Kompakcia energie diskrétnej transformácie

- Požadujeme aby energia spektrálnych koeficientov klesala čo najrýchlejšie
- Požadujeme aby bol signál vyjadrený čo najmenším počtom spektrálnych koeficientov

Kompakcia energie spektrálnych koeficientov vyjadruje mieru schopnosti dekorelovať závislosti v signále.

Max. dosiahnuteľná kompakcia energie

- *KLT*(Karhunen-Loewe Transformácia)
- *SWD*(Singular Value Decomposition) - signál dĺžky N môžeme vyjadriť pomocou $\sqrt{N}$ spektrálnych koeficientov

Nevýhody KLT a SWD

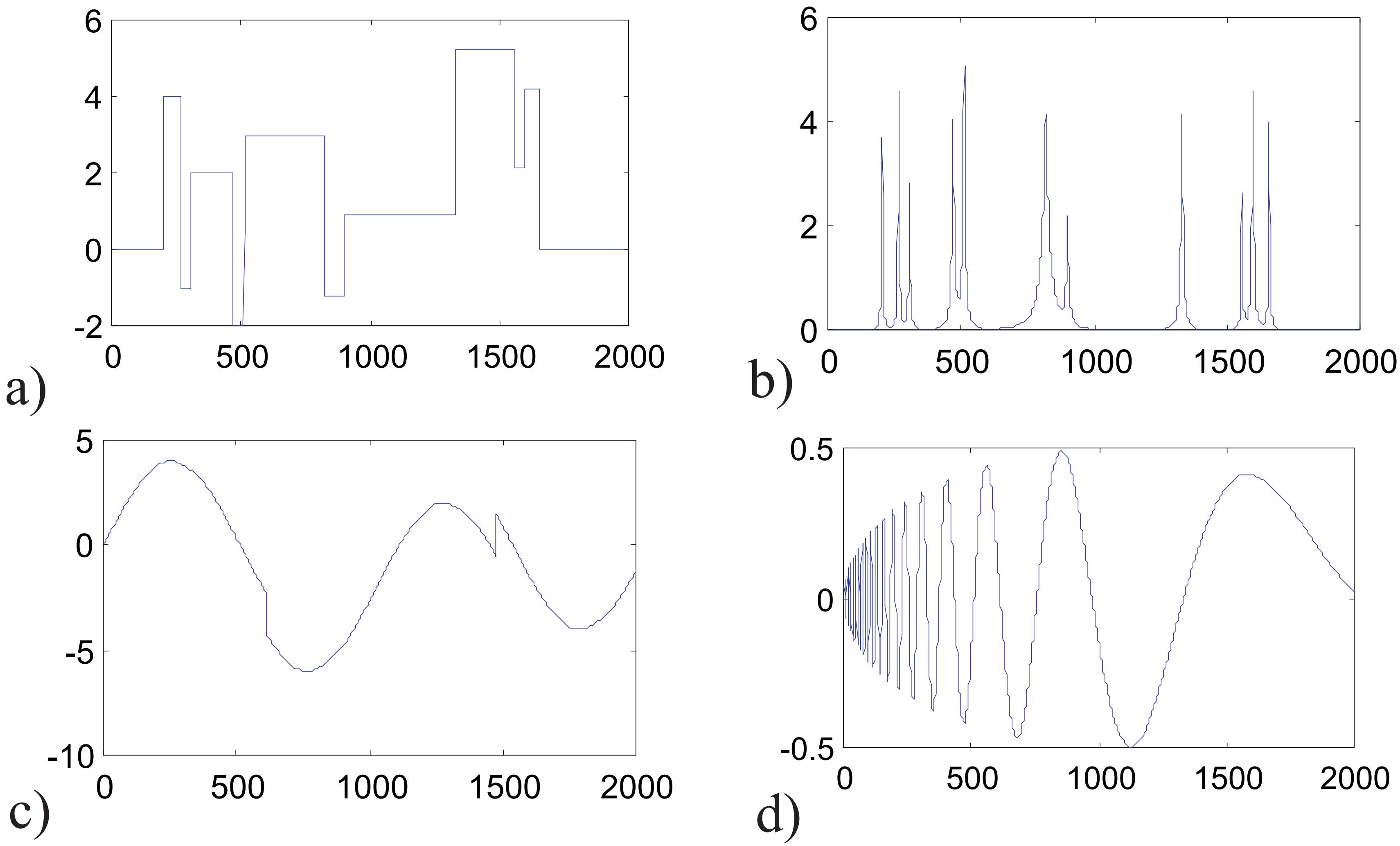
- Pre každý signál (resp. suboptimálne pre triedu signálov) je potrebné vypočítať individuálne transformačné jadro t.j. transformácie nie je *fixná*.
- Vo všeobecnosti neexistuje rýchly algoritmus výpočtu

DCT bola navrhnutá ako aproximácia KLT pre *Gauss-Markovovské procesy 1. rádu* s veľkým korelačným koeficientom (použitá v štandarde JPEG).

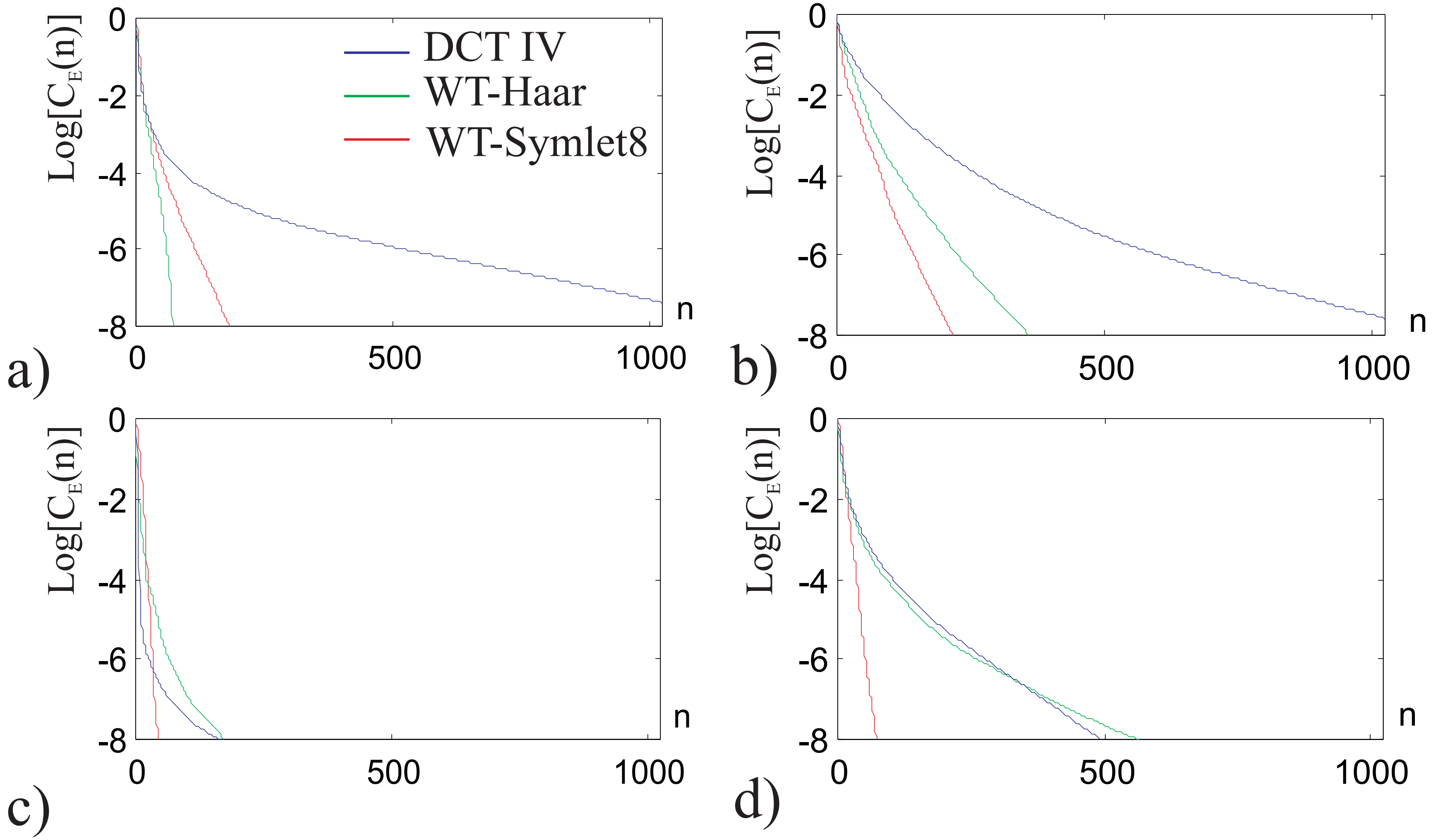
Kompakciu energie pre signál dĺžky N s N spektrálnymi koeficientami $X(i)$, môžeme vyjadriť napr. pomocou:

$$C_E(n) = \frac{\sum_{i=0}^{n} X_s(i)^2}{\sum_{i=0}^{N-1} X(i)^2}$$

, kde $X_s(i)$ je množina zostupne podľa energie utriedených spektrálnych koeficientov.



Príklady syntetických signálov s rôznym charakterom



Porovnanie kompakcie energie signálu pre DCT a WT

Hierarchia základných typov waveletov

Wavelety bez funkcie mierky
Príklad: Morletov wavelet
Použitie: SWT

Wavelety s nekonečnou regularitou
Príklad: Meyerov wavelet
Použitie: SWT, DWT s IIR
filtrami bez rýchleho algoritmu

Ortogonálne kompaktne podporované wavelety
Príklad: Daubechies wavelety
Použitie: SWT, DWT s rýchlym algoritmom

Biortogonálne symetrické wavelety
Príklad: Biortogon**álne spliny**
Použitie: SWT, DWT s rýchlym algoritmom

Vlastnosti ortonormálnych WR a DWT

Predpokladajme ortonormálnu MRA. Potom každú $f(t) \in L^2(R)$ potom môžeme vyjadriť superpozíciou

$$f(t) = \sum_{m,n \in Z} d_{m,n} \psi_{m,n}(t) \qquad d_{m,n} = \langle f(t), \psi_{m,n}(t) \rangle \quad m,n \in Z$$

to, že sa jedná o odpovedajúce reprezentácie signálu, označujeme ako

$$f(t) \leftrightarrow d_{m,n}$$

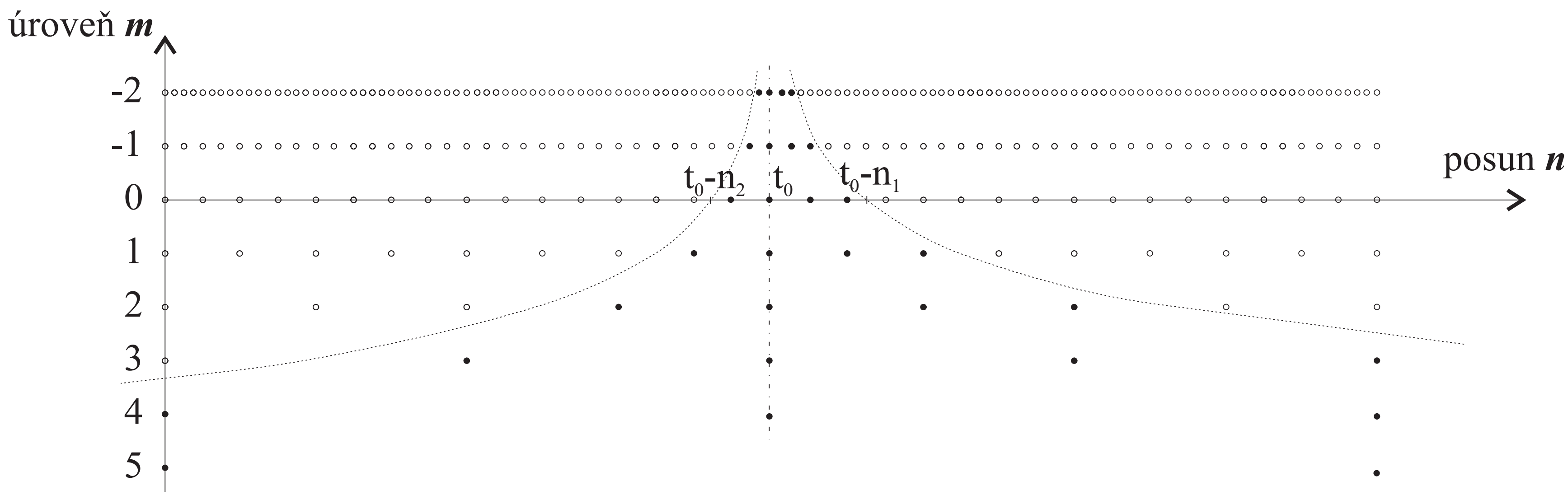
<u>Linearita</u>

Definujme operátor T ako $T[f(t)] = \{d_{m,n}\} = \langle f(t), \psi_{m,n}(t) \rangle$. Potom $\forall a,b \in R$ platí

$$T[a\, f(t) + b\, g(t)] = a\, T[f(t)] + b\, T[g(t)]$$

Lokalizácia

Keď zobrazíme koeficienty $d_{m,n}$ ako stredy okien príslušných waveletov $\psi_{m,n}$ v časovo frekvenčnej rovine, dostávame nasledovné *diadické vzorkovanie* časovo-frekvenčnej roviny:



Ako príklad je označený región koeficientov, ktoré sú ovplyvnené hodnotou signálu $f(t)$ v $t = t_0 = 16$, $\psi(t)$ má *kompaktnú podporu* na intervale $\langle -2.5, 1.5 \rangle$

a) **lokalizácia v čase**

Ak $\psi(t)$ má kompaktnú podporu na intervale $\langle n_1, n_2 \rangle$ potom $\psi_{m,n}$ má kompaktnú podporu na intervale $\left\langle (n+n_1)2^m, (n+n_2)2^m \right\rangle$. Platí:

1) informácie o signále $f(t)$ v čase t_0 je vyjadrená iba v koeficientoch $d_{m,n}$, pre ktorých indexy m, n platí: $2^{-m} t_0 - n_2 \leq n \leq 2^{-m} t_0 - n_1$.
2) koeficient d_{m_0, n_0} je ovplyvnený iba hodnotami $f(t)$ na intervale $t \in \left\langle (n_0 + n_1) 2^{m_0}, (n_0 + n_2) 2^{m_0} \right\rangle$

b) **lokalizácia vo frekvencii**

Nech $\Psi(\omega)$, Fourierova transformácia $\psi(t)$ má kompaktnú podporu na intervale $\langle \omega_{\min}, \omega_{\max} \rangle$. Potom $\Psi_{m,n}(\omega)$ má kompaktnú podporu na intervale $\langle \omega_{\min} / 2^m, \omega_{\max} / 2^m \rangle$:

1) frekvenčná zložka $F(\omega)$ v ω_0 ovplyvní $d_{m,n}$ na úrovniach m, pre ktoré $\log_2(\omega_{\min} / \omega_0) \leq m \leq \log_2(\omega_{\max} / \omega_0)$
2) koeficienty $d_{m_0, n}$ sú ovplyvnené iba frekvenčnými zložkami signálu $F(\omega)$, na intervale $\omega \in \left\langle \omega_{\min} / 2^{m_0}, \omega_{\max} / 2^{m_0} \right\rangle$

<u>Posun v čase</u>

Ak na vyjadrenie signálu stačia waveletové koeficienty $d_{m,n}$ iba to istej úrovne *M*, t.j. platí:

$$f(t) = \sum_{n \in Z} \sum_{m=-\infty}^{M} d_{m,n} \psi_{m,n}(t)$$

Potom pre posun signálu platí tzv. *slabá vlastnosť posunu v čase*:

$$f\left(t - 2^M k\right) \leftrightarrow d_{m,n-2^{M-m}k}, \qquad -\infty \leq m \leq M$$

T.j. na všetkých úrovniach sú waveletové koeficienty iba preindexované. Ak signál posunieme o 2^{M-u}, t.j. nie o 2^M, uvedené pravidlo platí iba do úrovne *M-u*, koeficienty v posledných *u* úrovniach treba znovu prepočítať.

Zmena mierky

Platí

$$f\left(2^{-k}t\right) \leftrightarrow 2^{k/2}\, d_{m-k,n}\,, \quad k \in Z$$

Zmena mierky, ktorá nie je mocninou 2 sa rieši *reinterpoláciou* pôvodného signálu.

Otázky:

1) existujú vôbec nejaké úrovňovo ohraničené signály ? T.j. signály úplne vyjadriteľné waveletovými koeficientmi $d_{m,n}$ iba to istej úrovne *M*. Ako sa konštruujú také signály?

Vlastnosti funkcie mierky a waveletov

$\varphi(t), \psi(t)$ - funkcia mierky a wavelet spĺňajúca relácie zmeny rozlíšenia

$h(n), g(n)$ - koeficienty pre zmenu rozlíšenia $h_{mra}(n)$, $g_{mra}(n)$, predstavujú impulzovú odpoveď FIR filtrov

$H(\omega), G(\omega)$ - DTFT koeficientov $h(n)$ a $g(n)$

Teorém 1 : Ak platí $\int \varphi(t)dt \neq 0$ potom $\sum_n h(n) = \sqrt{2}$. Pozn.: podmienka $\int \varphi(t)dt \neq 0$ je nutná aby MRA bola kompletná.

Teorém 2 : Ak celočíselné posuny $\varphi(t)$ sú navzájom ortonormálne, t.j. $\int \varphi(t)\varphi(t-k)dt = \delta(k)$ potom $\sum_n h(n)h(n-2k) = \delta(k)$.

Dôsledky:

$$\sum_n h(2n) = \sum_n h(2n+1) = \sqrt{2}/2$$

$$\sum_n |h(n)|^2 = 1$$

Teorém 3 : Ak $\varphi(t)$ má kompaktnú podporu na intervale $\langle 0, N-1 \rangle$ a $\varphi(t-k)$ sú lineárne nezávislé, potom $h(n)$ má kompaktnú podporu na $0 \leq n \leq N-1$, t.j. $h(n) = 0$ pre $n < 0$ a pre $n > N-1$, dĺžka sekvencie $h(n)$ je N.

Vlastnosti $\varphi(t)$, $\psi(t)$	Vlastnosti $h(n)$, $g(n)$	Vlastnosti $H(\omega)$, $G(\omega)$	Poznámka
$\int \varphi(t)dt = 1$	$\sum_n h(n) = \sqrt{2}$	$H(0) = \sqrt{2}$	Teorém 1
$\int \varphi(t)\varphi(t-k)dt = \delta(k)$	$\sum_n h(n)h(n-2k) = \delta(k)$ ak $k = 0$ platí $\sum_n \lvert h(n)\rvert^2 = 1$	$\lvert H(\omega)\rvert^2 + \lvert H(\omega+\pi)\rvert^2 = 2$	Teorém 2
$\sum_l \varphi(t-l) = \sum_l \varphi(l) = 1$	$\sum_n h(2n) = \sum_n h(2n+1)$	$H(\pi) = 0$	
$\int \psi(t)dt = 0$	$\sum_n g(n) = 0$	$G(0) = 0$	
$\int \varphi(t-n)\psi(t-m)dt = 0$	$g(n) = \pm(-1)^n h(M-n)$	$\lvert G(\omega)\rvert = \lvert H(\omega + M\pi)\rvert$	M je nepárne
	$\sum_n h(n)g(n-2k) = 0$	$\lvert H(\omega)\rvert^2 + \lvert G(\omega)\rvert^2 = 2$	

Tab.1: Prehľad vlastností pri ortonormálnych WR a DWT

- Aby mohli byť splnené podmienky pre $h(n)$, treba aby *N*, dĺžka $h(n)$ bola párna.
- Ak $h(n)$ spĺňa uvedené podmienky, sú zaručené iba základné vlastnosti $\varphi(t)$ (integrovateľnosť, ortonormalitu, ...) pričom $\varphi(t)$ môže mať extrémne neregulárny, prípadne fraktálový charakter.
- Pri návrhu $h(n)$ s dĺžkou *N*, ostáva po splnení nutných *N/2+1* podmienok ešte *N/2-1* stupňov voľnosti. Tieto môžeme využiť aby $\varphi(t), \psi(t)$ resp. $h(n), g(n)$ mali požadované vlastnosti, ako napr. istú regularitu, aproximačné vlastnosti ...

Pozn.1: nutných *N/2+1* podmienok je:

a) 1.podmienka: $\sum_n h(n) = \sqrt{2}$ kvôli existencii $\varphi(t)$

b) *N/2* podmienok kvôli ortonormalite $\varphi(t)$:

$$\sum_n h(n)h(n-2k) = \delta(k) \qquad k = 0,1,\dots, N/2-1$$

Pozn.2: Nech $|H(\omega)|^2 + |H(\omega+\pi)|^2 = 2$. Označme $P(\omega) = |H(\omega)|^2$. Potom P je tzv. *Polpásmový filter* t.j. v Z rovine platí : $P(z) + P(-z) = 2$

Kaskádové algoritmy, generovanie $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ vo frekvenčnej a časovej oblasti.

Ako vypočítať $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ ak poznáme koeficienty pre zmenu mierky?

Vychádzajme z rovníc:

$$\varphi(t) = \sqrt{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n)\varphi(2t-n) \qquad \psi(t) = \sqrt{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{mr}(n)\varphi(2t-n)$$

Tieto rovnice môžeme riešiť *iteračne*, pričom ak postup bude konvergovať k pevnému bodu, potom je pevný bod hľadaným riešením. Iterácie sú definované:

$$\varphi^{(k+1)}(t) = \sqrt{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n)\varphi^{(k)}(2t-n) \qquad \psi^{(k+1)}(t) = \sqrt{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n)\psi^{(k)}(2t-n)$$

Uvedený iteračný postup sa nazýva aj *kaskádový algoritmus*. Hľadajme teraz riešenie vo frekvenčnej oblasti.

Použitím Fourierovej transformácie dostaneme:

$$\Phi^{(k+1)}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} H_{mr}(\omega/2)\ \Phi^{(k)}(\omega/2)$$

riešením tejto rovnice pre $k \to \infty$ dostávame

$$\Phi^{(\infty)}(\omega) = \Phi^{\infty}(0) \prod_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} H_{mr}\left(\omega/2^{k}\right) \right]$$

Ak táto limita existuje a je spojitá v $\omega = 0$ potom $\Phi(\omega) = \Phi^{(\infty)}(\omega)$. Analogicky:

$$\Psi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} G_{mr}(\omega/2) \prod_{k=2}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} H_{mr}\left(\omega/2^{k}\right) \right]$$

Výsledok oboch prípadoch nezávisí od tvaru $\varphi^{(0)}(t)$ ale iba od hodnoty $\Phi^{(k)}(0) = \int \varphi^{(k)}(t) dt = A_0 > 0$, ktorá je invariantná vzhľadom na iterácie.

Momentové vlastnosti

k-te momenty $\varphi(t), \psi(t)$ sú definované:

$$m_{\varphi}(k) = \int t^k \varphi(t) dt \qquad\qquad m_{\psi}(k) = \int t^k \psi(t) dt$$

diskrétne k-te momenty $h(n), g(n)$ sú definované:

$$\mu_h(k) = \sum_n n^k h(n) \qquad\qquad \mu_g(k) = \sum_n n^k g(n)$$

z diskrétnych momentov μ_h, μ_g môžeme vypočítať *spojité momenty* pomocou:

$$m_{\varphi}(k) = \frac{1}{(2^k - 1)\sqrt{2}} \sum_{l=1}^{k} \binom{k}{l} \mu_h(l) m_{\varphi}(k-l) \qquad m_{\psi}(k) = \frac{1}{2^k \sqrt{2}} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \mu_g(l) m_{\varphi}(k-l)$$

na začiatku výpočtu si treba uvedomiť, že $m_{\varphi}(0) = 1$.

Počet nulových momentov $m_\psi(k)$ dáva informáciu o plochosti $H(\omega)$ a hladkosti $\psi(t)$ ktoré rastú priamo úmerne. Okrem toho, čím viac máme waveletových momentov je nulových, tým lepšiu aproximáciu získame pri projekcii signálu $f(t) \in L^2(R)$ do V_m.

Čím väčší počet nulových momentov $m_\varphi(k)$ je dôležitý pri aproximácii signálu $f(t) \in L^2(R)$ vo V_m pomocou vzoriek $f(t)$ namiesto projekčných koeficientov. Takisto sa zlepšuje aj symetria $\varphi(t)$.

Príkladom waveletového systému, ktorého dizajn je založený na momentových vlastnostiach $\varphi(t), \psi(t)$ sú tzv. *Coiflets.* Je to ortonormálny systém v ktorom sa snažíme nulovať momenty waveletu a rovnako aj funkcie mierky:

$$m_\varphi(k) = 0\,,\; m_\psi(k) = 0 \qquad k = 1,2,\ldots, L-1$$

K-regulárne filtre

FIR filter s impulzovou odpoveďou $h(n)$, ktorá spĺňa podmienky v Tab.1 sa nazýva *K- regulárny* vtedy ak platia nasledovné ekvivalentné tvrdenia:

1) $H(\omega)$ má *K-násobnú nulu* v $\omega = \pi$

2) prvých K-diskrétnych aj spojitých waveletových momentov je nulových, t.j.: $m_\psi(k) = 0$, $\mu_\psi(k) = 0$, pre $k = 0,1,\ldots,(K-1)$

3) polynomické sekvencie stupňa $\leq (K-1)$ môžu byť vyjadrené lineárnou kombináciou posunov $h(n)$.

4) polynómy stupňa $\leq (K-1)$ môžu byť vyjadrené lineárnou kombináciou posunov $\varphi(t)$

Potom Z transformáciu $h(n)$: $H(z)=\sum_n h(n)z^{-n}$ môžeme napísať v tvare:

$$H(z)=\left(\frac{1+z^{-1}}{2}\right)^K L(z)$$

pričom $L(z)$ nemá žiadne póly v $z=e^{i\pi}$. Ak *N* je dĺžka filtra $h(n)$, potom polynóm $H(z)$ je stupňa *N-1* a $L(z)$ stupňa *N-1-K*. Aby $L(z)$ zabezpečilo splnenie nutných *N/2* podmienok pre ortogonalitu, musí byť aspoň stupňa *N/2-1*. Potom $K \le N/2$.

Zároveň z podmienky existencie $\varphi(t)$ automaticky platí, že $h(n)$ je aspoň $K=1$ regulárne. Takže platí :

$$1 \le K \le N/2$$

Príklady ortogonálnych waveletových systémov

- Haarov wavelety
- Sinc wavelety
- Spline wavelety(semiortogonálne) a Battle-Lemarie
- wavelety(ortogonalizovený spline s nekonečnou podporou)
- Daubechies wavelety
- Coiflets

Príklady návrhu ortogonálnych waveletov

- Ortogonalizácia (napr. Battle Lemarie)

- *Parametrizácia koeficientov mierky

- *Spektrálna faktorizácia – wavelety s K nulovými waveletovými momentmi (napr. Daubechies)
  Pozn. Analogicky sú navrhované *biortogonálne* CDF(Cohen-Daubechies-Feauveau) spline wavelety

- wavelety s K nulovými waveletovými momentmi a K nulovými momentmi funkcie mierky(Coiflets)

- wavelety s minimalizovanými momentmi(Odegard)

- *lifting schéma*

Parametrizácia koeficientov mierky

Systém s dĺžkou $h(n)$ = 2

Nemá žiadne stupne voľnosti. Podmienky sú:

$$h(0)+h(1)=\sqrt{2}$$

$$h^2(0)+h^2(1)=1$$

Riešením je $h(n)=\{\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}/2\}$

Systém s dĺžkou $h(n)$ = 4

Nemá žiadne stupne voľnosti. Podmienky sú:

$$h(0)+h(1)+h(2)+h(3)=\sqrt{2} \qquad h^2(0)+h^2(1)+h^2(2)+h^2(3)=1$$

$$h(0)h(2)+h(1)+h(3)=0$$

Riešením je

$$h(0)=(1-\cos(\alpha)+\sin(\alpha))/(2\sqrt{2}) \qquad h(1)=(1+\cos(\alpha)+\sin(\alpha))/(2\sqrt{2})$$

$$h(3)=(1+\cos(\alpha)-\sin(\alpha))/(2\sqrt{2}) \qquad h(2)=(1-\cos(\alpha)-\sin(\alpha))/(2\sqrt{2})$$

Pozn:

Ak $\alpha=0,\ \pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2$ → Haarov wavelet

Ak $\alpha=\pi/3$ → Daubechies2 wavelet

Návrh waveletov s K nulovými momentmi

Nech $h(n)$ s dĺžkou N je *K-regulárny filter* (prvých K momentov $\psi(t)$ je nulových). Potom:

$$H(\omega)=\left(\frac{1+e^{i\omega}}{2}\right)L(\omega)$$

spĺňa $|H(\omega)|^2+|H(\omega+\pi)|^2=1$ vtedy a len vtedy, ak

$$|L(\omega)|^2=P\left(\sin^2(\omega/2)\right)$$

kde

$$P(y)=\sum_{k=0}^{K-1}\binom{K-1+k}{k}y^k+y^K R(1/2-y)$$

a R(y) je *antisymetrický polynóm* taký, že $P(y)\geq 0$ pre $y\in\langle 0,1\rangle$. Ak R(y)=0, potom dostávame wavelety s maximálnym počtom nulových momentov *N*, tzv. *Daubechies* wavelety. Ak *N*> *2K* potom R(y) nám vyjadruje stupne voľnosti, ktoré môžeme použiť na modifikáciu vlastností waveletov.

Pri výpočte $H(\omega)$ dostaneme potrebné $L(\omega)$ *spektrálnou faktorizáciou* $|L(\omega)|^2$.

Autokorelácia a spektrálna faktorizácia.

Autokoreláciou sekvencie $h(n)$ budeme nazývať sekvenciu:

$$p(n) = \langle h(k), h(k-n) \rangle$$

Použitím DTFT dostávame:

$$P(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(n) e^{-i\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) h^*(k-n) e^{-i\omega n} = H^*(\omega) H(\omega) = |H(\omega)|^2$$

Vyjadrením v Z-rovine dostaneme:

$$P(z) = H_*\left(z^{-1}\right) H(z)$$

, kde označenie * znamená konjugáciu koeficientov, nie celej funkcie. Vidíme, že ak z_k je nula $P(z)$ potom nula je aj $1/z_k^*$, t.j. nuly sa vyskytujú iba v pároch. Naviac ak $h(n)$ je reálne, potom $P(z)$ má nuly aj v z_k^* a $1/z_k$.

Platí:

$$P(z)=\alpha\prod_{i=1}^{N_1}\left(\left(1-z_{1_i}z^{-1}\right)\left(1-z_{1_i}^{*}z\right)\right)\prod_{i=1}^{N_2}\left(\left(1-z_{2_i}z^{-1}\right)\left(1-z_{2_i}^{*}z\right)\right)$$

,kde N_1 je počet párov núl na jednotkovej kružnici(platí $\left|z_{1_i}\right|=1$, pár je vlastne dvojnásobný koreň) a N_2 je počet párov núl mimo jednotkovej kružnice (platí $\left|z_{2_i}\right|<1$).

Pre danú $P(z)$ sa vyhovujúce $H(z)$ nazývajú *spektrálne faktory* $P(z)$. Tieto faktory nie su jedinečné, pričom ich získame použitím iba jednej nuly z každého páru núl $P(z)$. Všetky riešenia majú rovnakú magnitúdovú charakteristiku, líšia sa iba vo fázovej charakteristike. Dôležité je *riešenie s minimálnou fázou*, t.j. pri vytváraní $H(z)$ použijeme iba nuly v a na jednotkovej kružnici. Potom:

$$H(z)=\sqrt{\alpha}\prod_{i=1}^{N_1}\left(1-z_{1_i}z^{-1}\right)\prod_{i=1}^{N_2}\left(1-z_{2_i}z^{-1}\right)$$

Príklad: Zistite koeficienty $h(n)$, pre Daubechies wavelety s minimálnou fázou ak N=6.

Riešenie: Chceme max. počet nulových momentov, t.j. K=3, R=0.

Potom $P(y) = 1 + 3y + 6y^2$,

$$y = \sin^2(\omega/2) = \frac{1}{2}(1 - \cos(\omega)) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\left(e^{i\omega} + e^{-i\omega}\right)\right) = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}z^{-1}$$

$$P(z) = \frac{3}{8}z^{-2} - \frac{9}{4}z^{-1} + \frac{19}{4} - \frac{9}{4}z + \frac{3}{8}z^2$$

nulové body sú

{0.28725-0.15289i, 2.71275+1.44389i
0.28725+0.15289i, 2.71275-1.44389i }

$$P(z) = \alpha\left(1 - (0.28725 - 0.15289\mathrm{i})z^{-1}\right)\left(1 - (0.28725 + 0.15289\mathrm{i})z\right)$$
$$\left(1 - (0.28725 + 0.15289\mathrm{i})z^{-1}\right)\left(1 + (0.28725 - 0.15289\mathrm{i})z\right)$$

α zistíme pomocou koeficientu pri najvyššej mocnine

$$\alpha = \frac{3}{8} \Big/ \left[(0.28725 - 0.15289\mathrm{i})(0.28725 - 0.15289\mathrm{i}) \right]$$

vytvoríme faktor s minimálnou fázou:

$$L(z) = \sqrt{\alpha}\, \left(1 - (0.28725 - 0.15289\mathrm{i})z^{-1}\right)\left(1 - (0.28725 + 0.15289\mathrm{i})z^{-1}\right)$$

Aby sme dostali ortonormálny systém, normujeme $H(z)$ faktorom $\sqrt{2}$, potom:

$$H(z) = \sqrt{2}\left(\frac{1+z}{2}\right)^3 L(z)$$

čo je numericky

$$H(z) = 0.33267\mathrm{z}^3 + 0.80689\mathrm{z}^2 + 0.45988\mathrm{z} - 0.13501 + 0.08544\mathrm{z}^{-1} + 0.03523\mathrm{z}^{-2}$$

Čo odpovedá nekauzálnemu filtru.

Kauzalitu dosiahneme vynásobením $H(z)$ faktorom z^{-3}, t.j. oneskorením $h(n)$ o 3 takty. Potom

$$h(n) = \{0.33267,\ 0.80689,\ 0.45988,\ -0.13501,\ 0.08544,\ 0.03523\}$$

Biortogonálne wavelety a nulové momenty.

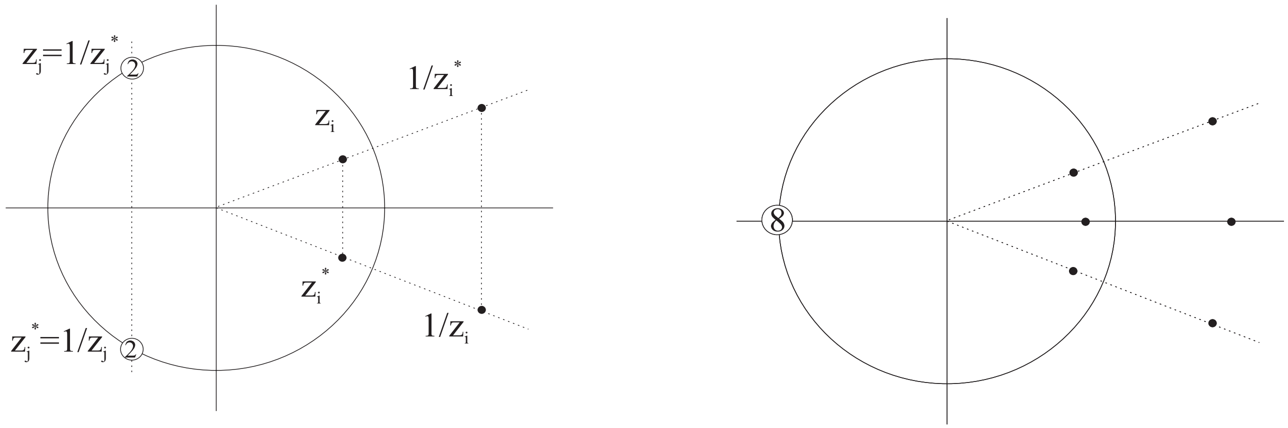
Predpokladajme všeobecné riešenie faktorizácie $P(z)$ v tvare $P(z) = F(z)H(z)$.
Nulové body $P(z)$ označme z_i. Potom platia nasledovné pravidlá:

1) aby $F(z)$ a $H(z)$ boli prenosové funkcie *reálnych filtrov*, z_i a z_i^* musíme použiť v pároch
2) aby $F(z)$ a $H(z)$ boli prenosové funkcie filtrov s *Lineárnou fázou*, z_i a $1/z_i$ musíme použiť v pároch
3) Aby $F(z)$ a $H(z)$ mohli tvoriť *ortogonálne wavelety*, z_i a $1/z_i$ musíme použiť oddelene.

Zároveň platí: Symetrický ortogonálny FIR filter s prenosovou funkciou $H(z)$, môže mať maximálne 2 nenulové koeficienty, pričom platí :

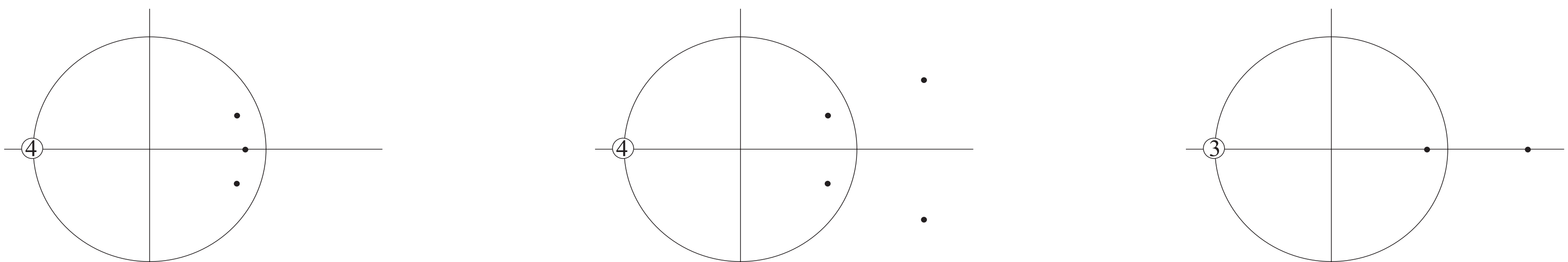
$$H(z) = \left(1 + z^{-N}\right)/\sqrt{2}$$

a N je nepárne.



a)Všeobecné umienstnenie núl P(z)

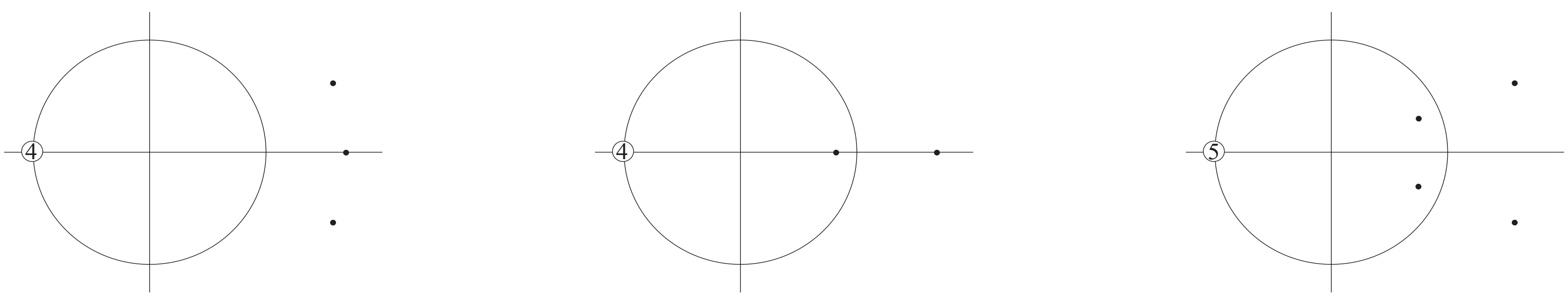
b) Umienstnenie núl pre maximálne hladký polpásmový filter so 14 nulami v P(z)



8/8 ortogonálne

9/7 symetrické

6/10 symetrické



c) Príklady faktorizácie P(z) z b)

T.j. sú možné 3 tvary filtrov pre biortogonálne wavelety:

1) filtre pre ortogonálne wavelety

2) filtre s lineárnou fázou, symetrické
   - Všetky sú s *nepárnou* dĺžkou impulzovej odpovede
   - Všetky sú s *párnou* dĺžkou impulzovej odpovede