Vlastnosti funkcie mierky a waveletov

$\varphi(t), \psi(t)$ - funkcia mierky a wavelet spĺňajúca relácie zmeny rozlíšenia

$h(n), g(n)$ - koeficienty pre zmenu rozlíšenia $h_{mra}(n)$, $g_{mra}(n)$, predstavujú impulzovú odpoveď FIR filtrov

$H(\omega), G(\omega)$ - DTFT koeficientov $h(n)$ a $g(n)$

<u>Teorém 1</u> : Ak platí $\int \varphi(t)dt \neq 0$ potom $\sum_n h(n) = \sqrt{2}$. Pozn.: podmienka $\int \varphi(t)dt \neq 0$ je nutná aby MRA bola kompletná.

<u>Teorém 2</u> : Ak celočíselné posuny $\varphi(t)$ sú navzájom ortonormálne, t.j. $\int \varphi(t)\varphi(t-k)dt = \delta(k)$ potom $\sum_n h(n)h(n-2k) = \delta(k)$.

Dôsledky:

$$\sum_n h(2n) = \sum_n h(2n+1) = \sqrt{2}/2$$

$$\sum_n |h(n)|^2 = 1$$

<u>Teorém 3</u> : Ak $\varphi(t)$ má kompaktnú podporu na intervale $\langle 0, N-1 \rangle$ a $\varphi(t-k)$ sú lineárne nezávislé, potom $h(n)$ má kompaktnú podporu na $0 \leq n \leq N-1$, t.j. $h(n) = 0$ pre $n < 0$ a pre $n > N-1$, dĺžka sekvencie $h(n)$ je N.

Vlastnosti $\varphi(t), \psi(t)$	Vlastnosti $h(n), g(n)$	Vlastnosti $H(\omega), G(\omega)$	Poznámka
$\int \varphi(t)dt = 1$	$\sum_n h(n) = \sqrt{2}$	$H(0) = \sqrt{2}$	Teorém 1
$\int \varphi(t)\varphi(t-k)dt = \delta(k)$	$\sum_n h(n)h(n-2k) = \delta(k)$ ak $k = 0$ platí $\sum_n \lvert h(n)\rvert^2 = 1$	$\lvert H(\omega)\rvert^2 + \lvert H(\omega+\pi)\rvert^2 = 2$	Teorém 2
$\sum_l \varphi(t-l) = \sum_l \varphi(l) = 1$	$\sum_n h(2n) = \sum_n h(2n+1)$	$H(\pi) = 0$	
$\int \psi(t)dt = 0$	$\sum_n g(n) = 0$	$G(0) = 0$	
$\int \varphi(t-n)\psi(t-m)dt = 0$	$g(n) = \pm(-1)^n h(M-n)$	$\lvert G(\omega)\rvert = \lvert H(\omega + M\pi)\rvert$	M je nepárne
	$\sum_n h(n)g(n-2k) = 0$	$\lvert H(\omega)\rvert^2 + \lvert G(\omega)\rvert^2 = 2$	

Tab.1: Prehľad vlastností pri ortonormálnych WR a DWT

- Aby mohli byť splnené podmienky pre $h(n)$, treba aby *N*, dĺžka $h(n)$ bola párna.
- Ak $h(n)$ spĺňa uvedené podmienky, sú zaručené iba základné vlastnosti $\varphi(t)$ (integrovateľnosť, ortonormalitu, ...) pričom $\varphi(t)$ môže mať extrémne neregulárny, prípadne fraktálový charakter.
- Pri návrhu $h(n)$ s dĺžkou *N*, ostáva po splnení nutných *N/2+1* podmienok ešte *N/2-1* stupňov voľnosti. Tieto môžeme využiť aby $\varphi(t), \psi(t)$ resp. $h(n), g(n)$ mali požadované vlastnosti, ako napr. istú regularitu, aproximačné vlastnosti ...

Pozn.1: nutných *N/2+1* podmienok je:

a) 1.podmienka: $\sum_n h(n) = \sqrt{2}$ kvôli existencii $\varphi(t)$

b) *N/2* podmienok kvôli ortonormalite $\varphi(t)$:

$$\sum_n h(n)h(n-2k) = \delta(k) \qquad k = 0,1,\ldots,N/2-1$$

Pozn.2: Nech $|H(\omega)|^2 + |H(\omega+\pi)|^2 = 2$. Označme $P(\omega) = |H(\omega)|^2$. Potom P je tzv. *Polpásmový filter* t.j. v Z rovine platí : $P(z) + P(-z) = 2$

Kaskádové algoritmy, generovanie $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ vo frekvenčnej a časovej oblasti.

Ako vypočítať $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ ak poznáme koeficienty pre zmenu mierky?

Vychádzajme z rovníc:

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n) \varphi(2t - n) \qquad \psi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{mr}(n) \varphi(2t - n)$$

Tieto rovnice môžeme riešiť *iteračne*, pričom ak postup bude konvergovať k pevnému bodu, potom je pevný bod hľadaným riešením. Iterácie sú definované:

$$\varphi^{(k+1)}(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n) \varphi^{(k)}(2t - n) \qquad \psi^{(k+1)}(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n) \psi^{(k)}(2t - n)$$

Uvedený iteračný postup sa nazýva aj *kaskádový algoritmus*. Hľadajme teraz riešenie vo frekvenčnej oblasti.

Použitím Fourierovej transformácie dostaneme:

$$\Phi^{(k+1)}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} H_{mr}(\omega/2)\, \Phi^{(k)}(\omega/2)$$

riešením tejto rovnice pre $k \to \infty$ dostávame

$$\Phi^{(\infty)}(\omega) = \Phi^{\infty}(0) \prod_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} H_{mr}\left(\omega/2^{k}\right) \right]$$

Ak táto limita existuje a je spojitá v $\omega = 0$ potom $\Phi(\omega) = \Phi^{(\infty)}(\omega)$. Analogicky:

$$\Psi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} G_{mr}(\omega/2) \prod_{k=2}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} H_{mr}\left(\omega/2^{k}\right) \right]$$

Výsledok oboch prípadoch nezávisí od tvaru $\varphi^{(0)}(t)$ ale iba od hodnoty $\Phi^{(k)}(0) = \int \varphi^{(k)}(t)dt = A_0 > 0$, ktorá je invariantná vzhľadom na iterácie.

Momentové vlastnosti

k-te momenty $\varphi(t), \psi(t)$ sú definované:

$$m_\varphi(k) = \int t^k \varphi(t) dt \qquad m_\psi(k) = \int t^k \psi(t) dt$$

diskrétne k-te momenty $h(n), g(n)$ sú definované:

$$\mu_h(k) = \sum_n n^k h(n) \qquad \mu_g(k) = \sum_n n^k g(n)$$

z diskrétnych momentov μ_h, μ_g môžeme vypočítať *spojité momenty* pomocou:

$$m_\varphi(k) = \frac{1}{(2^k - 1)\sqrt{2}} \sum_{l=1}^{k} \binom{k}{l} \mu_h(l) m_\varphi(k-l) \qquad m_\psi(k) = \frac{1}{2^k \sqrt{2}} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \mu_g(l) m_\varphi(k-l)$$

na začiatku výpočtu si treba uvedomiť, že $m_\varphi(0) = 1$.

Počet nulových momentov $m_\psi(k)$ dáva informáciu o plochosti $H(\omega)$ a hladkosti $\psi(t)$ ktoré rastú priamo úmerne. Okrem toho, čím viac máme waveletových momentov je nulových, tým lepšiu aproximáciu získame pri projekcii signálu $f(t) \in L^2(R)$ do V_m.

Čím väčší počet nulových momentov $m_\varphi(k)$ je dôležitý pri aproximácii signálu $f(t) \in L^2(R)$ vo V_m pomocou vzoriek $f(t)$ namiesto projekčných koeficientov. Takisto sa zlepšuje aj symetria $\varphi(t)$.

Príkladom waveletového systému, ktorého dizajn je založený na momentových vlastnostiach $\varphi(t), \psi(t)$ sú tzv. *Coiflets.* Je to ortonormálny systém v ktorom sa snažíme nulovať momenty waveletu a rovnako aj funkcie mierky:

$$m_\varphi(k) = 0, \quad m_\psi(k) = 0 \qquad k = 1,2,\ldots,L-1$$

K-regulárne filtre

FIR filter s impulzovou odpoveďou $h(n)$, ktorá spĺňa podmienky v Tab.1 sa nazýva *K- regulárny* vtedy ak platia nasledovné ekvivalentné tvrdenia:

1) $H(\omega)$ má *K-násobnú nulu* v $\omega = \pi$

2) prvých K-diskrétnych aj spojitých waveletových momentov je nulových, t.j.: $m_\psi(k) = 0$, $\mu_\psi(k) = 0$, pre $k = 0,1,\ldots,(K-1)$

3) polynomické sekvencie stupňa $\leq (K-1)$ môžu byť vyjadrené lineárnou kombináciou posunov $h(n)$.

4) polynómy stupňa $\leq (K-1)$ môžu byť vyjadrené lineárnou kombináciou posunov $\varphi(t)$

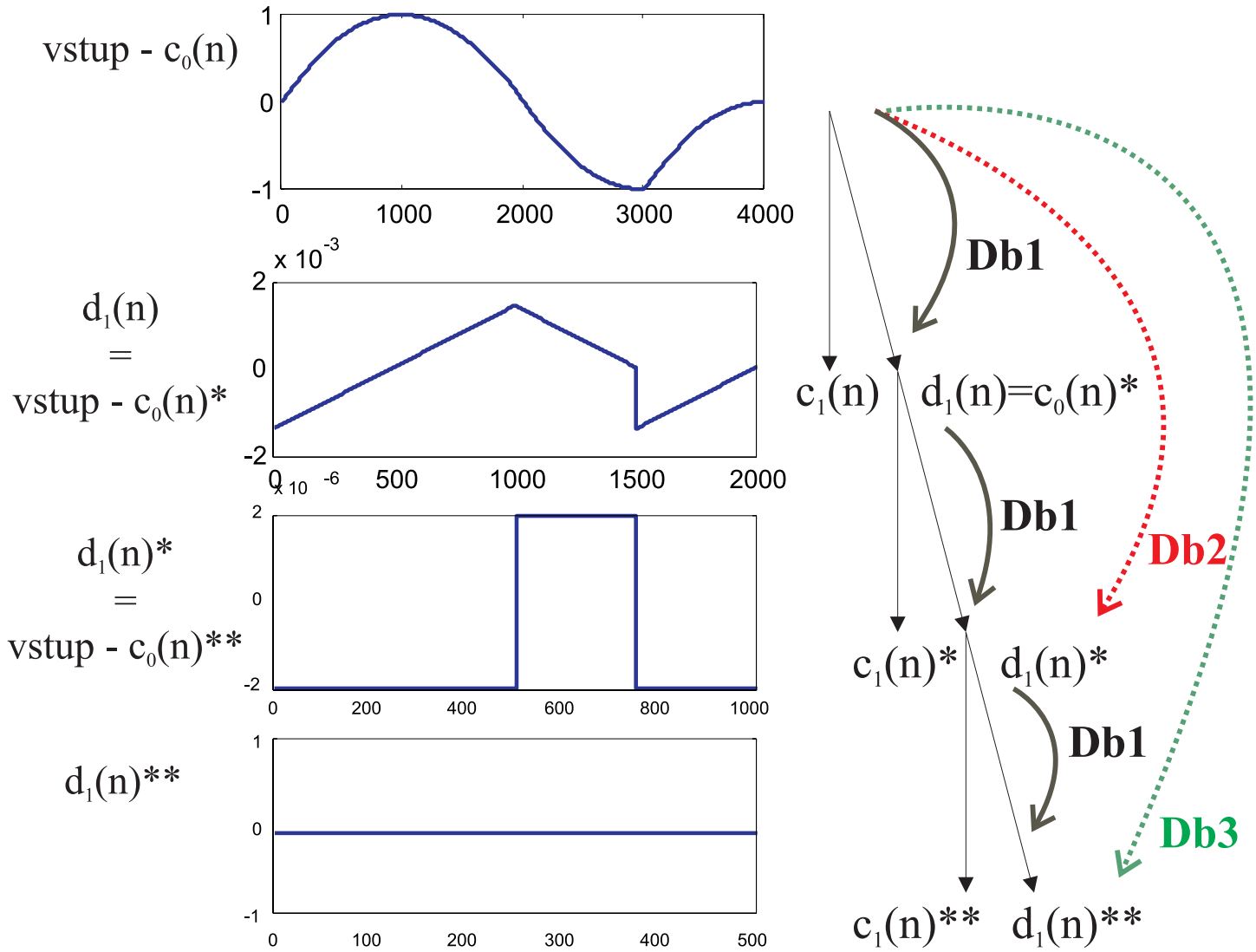
Ak je $h(n)$ K-regulárny, potom Z transformáciu $h(n)$: $H(z)=\sum_n h(n)z^{-n}$ môžeme napísať v tvare:

$$H(z)=\left(\frac{1+z^{-1}}{2}\right)^K L(z)$$

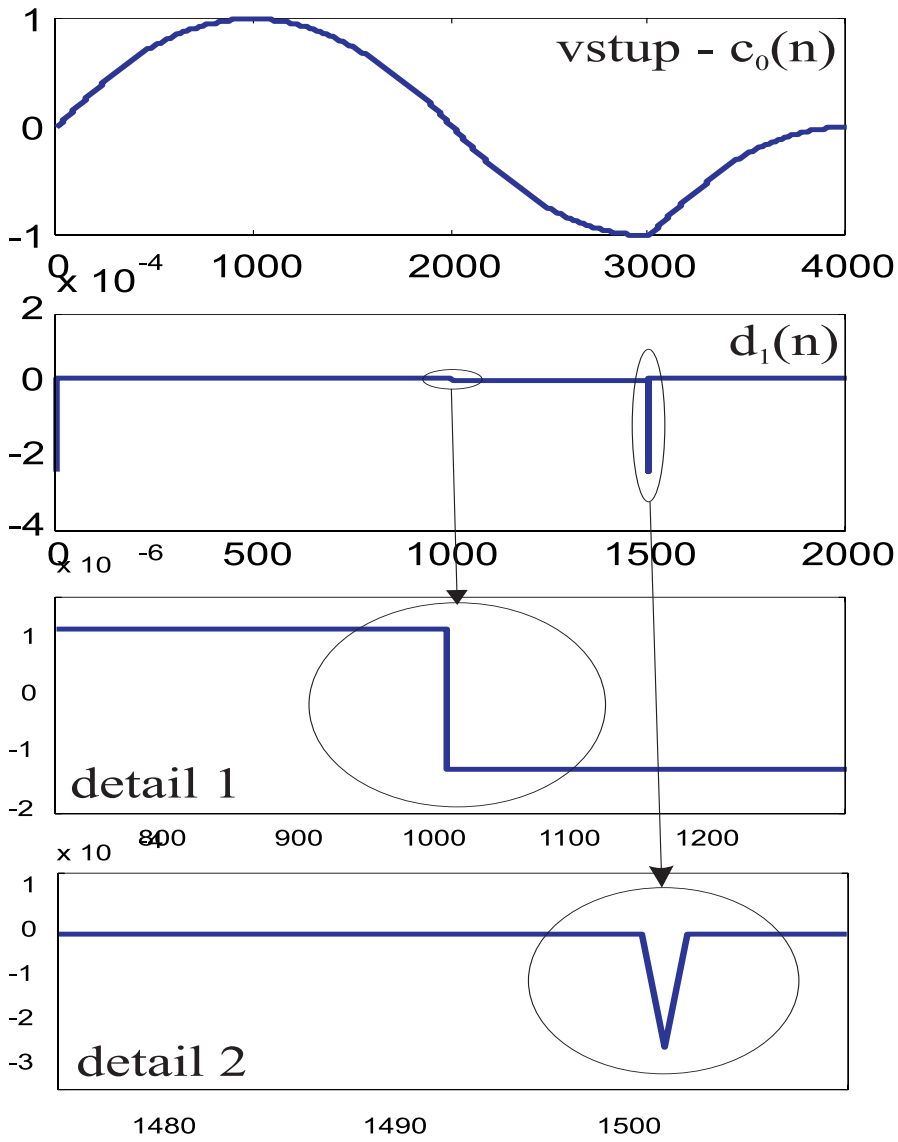
pričom $L(z)$ nemá žiadne póly v $z=e^{i\pi}$. Ak *N* je dĺžka filtra $h(n)$, potom polynóm $H(z)$ je stupňa *N-1* a $L(z)$ stupňa *N-1-K*. Aby $L(z)$ zabezpečilo splnenie nutných *N/2* podmienok pre ortogonalitu, musí byť aspoň stupňa *N/2-1*. Potom $K \le N/2$.

Zároveň z podmienky existencie $\varphi(t)$ automaticky platí, že $h(n)$ je aspoň $K=1$ regulárne. Takže platí :

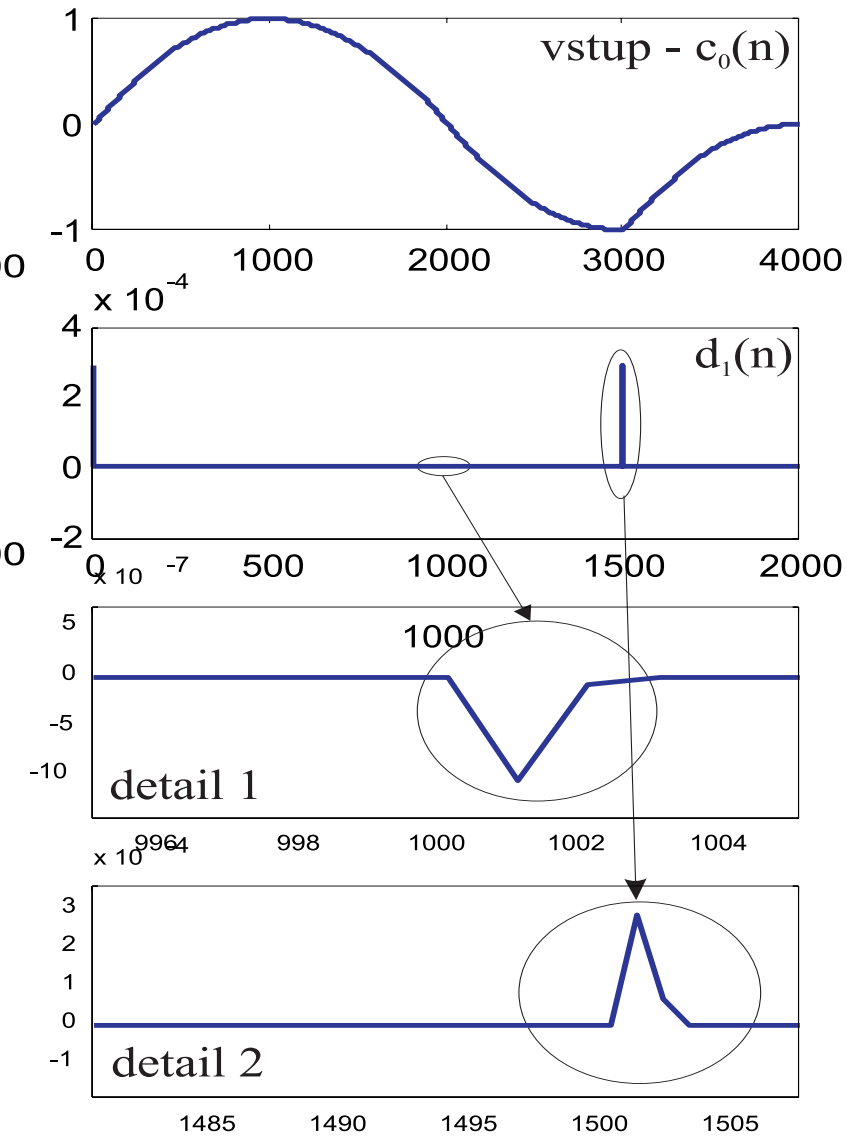
$$1 \le K \le N/2$$



Vplyv momentových vlastností waveletov na reprezentáciu polynómov vo waveletovom spektre na príklade DbN waveletov: opakované vykonávanie DWT Db1 transformácie.



a)DWT s Db2, zobrazené $d_1(n)$



a)DWT s Db3, zobrazené $d_1(n)$

Príklady ortogonálnych waveletových systémov

- Haarov wavelety
- Sinc wavelety
- Spline wavelety(semiortogonálne) a Battle-Lemarie
- wavelety(ortogonalizovený spline s nekonečnou podporou)
- Daubechies wavelety
- Coiflets

Príklady návrhu ortogonálnych waveletov

- Ortogonalizácia (napr. Battle Lemarie)

- *Parametrizácia koeficientov mierky

- *Spektrálna faktorizácia – wavelety s K nulovými waveletovými momentmi (napr. Daubechies)
  Pozn. Analogicky sú navrhované *biortogonálne* CDF(Cohen-Daubechies-Feauveau) spline wavelety

- wavelety s K nulovými waveletovými momentmi a K nulovými momentmi funkcie mierky(Coiflets)

- wavelety s minimalizovanými momentmi(Odegard)

- *lifting schéma*

Parametrizácia koeficientov mierky

Systém 0. rádu - dĺžka $h(n)$ je 2

Nemá žiadne stupne voľnosti. Podmienky sú:

$$h(0)+h(1)=\sqrt{2}$$

$$h^2(0)+h^2(1)=1$$

Riešením je $h(n)=\left\{\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}/2\right\}$

Systém 1. rádu - dĺžka $h(n)$ je 4

Má jeden stupeň voľnosti. Podmienky sú:

$$h(0)+h(1)+h(2)+h(3)=\sqrt{2} \qquad h^2(0)+h^2(1)+h^2(2)+h^2(3)=1$$

$$h(0)h(2)+h(1)+h(3)=0$$

Riešením je

$$h(0)=(1-\cos(\alpha)+\sin(\alpha))/(2\sqrt{2}) \qquad h(1)=(1+\cos(\alpha)+\sin(\alpha))/(2\sqrt{2})$$

$$h(3)=(1+\cos(\alpha)-\sin(\alpha))/(2\sqrt{2}) \qquad h(2)=(1-\cos(\alpha)-\sin(\alpha))/(2\sqrt{2})$$

Pozn:

Ak $\alpha=0,\ \pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2$ → Haarov wavelet

Ak $\alpha=\pi/3$ → Daubechies2 wavelet

Spline wavelety

Koeficienty $h(n)$ pre spline wavelety sa tvoria pomocou Pascalovho trojuholníka na určenie kombinačných čísiel nasledovne:

$h_{S1}(n) = (1,2,1)\frac{\sqrt{2}}{4}$ - lineárny (spline prvého rádu)

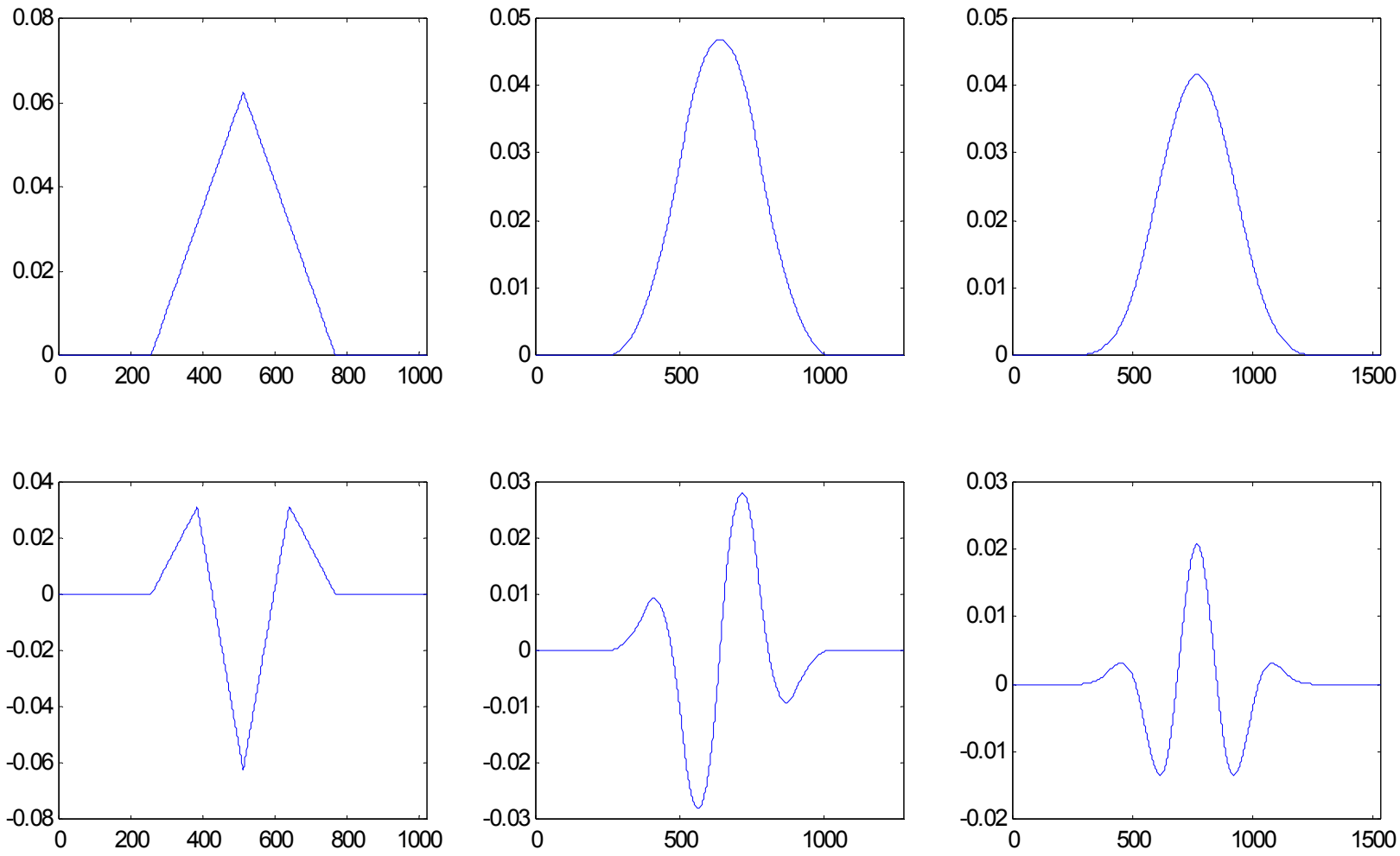
$h_{S2}(n) = (1,3,3,1)\frac{\sqrt{2}}{8}$ - kvadratický

$h_{S3}(n) = (1,4,6,4,1)\frac{\sqrt{2}}{16}$ - kubický

$h_{S4}(n) = (1,5,10,10,5,1)\frac{\sqrt{2}}{32}$ - ...

Vlastnosti:

- symetrické $h(n)$, symetrické bázové funkcie
- generujú semiortogonálny waveletový systém



Lineárne, kvadratické a kubické splinové funkcie mierky a základné wavelety

Návrh waveletov s K nulovými momentmi

Nech $h(n)$ s dĺžkou N je *K-regulárny filter* . Potom:

$$H(\omega) = \left(\frac{1+e^{i\omega}}{2}\right)^3 L(\omega)$$

spĺňa $|H(\omega)|^2 + |H(\omega+\pi)|^2 = 1$ vtedy a len vtedy, ak

$$|L(\omega)|^2 = P\left(\sin^2(\omega/2)\right)$$

kde

$$P(y) = \sum_{k=0}^{K-1} \binom{K-1+k}{k} y^k + y^K R(1/2 - y)$$

a R(y) je *antisymetrický polynóm* taký, že $P(y) \geq 0$ pre $y \in \langle 0,1 \rangle$. Ak R(y)=0, potom dostávame wavelety s maximálnym počtom nulových momentov *N*, tzv. *Daubechies* wavelety.

Ak *N*> *2K* potom R(y) nám vyjadruje stupne voľnosti, ktoré môžeme použiť na modifikáciu vlastností waveletov.

Pri výpočte $H(\omega)$ dostaneme potrebné $L(\omega)$ *spektrálnou faktorizáciou* $|L(\omega)|^2$.

Autokorelácia a spektrálna faktorizácia.

Autokoreláciou sekvencie $h(n)$ budeme nazývať sekvenciu:

$$p(n) = \langle h(k), h(k-n) \rangle$$

Použitím DTFT dostávame:

$$P(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(n) e^{-i\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) h^*(k-n) e^{-i\omega n} = H^*(\omega) H(\omega) = |H(\omega)|^2$$

Vyjadrením v Z-rovine dostaneme:

$$P(z) = H_*(z^{-1}) H(z)$$

, kde označenie * znamená konjugáciu koeficientov, nie celej funkcie. Vidíme, že ak z_k je nula $P(z)$ potom nula je aj $1/z_k^*$, t.j. nuly sa vyskytujú iba v pároch. Naviac ak $h(n)$ je reálne, potom $P(z)$ má nuly aj v z_k^* a $1/z_k$.

Platí:

$$P(z) = \alpha \prod_{i=1}^{N_1} \left(\left(1 - z_{1_i} z^{-1}\right)\left(1 - z_{1_i}^{*} z\right)\right) \prod_{i=1}^{N_2} \left(\left(1 - z_{2_i} z^{-1}\right)\left(1 - z_{2_i}^{*} z\right)\right)$$

,kde N_1 je počet párov núl na jednotkovej kružnici(platí $\left|z_{1_i}\right| = 1$, pár je vlastne dvojnásobný koreň) a N_2 je počet párov núl mimo jednotkovej kružnice (platí $\left|z_{2_i}\right| < 1$).

Pre danú $P(z)$ sa vyhovujúce $H(z)$ nazývajú *spektrálne faktory* $P(z)$. Tieto faktory nie su jedinečné, pričom ortogonálne riešenie získame použitím iba jednej nuly z každého páru núl $P(z)$. Tieto riešenia majú rovnakú magnitúdovú charakteristiku, líšia sa iba vo fázovej charakteristike. Dôležité je *riešenie s minimálnou fázou*, t.j. pri vytváraní $H(z)$ použijeme iba nuly v a na jednotkovej kružnici. Potom:

$$H(z) = \sqrt{\alpha} \prod_{i=1}^{N_1} \left(1 - z_{1_i} z^{-1}\right) \prod_{i=1}^{N_2} \left(1 - z_{2_i} z^{-1}\right)$$

Príklad: Zistite koeficienty $h(n)$, pre Daubechies wavelety s minimálnou fázou ak N=6.

Riešenie: Chceme max. počet nulových momentov, t.j. K=3, R=0.

Potom $P(y) = 1 + 3y + 6y^2$,

$$y = \sin^2(\omega/2) = \frac{1}{2}(1-\cos(\omega)) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\left(e^{i\omega} + e^{-i\omega}\right)\right) = -\frac{1}{4}z + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z^{-1}$$

$$P(z) = \frac{3}{8}z^{-2} - \frac{9}{4}z^{-1} + \frac{19}{4} - \frac{9}{4}z + \frac{3}{8}z^2$$

nulové body sú

{0.28725-0.15289i, 2.71275+1.44389i
0.28725+0.15289i, 2.71275-1.44389i }

$$P(z) = \alpha\left(1 - (0.28725 - 0.15289\mathrm{i})z^{-1}\right)\left(1 - (0.28725 + 0.15289\mathrm{i})z\right)$$
$$\left(1 - (0.28725 + 0.15289\mathrm{i})z^{-1}\right)\left(1 + (0.28725 - 0.15289\mathrm{i})z\right)$$

α zistíme normovaním koeficientu pri najvyššej mocnine

$$\alpha = \frac{3}{8} \Big/ \left[(0.28725 + 0.15289\mathrm{i})(0.28725 - 0.15289\mathrm{i}) \right]$$

vytvoríme faktor s minimálnou fázou:

$$L(z) = \sqrt{\alpha}\ \left(1 - (0.28725 - 0.15289\mathrm{i})z^{-1}\right)\left(1 - (0.28725 + 0.15289\mathrm{i})z^{-1}\right)$$

Aby sme dostali ortonormálny systém, normujeme $H(z)$ faktorom $\sqrt{2}$, potom:

$$H(z) = \sqrt{2}\left(\frac{1+z}{2}\right)^3 L(z)$$

čo je numericky

$$H(z) = 0.33267\mathrm{z}^3 + 0.80689\mathrm{z}^2 + 0.45988\mathrm{z} - 0.13501 + 0.08544\mathrm{z}^{-1} + 0.03523\mathrm{z}^{-2}$$

Čo odpovedá nekauzálnemu filtru.

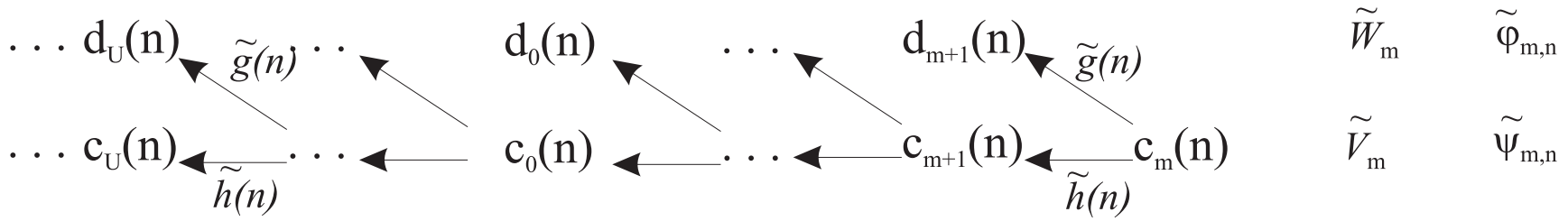
Kauzalitu dosiahneme vynásobením $H(z)$ faktorom z^{-3}, t.j. oneskorením $h(n)$ o 3 takty. Potom

$$h(n) = \{0.33267,\ 0.80689,\ 0.45988,\ -0.13501,\ 0.08544,\ 0.03523\}$$

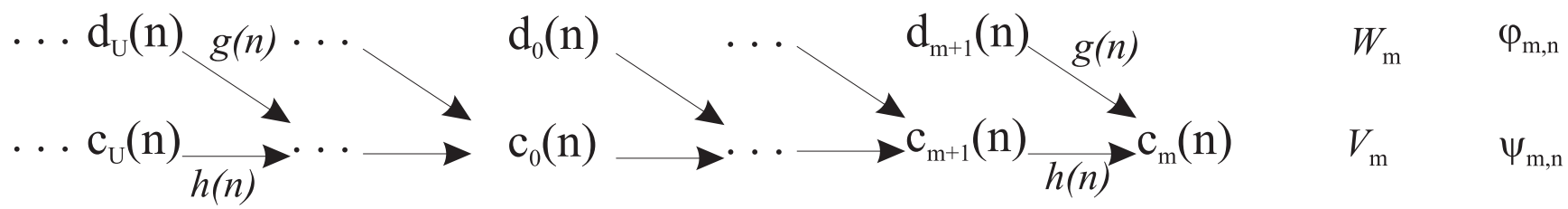
Biortogonálne wavelety a spektrálna faktorizácia

<u>Opakovanie: Biortogonálny rozklad a rekonštrukcia:</u>

Rozklad



Rekonštrukcia



Predpokladajme všeobecné riešenie faktorizácie $P(z)$ v tvare $P(z) = F(z)H(z)$.
Nulové body $P(z)$ označme z_i. Potom platia nasledovné pravidlá:

1) aby $F(z)$ a $H(z)$ boli prenosové funkcie *reálnych filtrov*, z_i a z_i^* musíme použiť v pároch

2) aby $F(z)$ a $H(z)$ boli prenosové funkcie filtrov s *Lineárnou fázou*, z_i a $1/z_i$ musíme použiť v pároch

3) Aby $F(z)$ a $H(z)$ mohli tvoriť *ortogonálne wavelety*, z_i a $1/z_i$ musíme použiť oddelene.

Zároveň platí:

Symetrický ortogonálny FIR filter s prenosovou funkciou $H(z)$, môže mať maximálne 2 nenulové koeficienty, pričom platí :

$$H(z) = \left(1 + z^{-N}\right) / \sqrt{2}$$

a N je nepárne.

Pri ***ortogonálnom*** riešení

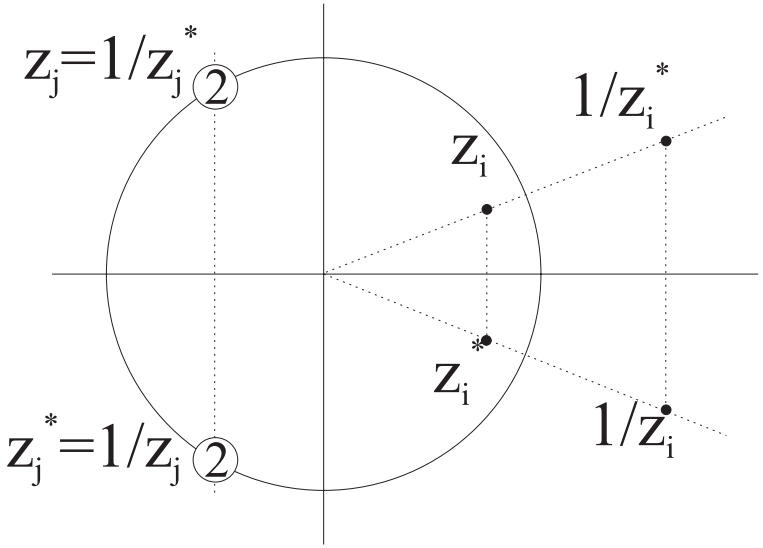
- Z dvojice $F(z), H(z)$ použijeme $H(z)$ s minimálnou fázou a z neho vygenerujeme ortogonálny systém

Pri ***biortogonálnom*** riešení

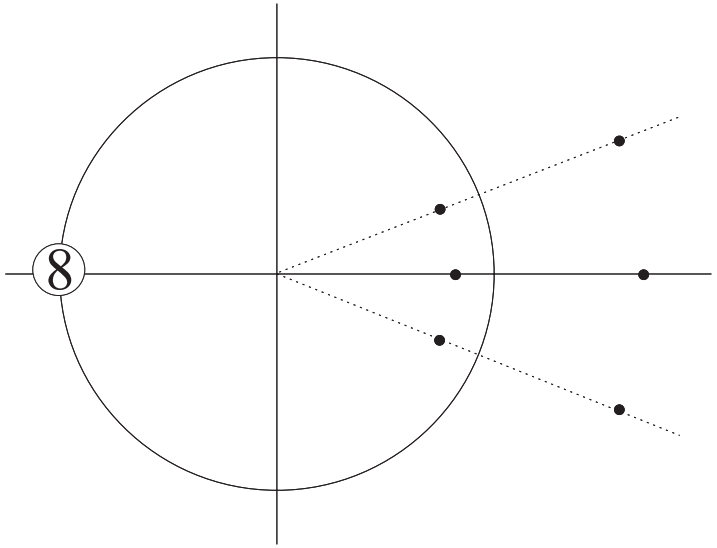
- Dvojicu $F(z), H(z)$ použijeme tak, že $H(z)$ a $\widetilde{H}(z) = F(z)$ budú spolu generovať biortogonálny systém

T.j. sú možné nasledujúce tvary $H(z)$ resp. $\widetilde{H}(z)$ FIR filtrov pre wavelety:

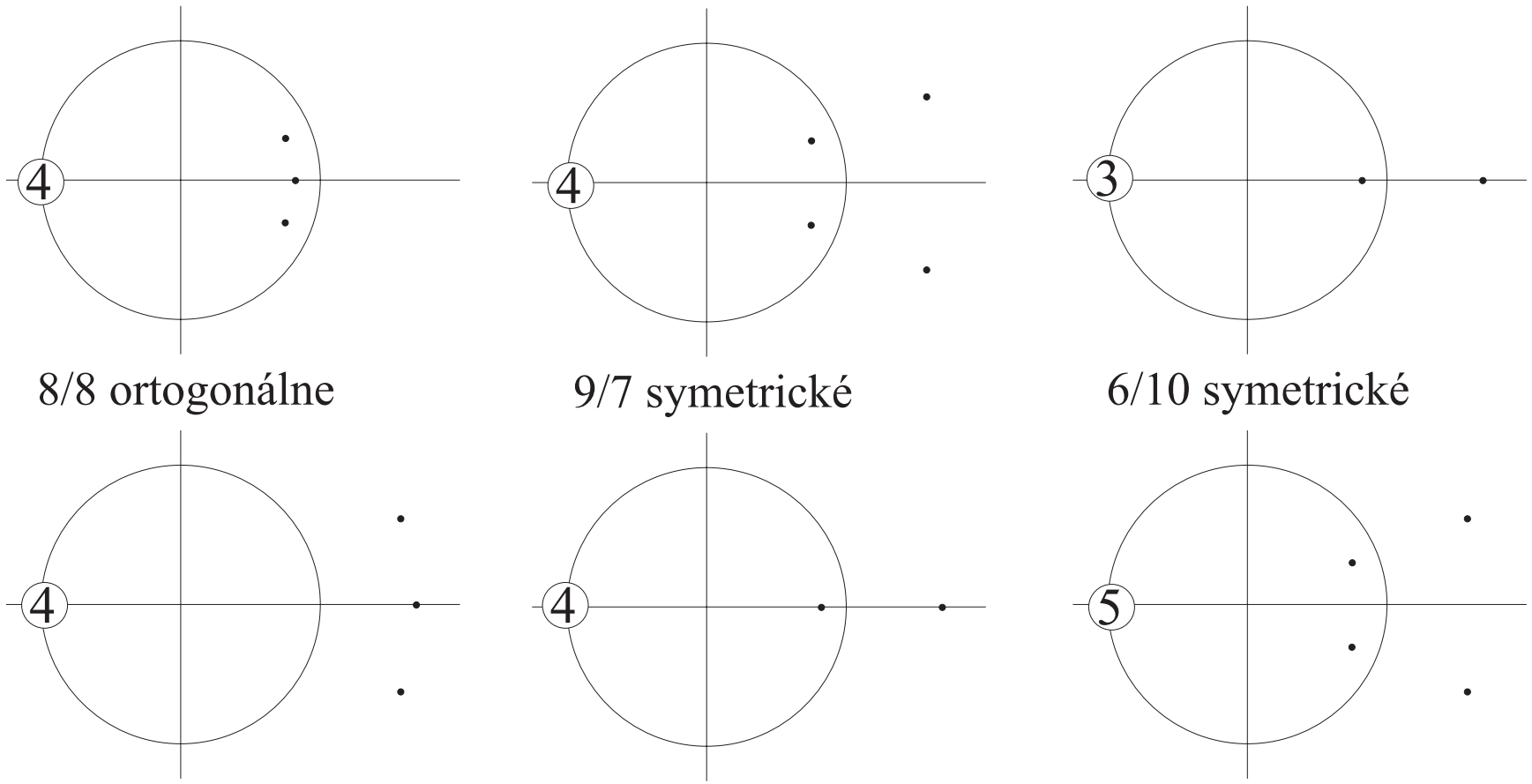
1) filtre pre ortogonálne wavelety, $h(n)$ je nesymetrické
2) filtre s lineárnou fázou, biortogonálne, symetrické $h(n), \widetilde{h}(n)$
   - oba sú s *nepárnou* dĺžkou impulzovej odpovede
   - oba sú s *párnou* dĺžkou impulzovej odpovede



Všeobecné umienstnenie núl P(z)



Umienstnenie núl pre maximálne hladký polpásmový filter so 14 nulami v P(z)



Príklady faktorizácie P(z) maximálne hladkého filtra so 14 nulami