

Čo robiť pri DWT na kraji signálu signálu:

1. *Doplnenie nulami* - vnáša diskontinuity na okrajoch signálu.
2. *Periodifikácia signálu* - má za následok periodifikáciu analýzy s rôznym rozlíšením (MRA), čo je v praxi implementované kruhovou konvolúciou pri filtrovaní v čase. Výsledky sú lepšie ako v 1. prípade .
3. *Symetrické rozšírenie signálu* - je podmienené použitím filtrov s lineárnou fázou , t.j. biortogonálnymi waveletmi.
4. *Priama extrapolácia*. Nepredpokladáme žiadnu symetriu, pričom okrajové hodnoty mimo hraníc signálu sa vyjadrujú pomocou transformačných koeficientov (lineárna, polynomická, nelineárna závislosť hraničných hodnôt).
5. *Wavelety na intervale a okrajové filtre* - Originálna definícia waveletov používa funkcie definované na celej reálnej osi. Ďalšou možnosťou je definovanie špeciálnych waveletov na intervale: tieto pozostávajú z obvyklých waveletov, ktorých podpora je úplne vnútri intervalu a špeciálnych “okrajových” waveletov. V praxi sa riešia modifikovaním $h_{mr}(n), g_{mr}(n)$ na okrajoch signálu, t.j. zavedením špeciálnych modifikovaných hraničných filtrov. Existuje celý priestor ortogonálnych riešení hraničných filtrov, t.j. je pomerne veľký stupeň voľnosti pre optimalizáciu.

Doplnenie nulami

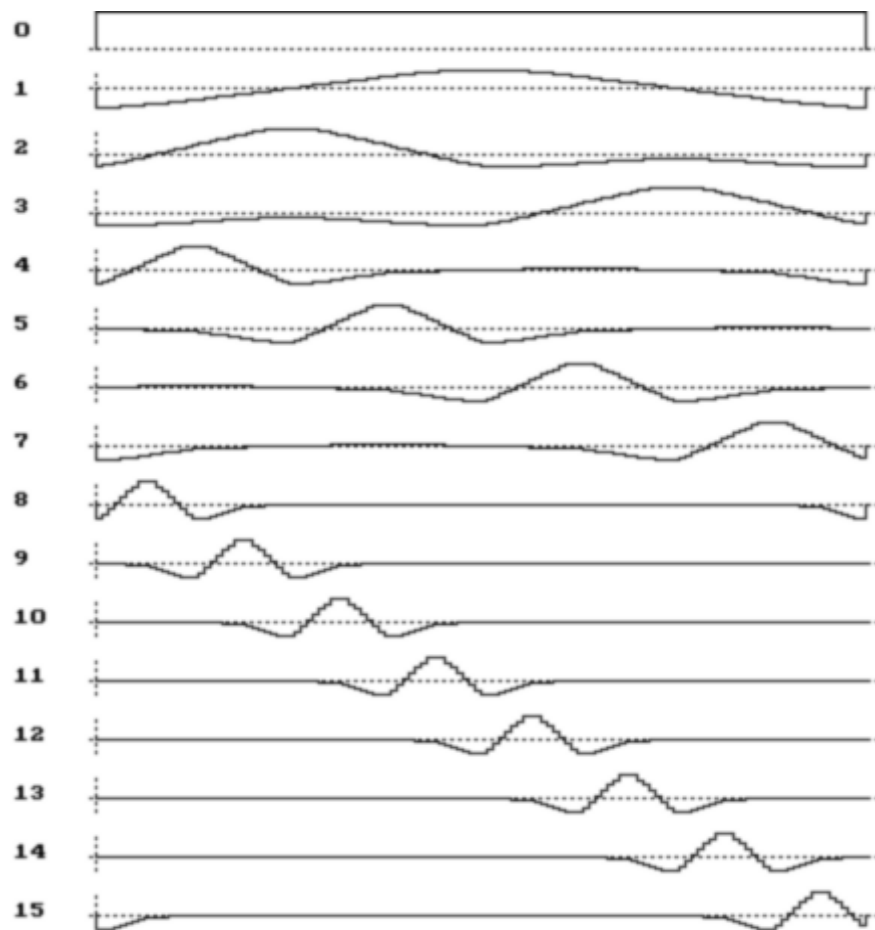
Utvorme maticu A prestriedaním riadkov $\tilde{\mathbf{H}}_m \tilde{\mathbf{G}}_m$, filtračných matíc pre analýzu. A z nej utvorme maicu A^* , kde sú koeficienty filtrov sú “useknuté” iba na jednej strane:

$$A^* = \begin{pmatrix} \tilde{h}(0) & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(2) & \tilde{h}(3) & \dots & \dots \\ \tilde{g}(0) & \tilde{g}(1) & \tilde{g}(2) & \tilde{g}(3) & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \tilde{h}(0) & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(2) & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & \tilde{h}(0) & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(2) & \tilde{h}(3) \\ & & & \tilde{g}(0) & \tilde{g}(1) & \tilde{g}(2) & \tilde{g}(3) \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & \dots & \dots & \tilde{h}(0) & \tilde{h}(1) \\ & & & \dots & \dots & \tilde{g}(0) & \tilde{g}(1) \end{pmatrix}$$

Matica A^* je singulárna, avšak použitím posunutej matice A je možné nájsť inverznú maticu s odpovedajúcou štruktúrou. Výsledné filtre potom môžeme použiť pri rekonštrukcii.

$$A^{**} = \begin{pmatrix} \tilde{h}(1) & \tilde{h}(2) & \tilde{h}(3) & \dots & \dots \\ \tilde{g}(1) & \tilde{g}(2) & \tilde{g}(3) & \dots & \dots \\ 0 & \tilde{h}(0) & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(2) & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & \tilde{h}(0) & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(2) & \tilde{h}(3) & 0 \\ & & & \tilde{g}(0) & \tilde{g}(1) & \tilde{g}(2) & \tilde{g}(3) & 0 \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & \dots & \dots & \tilde{h}(0) & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(2) \\ & & & \dots & \dots & \tilde{g}(0) & \tilde{g}(1) & \tilde{g}(2) \end{pmatrix}$$

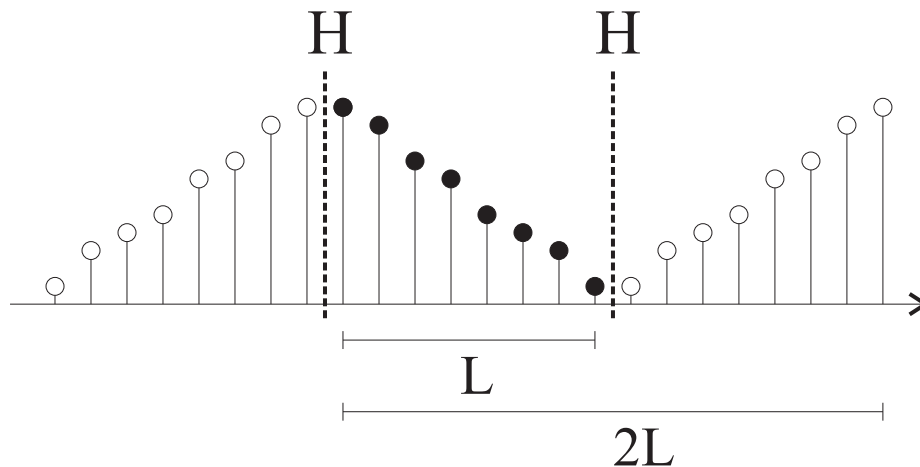
Vplyv periodického rozšírenia na tvar bázových funkcií.



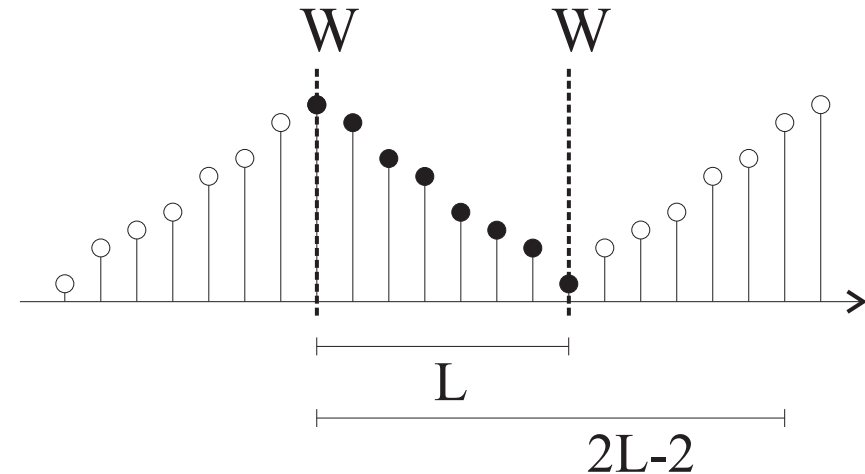
Prvých 32 bázových funkcií diskkrétnej waveletovej bázy o veľkosti $N=128$ pre FBI(9,7) wavelet

Druhy symetrického rozšírenia signálu

I) polbodová symetria(H)



II) celobodová symetria (W)

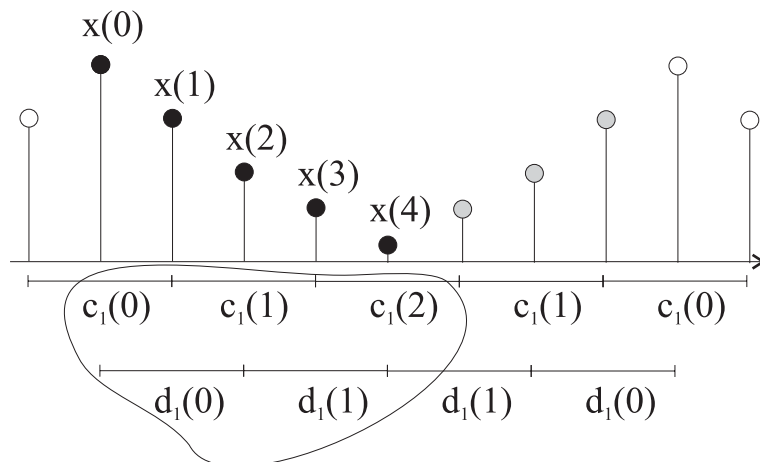


Pre aké filtre(sekvencie $h_{mr}(n), g_{mr}(n)$) použiť ktorú symetrizáciu?

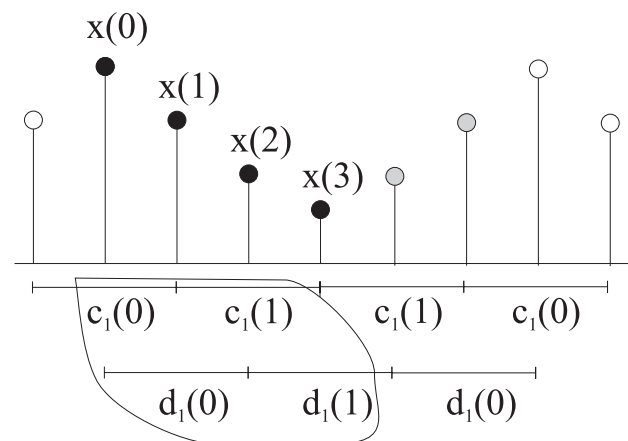
- a) $h_{mr}(n), g_{mr}(n)$ majú párnú dĺžku(t.j. sami sú H symetrické) $\rightarrow$ typ H
- b) $h_{mr}(n), g_{mr}(n)$ majú nepárnu dĺžku(t.j. sami sú W symetrické) $\rightarrow$ typ W

Typ symetrizácie musí byť zhodný aby rozšírený signál po podvzorkovaní danú symetriu nestratil.

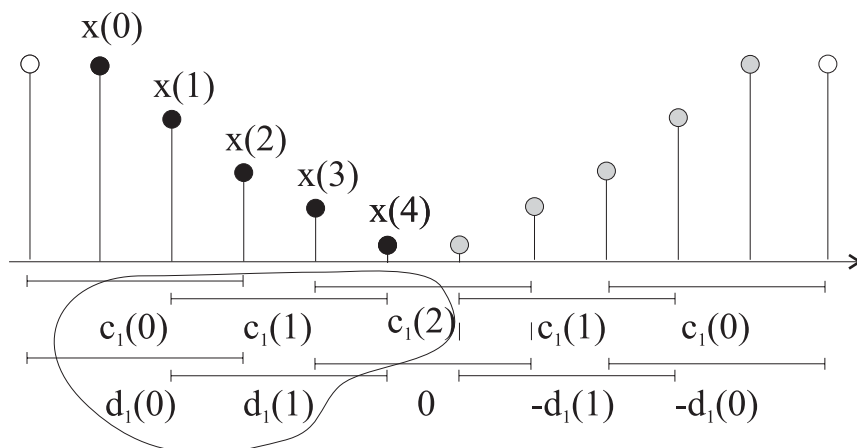
Stred fíltrov a reprezentácia signálu s párnou/nepárnou dĺžkou



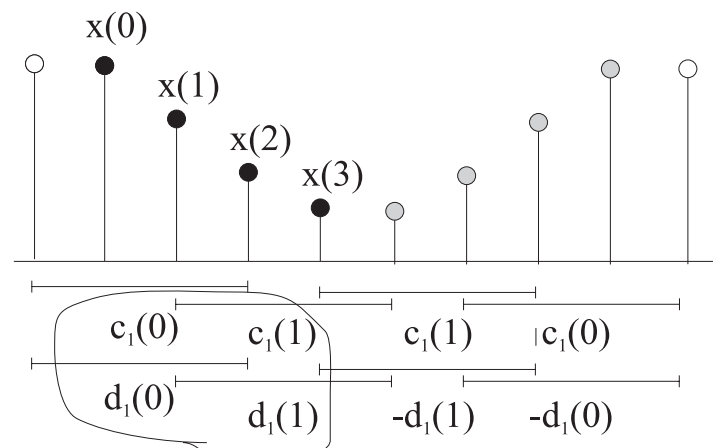
a) symetria W, nepárna dĺžka signálu(5)



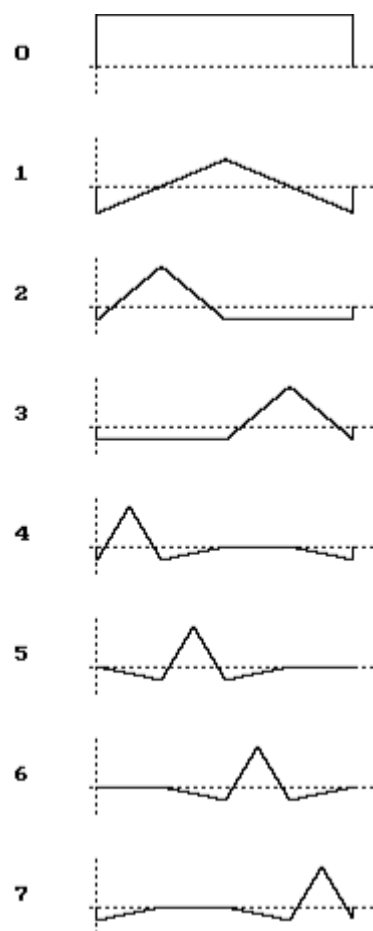
b) symetria W, párna dĺžka signálu(4)



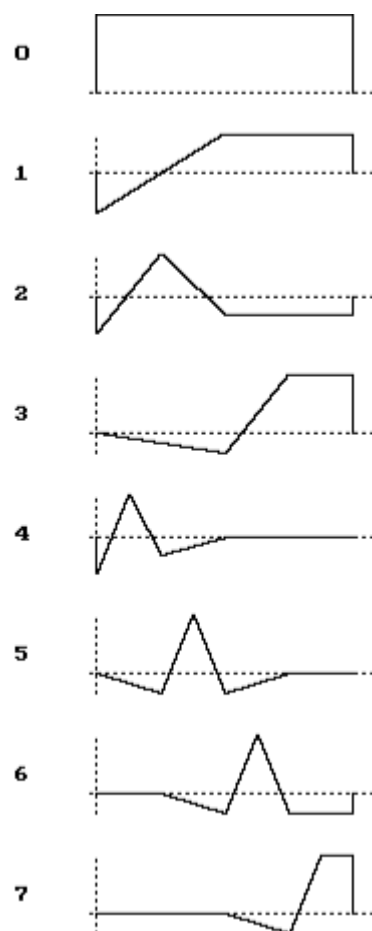
c) symetria H, nepárna dĺžka signálu(5)



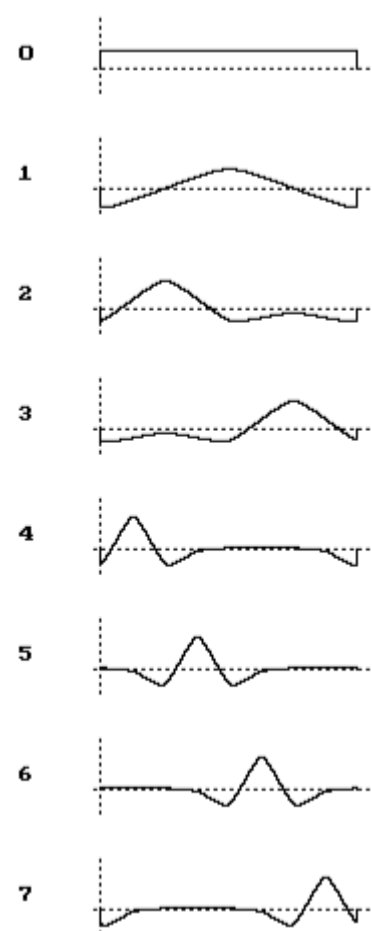
d) symetria H, párna dĺžka signálu(4)



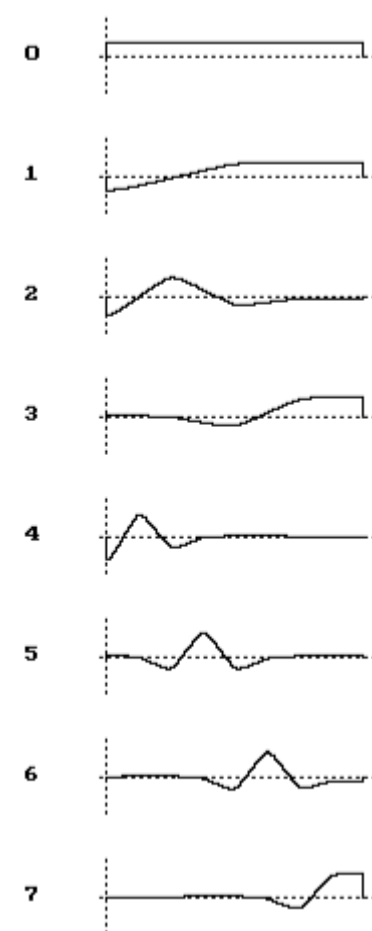
a) CDF(2,2)



b) CDF(2,2) + SYM



c) FBI(9,7)



d) FBI(9,7) + SYM

Vplyv symetrického rozšírenia na tvar bazových funkcii 1D DWT. Zobrazených je prvých osem bazových funkcii, veľkosť bázy je $N=128$.

Priama extrapolácia

Doplnenie nulami a symetrické rozšírenie sú vlastne základné extrapolačné metódy.

Ak v matici A v tvare:

$$A = \begin{pmatrix} \tilde{h}(0) & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(2) & \tilde{h}(3) & \dots & \dots \\ \tilde{g}(0) & \tilde{g}(1) & \tilde{g}(2) & \tilde{g}(3) & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \tilde{h}(0) & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(2) & \dots \\ 0 & 0 & \tilde{g}(0) & \tilde{g}(1) & \tilde{g}(2) & \dots \\ & & \dots & & & \dots \end{pmatrix}$$

budeme považovať prvý stĺpec za tú časť ktorá “prečnieva” na začiatku, t.j. predstihuje signal, potom extrapoláciu môžeme vyjadriť nasledovne:

- 1) Doplnenie nulami – vynechať prvý stĺpec A, označme ho A(:1)
- 2) Konštantná extrapolácia – vynecháme A(:1) a pridáme ho k A(:2), t.j. $A(:2) = A(:2) + A(:1)$
- 3) Lineárna extrapolácia - vynecháme A(:1) a
 $A(:2) = A(:2) + 2 * A(:1)$, $A(:3) = A(:3) - 1 * A(:1)$
- 4) Kvadratická extrapolácia - vynecháme A(:1) a
 $A(:2) = A(:2) + 3 * A(:1)$, $A(:3) = A(:3) - 3 * A(:1)$, $A(:4) = A(:4) + 1 * A(:1)$