

Waveletové Rady
Diskrétna WT

=

Iterované
Banky filtrov



Banky
Filtrov

Banky filtrov a systémy s rôznym taktovaním

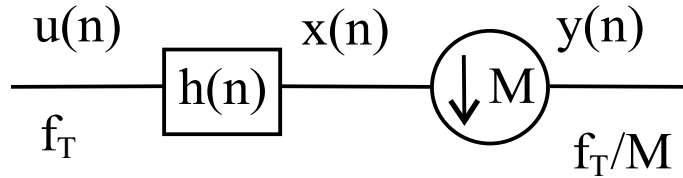
V *systémoch s rôznym taktovaním* (*SRT*, “*multirate systems*”) sú vzorky signálu spracovávané v častiach systému s rôznymi *taktovacími frekvenciami*. Zmeny taktovacej frekvencie sú uskutočnené operáciami *decimácie* a *interpolácie*.

Decimácia je proces redukcie vzorkovacej frekvencie celočíselným faktorom M . Najprv je signál $u(k)$ filtrovaný *antialiasingovým* filtrom prípadne ideálnym DP filtrom s hranicou prepúšťania $\Omega_0 = \pi / M$ a impulzovou charakteristikou $h(n)$ a potom je podvzorkovaný. Výsledok po decimácii je:

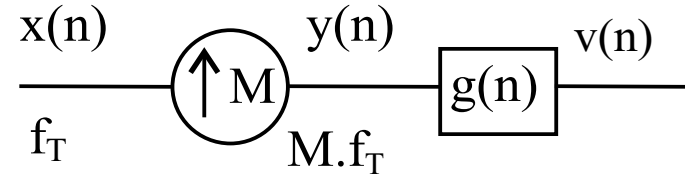
$$y(n) = \sum_k h(Mn - k)u(k)$$

Interpolácia je proces zvýšenia taktovacej frekvencie signálu celočíselným faktorom M . Signál $x(k)$ je najprv nadvzorkovaný (vložením $M - 1$ núl medzi každé 2 vzorky) a potom interpolovaný filtrom (napr. ideálnym DP s $\Omega_0 = \pi / M$) s imp. charakteristikou $g(n)$. Výsledný signál po interpolácii je:

$$v(n) = \sum_k g(n - Mk)x(k)$$

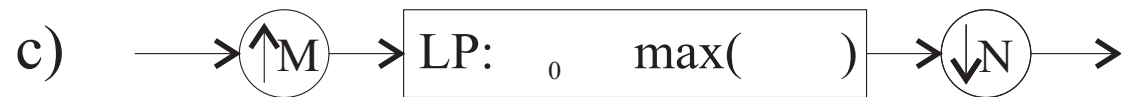
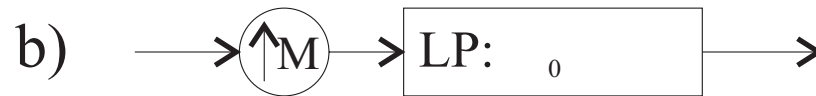
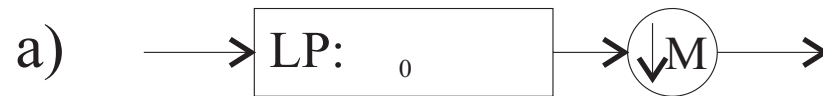


a)



b)

Operácie v SRT a) decimácia b) interpolácia



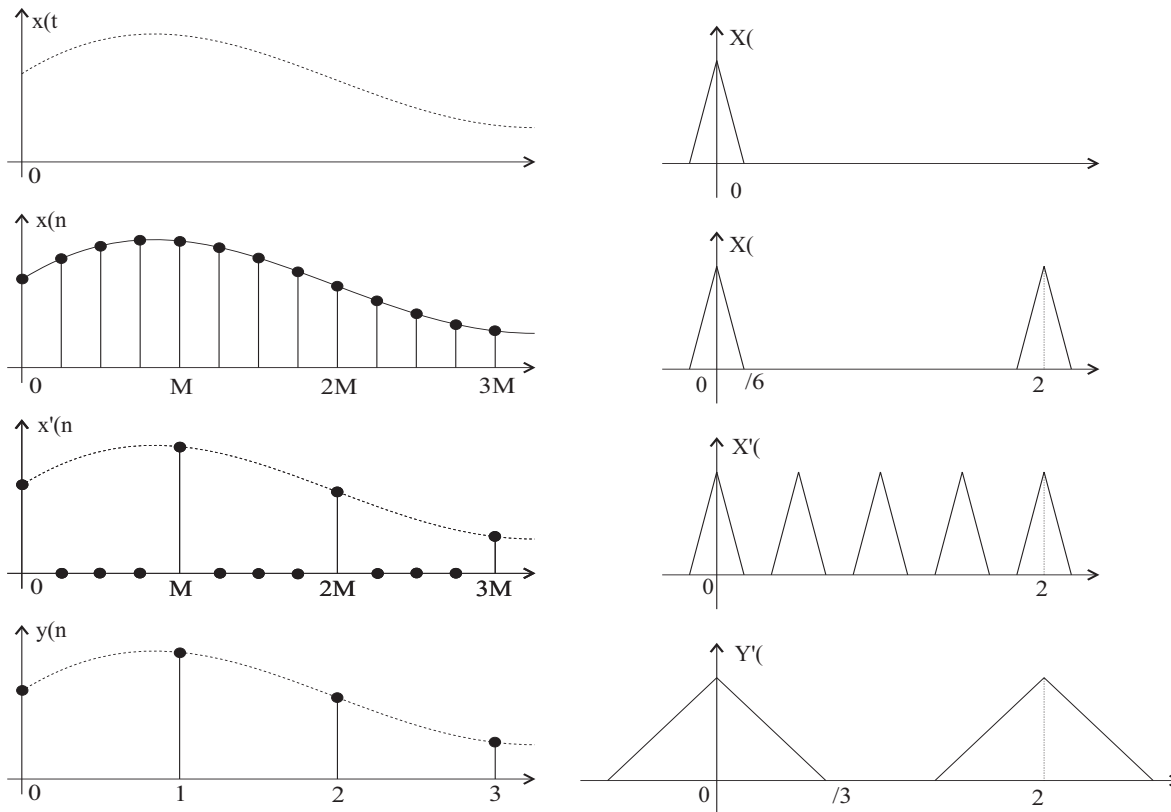
Požadovaný typ filtra pri : a) decimácii b) interpolácii c) zmene taktovacej frekvencie faktorom M/N

Podvzorkovanie signálu

Z pôvodného signálu zachováame iba každú M-tú vzorku. Pre vstupný signál

$x(n)$ je výstup daný $y(n) = x(Mn)$

Čo vo frekvencii odpovedá (znázornené pre $M=4$):



Proces podvzorkovania $x(n)$ môžeme popísať v dvoch fázach:

A) vynulovanie nepotrebných zložiek (násobenie Kroneckerovými impulzami)

$$x'(n) = x(n) \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(n - rM) = x(n) \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{j \frac{2\pi}{M} nk}$$

Z transformáciou dostaneme:

$$X'(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} Z \left\{ x(n) \left(e^{j \frac{2\pi}{M} k} \right)^n \right\} = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(z W^k)$$

, kde $W = e^{-j2\pi/M}$. Tomu opovedá frekvenčná charakteristika (pri $z = e^{j\Omega}$)

$$X'(\Omega) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X\left(\Omega - \frac{2\pi}{M} k\right)$$

T.j. výsledné spektrum je sumou M pôvodných spektier, posunutých zakaždým o $2\pi/M$.

B) Zmena mierky, resp. rozťahnutie signálu $x'(n)$

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x'(Mn) z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x'(k) \left(z^{\frac{1}{M}} \right)^{-k} = X' \left(z^{\frac{1}{M}} \right) \quad Y(\Omega) = X'(\Omega/M)$$

Výsledkom podvzorkovania teda je:

$$Y(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X \left(z^{\frac{1}{M}} W^k \right) \quad Y(\Omega) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X \left(\frac{\Omega - 2k\pi}{M} \right)$$

Nadvzorkovanie signálu.

Pri nadvzorkovaní signálu vkladáme medzi jeho vzorky zakaždým $M-1$ núl. Teda pre vstupný signál $x(n)$ je výstup daný:

$$y(n) = x(n / M)$$

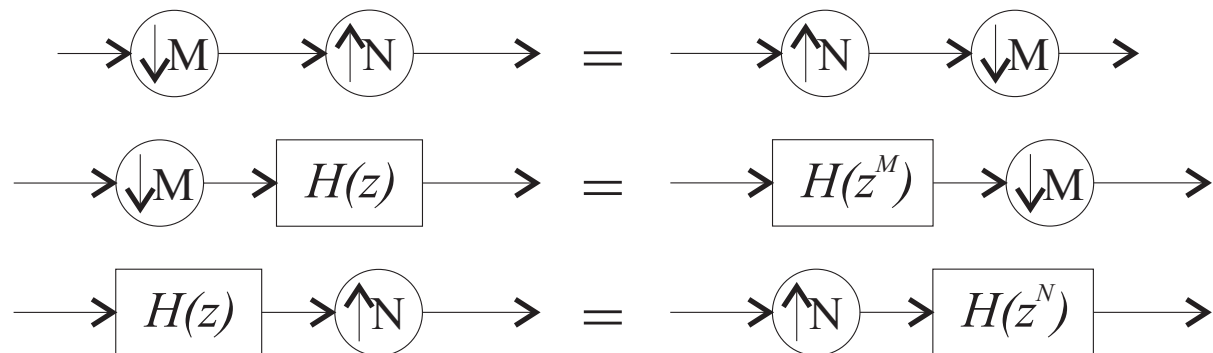
Proces je opačný ako pri fáze B podvzorkovania, t.j. na intervale vznikne $M-1$ obrazov spektra pôvodného signálu $x(n)$:

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n / M) z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) (z^M)^{-k} = X(z^M)$$
$$Y(\Omega) = X(M\Omega)$$

Úlohou interpolačného filtra je odstrániť týchto $M-1$ obrazov.

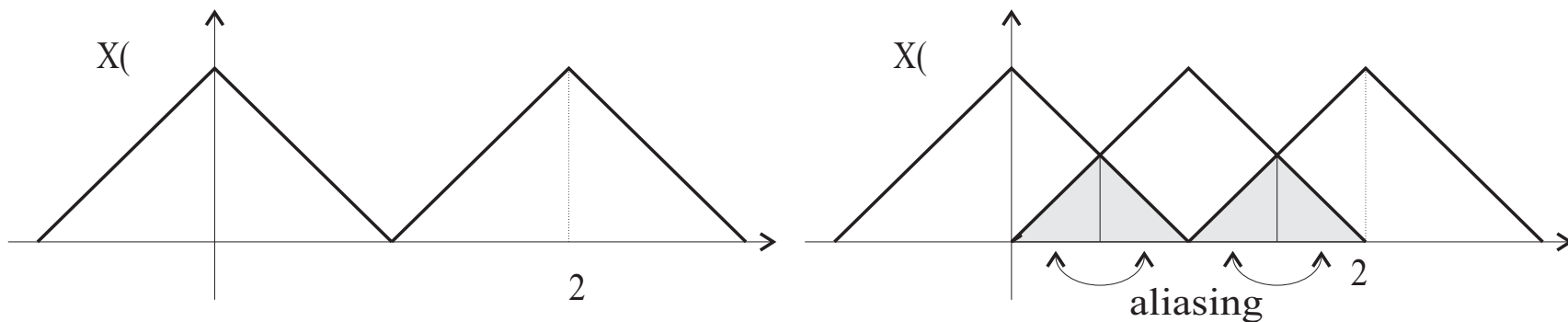
Ekvivalentné štruktúry v SRT

M, N nesúdeliteľné



Podvzorkovanie a následné nadvzorkovanie signálu

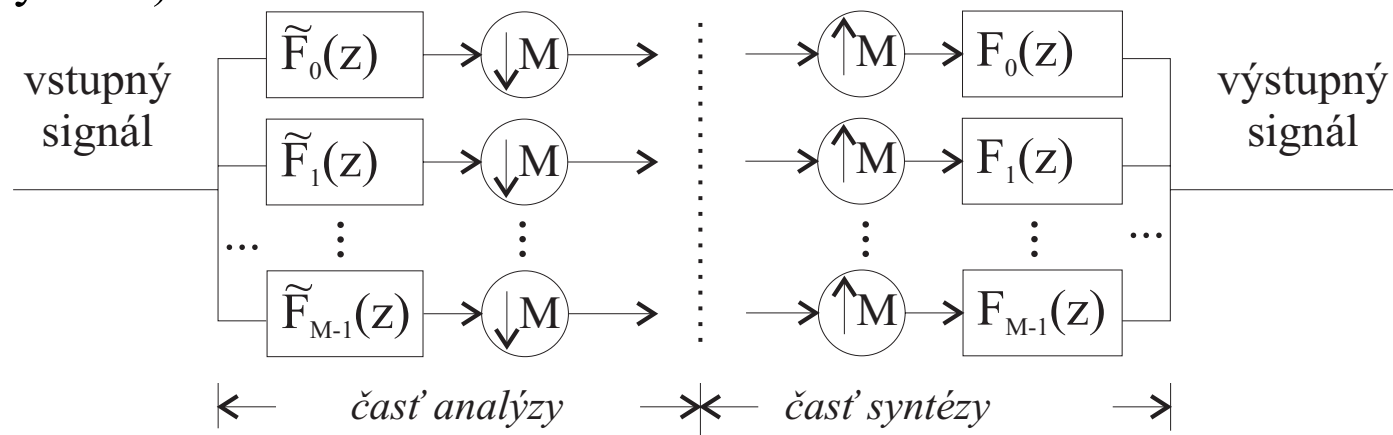
Kedže DP filtre pri decimácii nie su ideálne, t.j. nemajú nekonečne strmú prenosovú charakteristiku pri $\Omega_0 = \pi / M$, je treba rátať so vznikom aliasingu



Príklad vzniku aliasingu pri pod- a nadvzorkovaní signálu. $M=2$.

Banka filtrov

Definícia: **Banka filtrov (BF)** je sústava, v ktorej filtre, použité v operáciach decimácie a interpolácie, umožňujú signál rozložiť (analýza) a spätne zložiť (syntéza).



*Všeobecná schéma M-pásmovej banky filtrov s **kritickým podvzorkovaním***

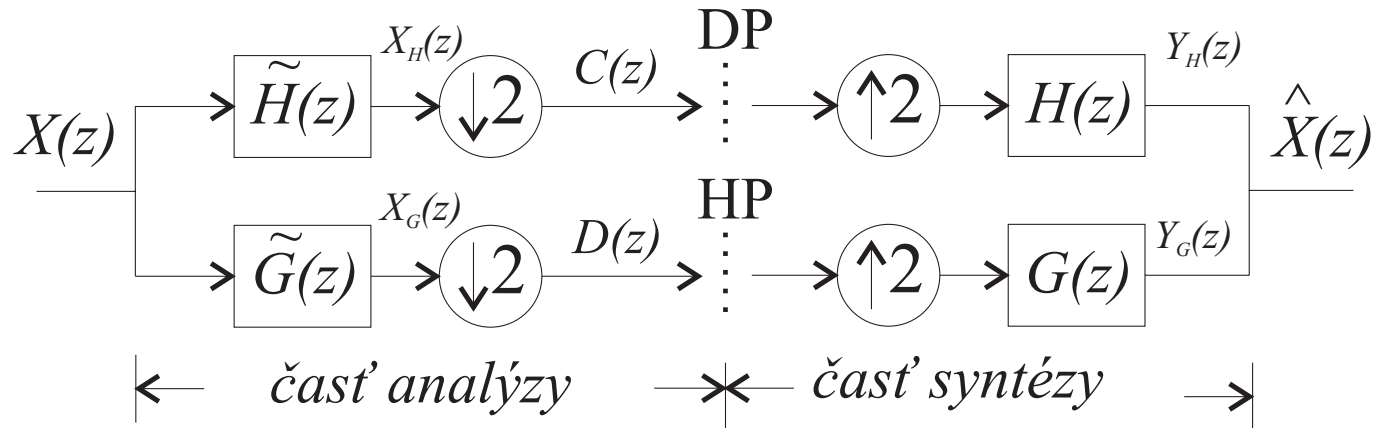
- Signál je rozdelený filtermi pre analýzu $\tilde{F}_k$ na M častí (**subpásiem**) a následne podvzorkovaný – **analýza signálu**
- Signál zrekonštruujeme spätným nadvzorkovaním týchto dvoch častí, interpoláciou filtermi pre syntézu F_k nakoniec sčítaním – **syntéza signálu**

Ak je výstupný signál identický so vstupným, potom FB má vlastnosť *perfektnej(úplnej) rekonštrukcie*.

Zvyčajne chceme FB s rušením aliasingu a úplnou rekonštrukciou signálu.

→ Prenosové funkcie analyzačných $\tilde{F}_k(z)$ resp. synetizačných filtrov $F_k(z)$ musia spĺňať isté podmienky.

Najjednoduchší príklad - dvojkanálové banky filtrov



Ako dosiahneme úplnú rekonštrukciu?

Popisom signálov v oboch vetvách FB dostávame:

$$X_H(z) = X(z)\tilde{H}(z)$$

$$X_G(z) = X(z)\tilde{G}(z)$$

$$C(z) = \frac{1}{2} \left[X_H\left(z^{\frac{1}{2}}\right) + X_H\left(-z^{\frac{1}{2}}\right) \right]$$

$$D(z) = \frac{1}{2} \left[X_G\left(z^{\frac{1}{2}}\right) + X_G\left(-z^{\frac{1}{2}}\right) \right]$$

$$Y_H(z) = C(z^2)H(z)$$

$$Y_G(z) = D(z^2)G(z)$$

$$\hat{X}(z) = Y_H(z) + Y_G(z) = \dots = \frac{1}{2} \left[R_p(z)X(z) + R_a(z)X(-z) \right]$$

$R_p(z)$ charakterizuje celkový prenos sústavou a $R_a(z)$ aliasing

$$R_p(z) = \tilde{H}(z)H(z) + \tilde{G}(z)G(z) \quad R_a(z) = \tilde{H}(-z)H(z) + \tilde{G}(-z)G(z)$$

Postačujúce podmienky na úplnú rekonštrukciu sú:

- 1) eliminácia aliasingu $R_a(z) = 0, \forall z$
- 2) prenos je nanajvýš oneskorením $R_p(z) = 2z^{-l}, l \in \mathbb{Z}$

Riešením 1. podmienky - eliminácie aliasingu dostaneme napr.:

$$H(z) = \pm cz^m \tilde{G}(-z) \quad G(z) = \mp cz^m \tilde{H}(-z), m \in \mathbb{Z}$$

Pri riešení 2. podmienky prepíšeme obe podmienky do maticového tvaru:

$$(H(z) \quad G(z)) \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{H}(z) & \tilde{H}(-z) \\ \tilde{G}(z) & \tilde{G}(-z) \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{M}}(z)} = \begin{pmatrix} 2z^{-l} & 0 \end{pmatrix}$$

, kde $\tilde{\mathbf{M}}(z)$ je *modulačná matica* filtrov pre analýzu. Transponovaním a vynásobením $(\tilde{\mathbf{M}}^T(z))^{-1}$ zľava dostaneme:

$$\begin{pmatrix} H(z) \\ G(z) \end{pmatrix} = \frac{2z^{-l}}{\det(\tilde{\mathbf{M}}(z))} \begin{pmatrix} \tilde{G}(-z) \\ -\tilde{H}(-z) \end{pmatrix}$$

, kde platí

$$\det(\tilde{\mathbf{M}}(z)) = -\det(\tilde{\mathbf{M}}(-z))$$

Označme $P_H(z) = \tilde{H}(z)H(z)$. Potom použitím predchádzajúcej rovnice dostaneme

$$P_H(-z) = \tilde{H}(-z)H(-z) = \tilde{H}(-z) \left(\frac{2z^{-l} \cdot (-1)^l}{-\det(\tilde{\mathbf{M}}(z))} \tilde{G}(z) \right) = G(z)\tilde{G}(z)(-1)^l$$

dosadením do rovnice pre úplnú rekonštrukciu dostávame:

$$P_H(z) + P_H(-z)(-1)^l = 2z^{-l}$$

Normovaním (centrovaním) $P_H(z)$ pomocou $P(z) = z^l P_H(z)$ dostaneme:

$$P(z) + P(-z) = 2$$

T.j. všeobecným riešením podmienky 2 je, aby $P(z)$ bol *polpásmový filter*.

Ak chceme navyše sústavu s nulovým oneskorením platia nasledovné tvary vzťahov pre elimináciu aliasingu:

$$H(z) = z^{2k-1} \tilde{G}(-z) \quad G(z) = -z^{2k-1} \tilde{H}(-z)$$

V ďalšom text si spomenieme najznámejšie riešenia banky filtrov.