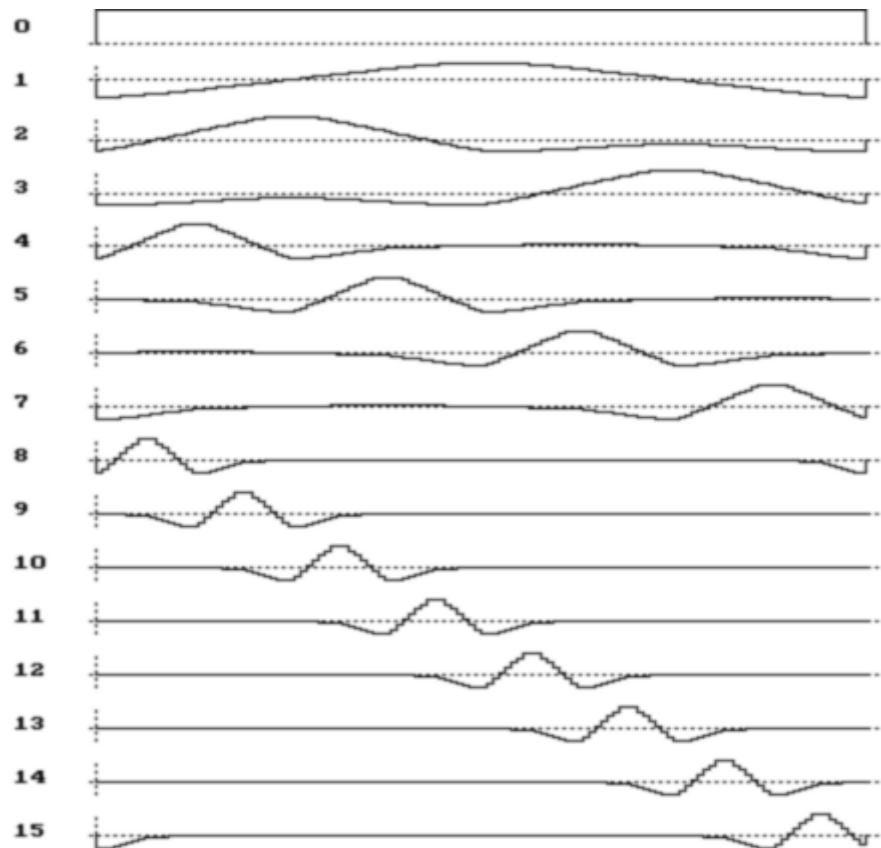
$$A^* = \begin{pmatrix} \tilde{h}(0) & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(2) & \tilde{h}(3) & \dots & \dots \\ \tilde{g}(0) & \tilde{g}(1) & \tilde{g}(2) & \tilde{g}(3) & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \tilde{h}(0) & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(2) & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & \tilde{h}(0) & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(2) & \tilde{h}(3) \\ & & & \tilde{g}(0) & \tilde{g}(1) & \tilde{g}(2) & \tilde{g}(3) \\ & & \dots & & & \tilde{h}(0) & \tilde{h}(1) \\ & & & \dots & \dots & \tilde{g}(0) & \tilde{g}(1) \end{pmatrix}$$

Matica A^* je singulárna, avšak použitím posunutej matice A je možné nájsť inverznú maticu s odpovedajúcou štruktúrou. Výsledné filtre potom môžeme použiť pri rekonštrukcii.

$$A^{**} = \begin{pmatrix} \tilde{h}(1) & \tilde{h}(2) & \tilde{h}(3) & \dots & \dots \\ \tilde{g}(1) & \tilde{g}(2) & \tilde{g}(3) & \dots & \dots \\ 0 & \tilde{h}(0) & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(2) & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & \tilde{h}(0) & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(2) & \tilde{h}(3) & 0 \\ & & & \tilde{g}(0) & \tilde{g}(1) & \tilde{g}(2) & \tilde{g}(3) & 0 \\ & & \dots & & & \tilde{h}(0) & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(2) \\ & & & \dots & \dots & \tilde{g}(0) & \tilde{g}(1) & \tilde{g}(2) \end{pmatrix}$$

Periodické rozšírenie.

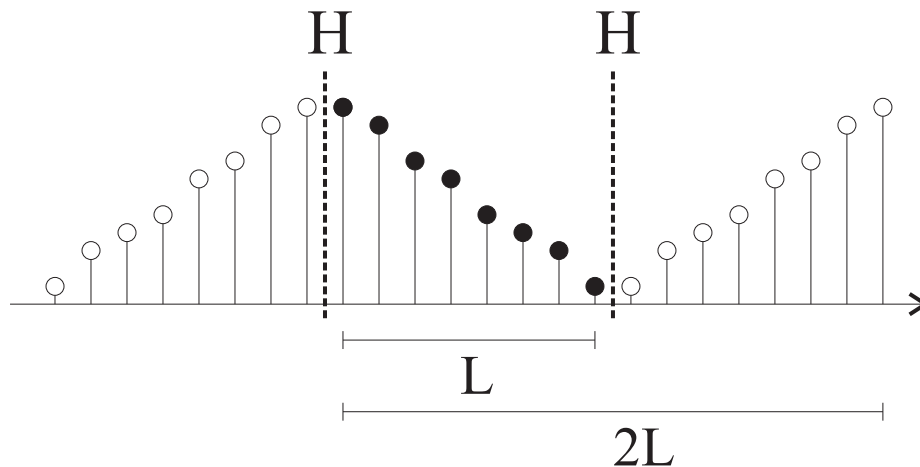
- speriodifikované koeficienty $h_{mr}(n), g_{mr}(n)$
- speriodifikované transformáčné matice
- speriodifikovanie báзовých funkcií



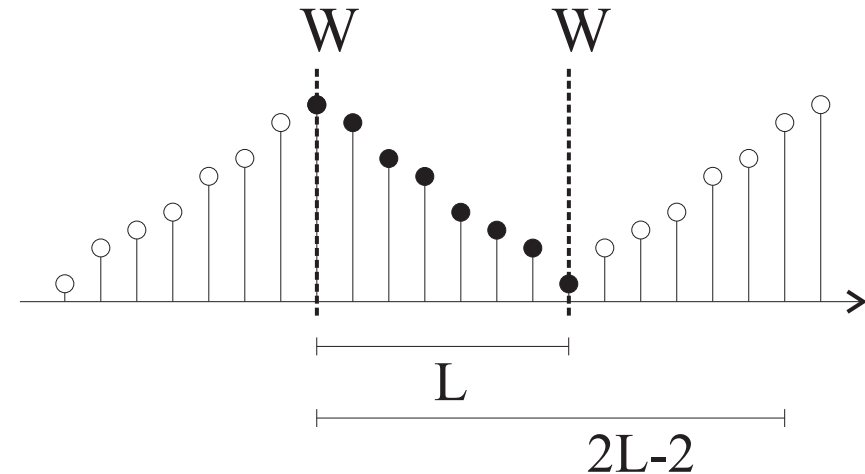
Prvých 32 báзовých funkcií diskkrétnej waveletovej bázy o veľkosti $N=128$ pre FBI(9,7) wavelet

Symetrické rozšírenie signálu

I) polbodová symetria(H)



II) celobodová symetria (W)

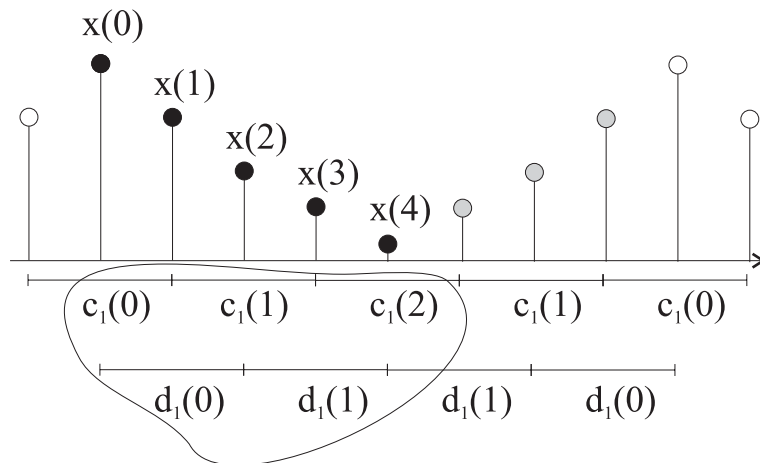


Pre aké filtre(sekvencie $h_{mr}(n), g_{mr}(n)$) použiť ktorú symetrizáciu?

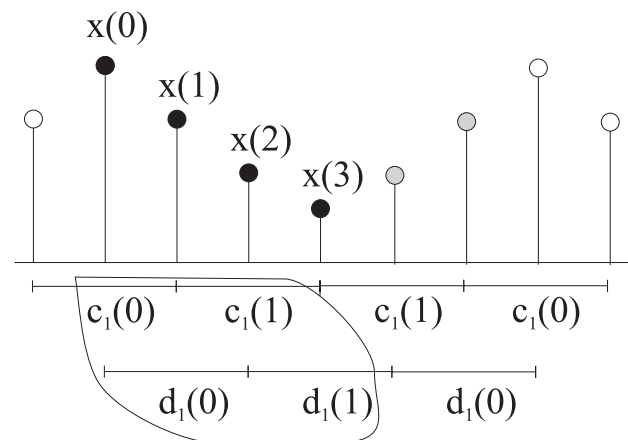
- a) $h_{mr}(n), g_{mr}(n)$ majú párnú dĺžku(t.j. sami sú H symetrické) $\rightarrow$ typ H
- b) $h_{mr}(n), g_{mr}(n)$ majú nepárnu dĺžku(t.j. sami sú W symetrické) $\rightarrow$ typ W

Typ symetrizácie musí byť zhodný aby rozšírený signál po podvzorkovaní danú symetriu nestratil.

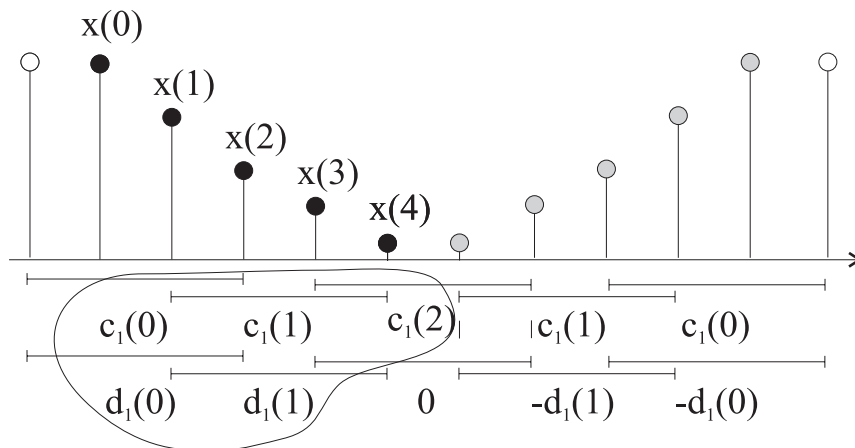
Stred fíltrov a reprezentácia signálu s párnou/nepárnou dĺžkou



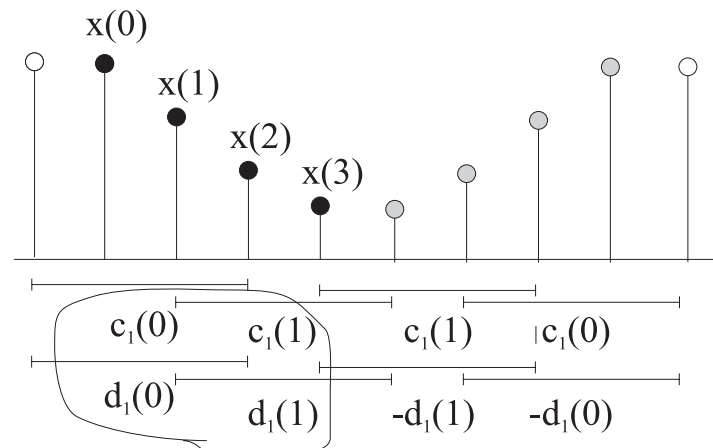
a) symetria W, nepárna dĺžka signálu(5)



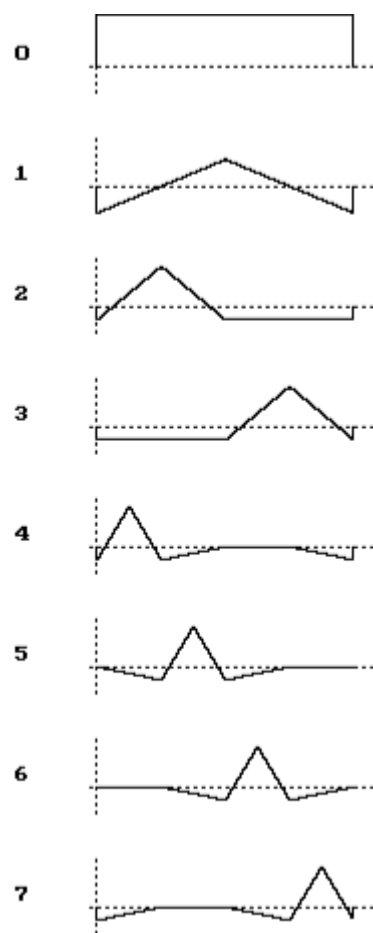
b) symetria W, párna dĺžka signálu(4)



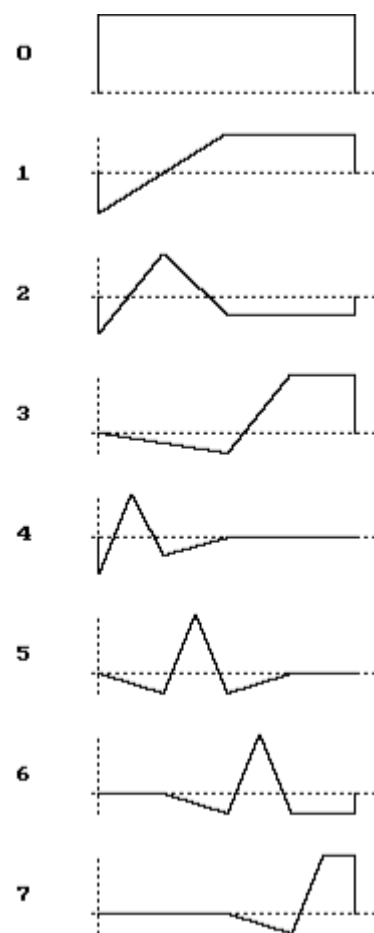
c) symetria H, nepárna dĺžka signálu(5)



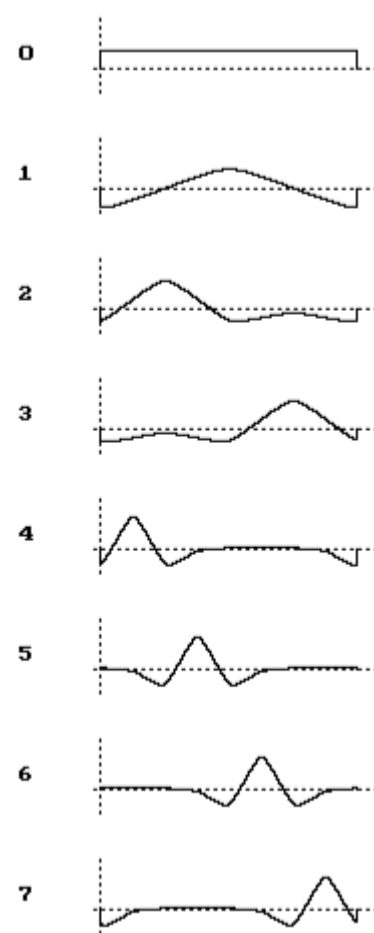
d) symetria H, párna dĺžka signálu(4)



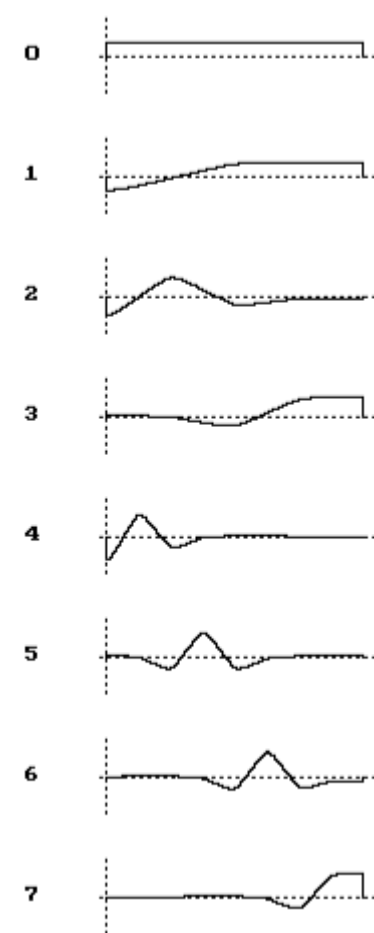
a) CDF(2,2)+PER



b) CDF(2,2) +SYM



c) FBI(9,7)+PER



d) FBI(9,7)+SYM

Porovnanie vplyvu speriodického a symetrického rozšírenia na tvar bazových funkcii 1D DWT. Zobrazených je prvých osem bazových funkcii, veľkosť bázy je $N=128$.

Priama extrapolácia

Doplnenie nulami a symetrické rozšírenie sú vlastne základné extrapolačné metódy.

Majme maticu A v tvare:

$$A = \begin{pmatrix} \tilde{h}(0) & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(2) & \tilde{h}(3) & \dots & \dots \\ \tilde{g}(0) & \tilde{g}(1) & \tilde{g}(2) & \tilde{g}(3) & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \tilde{h}(0) & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(2) & \dots \\ 0 & 0 & \tilde{g}(0) & \tilde{g}(1) & \tilde{g}(2) & \dots \\ & & \dots & & & \dots \end{pmatrix}$$

Platí podmienka: ak sekvencie $h_{mr}(n) = \tilde{h}(n)$, $g_{mr}(n) = \tilde{g}(n)$ v matici A majú dĺžku L a matica A je typu NxN, potom vytvárame takú transformačnú maticu A_e aby A_e^{-1} *existovala* a aby *stĺpce* A_e^{-1} mali primeranú *kompaktnú podporu* $< N$.

Ak prvý stĺpec matice A budeme považovať za tú časť transformačnej matice, ktorá “prečnieva” na začiatku, t.j. predstihuje signal, potom extrapoláciu (maticu A_e) môžeme vyjadriť nasledovne (analogicky to bude pre posledné stĺpce):

1) Doplnenie nulami

- a. vynecháme prvý stĺpec A , označme ho $A(:,1)$

2) Konštantná extrapolácia

- a. vynecháme $A(:,1)$
- b. pridáme $A(:,1)$ k $A(:,2)$, t.j. $A(:,2) = A(:,2) + A(:,1)$

3) Lineárna extrapolácia

- a. vynecháme $A(:,1)$
- b. $A(:,2) = A(:,2) + 2 * A(:,1)$
- c. $A(:,3) = A(:,3) - 1 * A(:,1)$

4) Kvadratická extrapolácia

- a. vynecháme $A(:,1)$
- b. $A(:,2) = A(:,2) + 3 * A(:,1)$
- c. $A(:,3) = A(:,3) - 3 * A(:,1)$
- d. $A(:,4) = A(:,4) + 1 * A(:,1)$

...

Wavelety na intervale a okrajové filtre

Ciel – Navrhnuť transformačnú maticu A_b (b-boundary) ako v prípade A^{**} resp A_e avšak navyše zachovať ortogonalitu na okrajoch.

Okrajové filtre – prvé a posledné 2 riadky v matici A

Okrajové funkcie mierky a wavelety – prvé a posledné funkcie v bázach podpriestorov odpovedajúce okrajovým filtrom (viď. kaskádové algoritmy)

V prípade ak dĺžka ortogonálnych filtrov je 4 môže byť matica A_b v tvare:

$$A_b = \begin{pmatrix} r & s & t & 0 & \dots & \dots & & & \\ u & v & w & 0 & \dots & \dots & & & \\ 0 & a & b & c & d & 0 & \dots & & \dots \\ 0 & -d & c & -b & a & 0 & & & \\ & & \vdots & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & 0 & a & b & c & d & 0 \\ & & & & & & & 0 & -d & c & -b & a & 0 \\ & & \dots & & \dots & & & 0 & 0 & 0 & e & f & g \\ & & & & & & & 0 & 0 & 0 & x & y & z \end{pmatrix}$$

Prvé dva riadky musia byť ortogonálne na ostatné. T.j. stačí na druhé dva.

Hľadáme vektory (r,s,t) a (u,v,w) ortogonálne navzájom a zároveň na $(0,a,b)$ a $(0,-d,c)$.

- Vektory $(0,a,b)$ a $(0,-d,c)$ sú lineárne závislé (lebo $h_{mr}(n)$ je ortogonálny na svoje párne posuny, t.j. $ac+bd=0$).
- T.j. stačí nájsť (r,s,t) a (u,v,w) ortogonálne navzájom a na $(0,a,b)$ (napr. Gramm-Schmidtovým(GS) postupom)

Ostáva 1 stupeň voľnosti – použijeme ho napr. na zabezpečenie aby wavelet mal aspoň minimálnu regularitu, t.j.

$$u+v+w=0$$

Analogicky riešime pre (e,f,g) a (x,y,z) .

Napr. pre DB2 platí:

$$\begin{array}{ll} (r,s,t) &= (0.93907, 0.29767, -0.17186) \\ (u,v,w) &= (-0.34372, 0.81326, -0.46954) \end{array} \quad \begin{array}{ll} (e,f,g) &= (0.40245, 0.69879, 0.59069) \\ (x,y,z) &= (0.25535, 0.51155, -0.80690) \end{array}$$

Všeobecne môžeme ľavý horný roh (analogicky aj pravý dolný) transformačnej matice vyjadriť:

$$\mathbf{A}_b = \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ (\mathbf{0} \quad \mathbf{A}) \end{pmatrix}$$

kde $\mathbf{B}$ vznikne vhodnou úpravou matice

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_D & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{L} \quad \mathbf{0}) \end{pmatrix}$$

kde $\mathbf{L}$ je matica rozmerov $[(N-2)/2] \times [N-2]$ získaná GS ortogonalizačným procesom k Matici $\mathbf{A}$. T.j. uvedené hraničné filtre pre DB2 sú príkladom začiatku tejto matice ak $d=1$ a $N=4$, teda $\mathbf{L}$ má rozmer 1×2 a matica $\mathbf{B}$ vznikla úpravou matice

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ 0 & (\mathbf{L}_{1 \times 2} \quad \mathbf{0}) \end{pmatrix}$$

pre podmienku aby $u+v+w=0$.

Ako dostať jednoducho matice $\mathbf{L}$ (aj bez GS procesu)?

Definujme maticu $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{A}^T \mathbf{A}$$

vzhľadom na vlastnosti matice $\mathbf{A}$ má matica $\mathbf{P}$ tvar

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{\text{lava}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{P}_{\text{prava}} \end{pmatrix}$$

pričom lineárne nezávislé vektory z matíc $\mathbf{P}_{\text{lava}}$ a $\mathbf{P}_{\text{prava}}$ sú zároveň ortogonálne na riakdy matice $\mathbf{A}$, t.j. môžeme ich použiť namiesto matice $\mathbf{L}$.

Príklad: Vypočítajte Okrajové filtre pre Db2 s a) $d=1$ a b) $d=3$

$$A = \begin{array}{cccccc|c} / & 0.4830 & 0.8365 & 0.2241 & -0.1294 & 0 & 0 & \backslash \\ | & -0.1294 & -0.2241 & 0.8365 & -0.4830 & 0 & 0 & | \\ | & 0 & 0 & 0.4830 & 0.8365 & 0.2241 & -0.1294 & | \\ \backslash & 0 & 0 & -0.1294 & -0.2241 & 0.8365 & -0.4830 & / \end{array}$$

$$P = \begin{array}{cccccc|c} / & 0.2500 & 0.4330 & 0 & 0 & 0 & 0 & \backslash \\ | & 0.4330 & 0.7500 & 0 & 0 & 0 & 0 & | \\ | & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & | \\ | & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & | \\ | & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7500 & -0.4330 & | \\ \backslash & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4330 & 0.2500 & / \end{array}$$

Vektory $(0.2500, 0.4330)$ a $(0.4330, 0.7500)$ sú lineárne závislé, t.j. matica $L = (0.2500, 0.4330)$.

$$\text{a) } B^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0,25 & 0,4330 & 0 & \dots \end{pmatrix} \quad \text{b) } B^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0,25 & 0,4330 & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

Ako zistíme ako vyzerajú funkcie mierky a wavelety?

Na kraji bázy nie klasickým kaskádovým algoritmom ale mocninami T_s , t.j. spojité
bázové funkcie sú ekvivalentné stĺpcom T_s^k ak $k \rightarrow \infty$.