

Analýza signálu viacúrovňovým rozlíšením

Signál pri *analýze viacúrovňovým rozlíšením* (MRA) rozkladáme do systému hierarchických podpriestorov, pričom každý z podpriestorov charakterizuje rôzne rýchle zmeny v signále. MRA pozostáva zo sekvencie uzavretých podpriestorov priestoru $L^2(R)$:

$$\{0\} \dots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \dots L^2(R)$$

← horšia aproximácia lepšia →

Vlastnosti MRA:

- kompletnosť

$$\bigcap_{m \in \mathbb{Z}} V_m = \{0\}$$

$$\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} V_m = \{L^2(R)\}$$

- Invariancia vzhľadom na

$$\text{zmenu mierky} \quad - \quad f(t) \in V_m \Leftrightarrow f(2^m t) \in V_0 \quad \forall m \in \mathbb{Z}$$

$$\text{posun v čase} \quad - \quad f(t) \in V_0 \Leftrightarrow f(t - n) \in V_0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

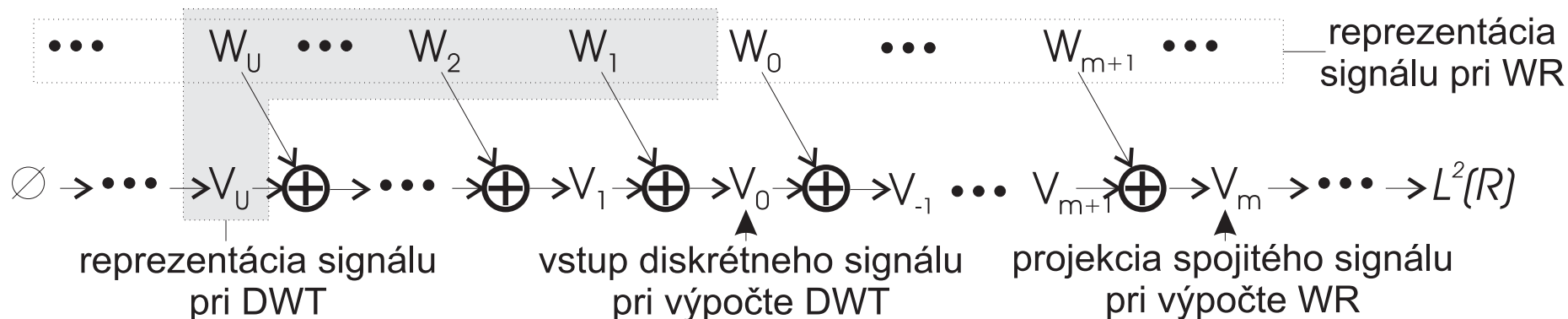
- Existencia bázy - existuje také $\varphi \in V_0$, že množina $\{\varphi(t - n), n \in \mathbb{Z}\}$ je ortonormálnou bázou V_0 . Funkciu $\varphi \in V_0$ nazývame *funkcia mierky*
- Existencia *bázy ortogonálneho doplnku*. Nech W_m je ortogonálny doplnok V_m do V_{m-1} . Potom existuje taký ortonormálny wavelet $\psi \in W_0$, že množina $\{\psi(t - n), n \in \mathbb{Z}\}$ je ortonormálnou bázou podpriestoru W_0 .

Dôsledok: $\{\varphi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \varphi(2^{-m}t - n), n \in \mathbb{Z}\}$ je bázou V_m .

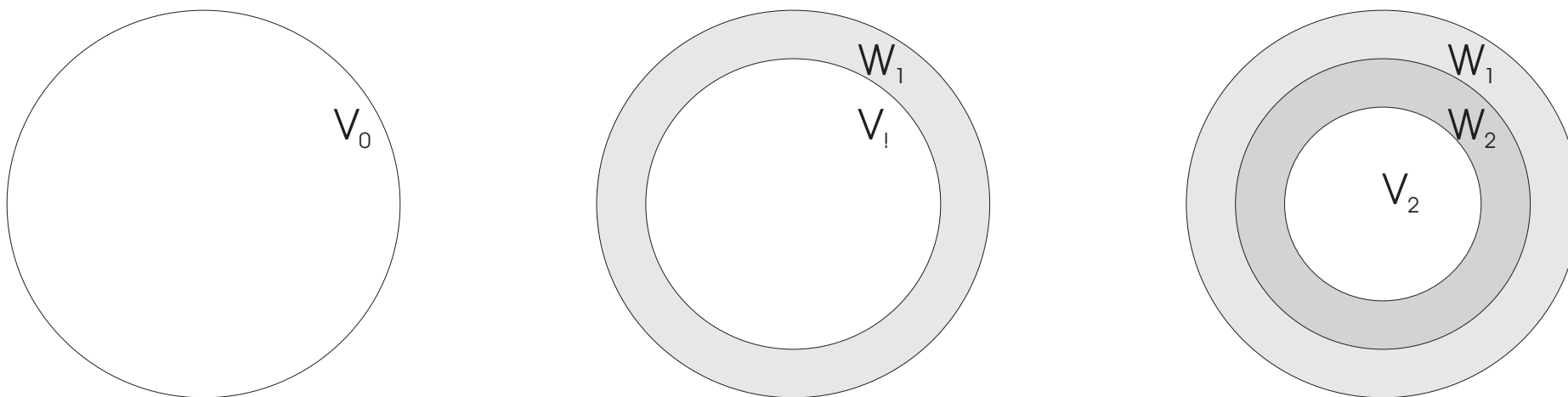
Platia nasledovné relácie:

$$V_m = V_{m+1} \oplus W_{m+1} \quad L_2(\mathbb{R}) = \underbrace{\dots \oplus W_2 \oplus W_1 \oplus W_0 \oplus W_{-1} \oplus W_{-2} \dots}_{V_0}$$

Vidíme, že priestory V_m majú *aproximačný charakter*, pričom W_m obsahujú iba *detaily* na rôznych úrovniach rozlíšenia.



Hierarchia aproximačných V_m a diferenčných W_m podpriestorov v MRA



Znázornenie hierarchie aproximačných V_m a diferenčných W_m podpriestorov v rovine.

Keďže V_0 je obsiahnuté vo V_{-1} , pre $\varphi(t) \in V_0$ platí aj, že $\varphi(t) \in V_{-1}$. Bázou vo V_{-1} je $\{\sqrt{2}\varphi(2t - n), n \in \mathbb{Z}\}$, takže $\varphi(t)$ môžeme vyjadriť ako:

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n) \varphi(2t - n)$$

Na základe vlastností ortogonálnom doplnku platí analogicky

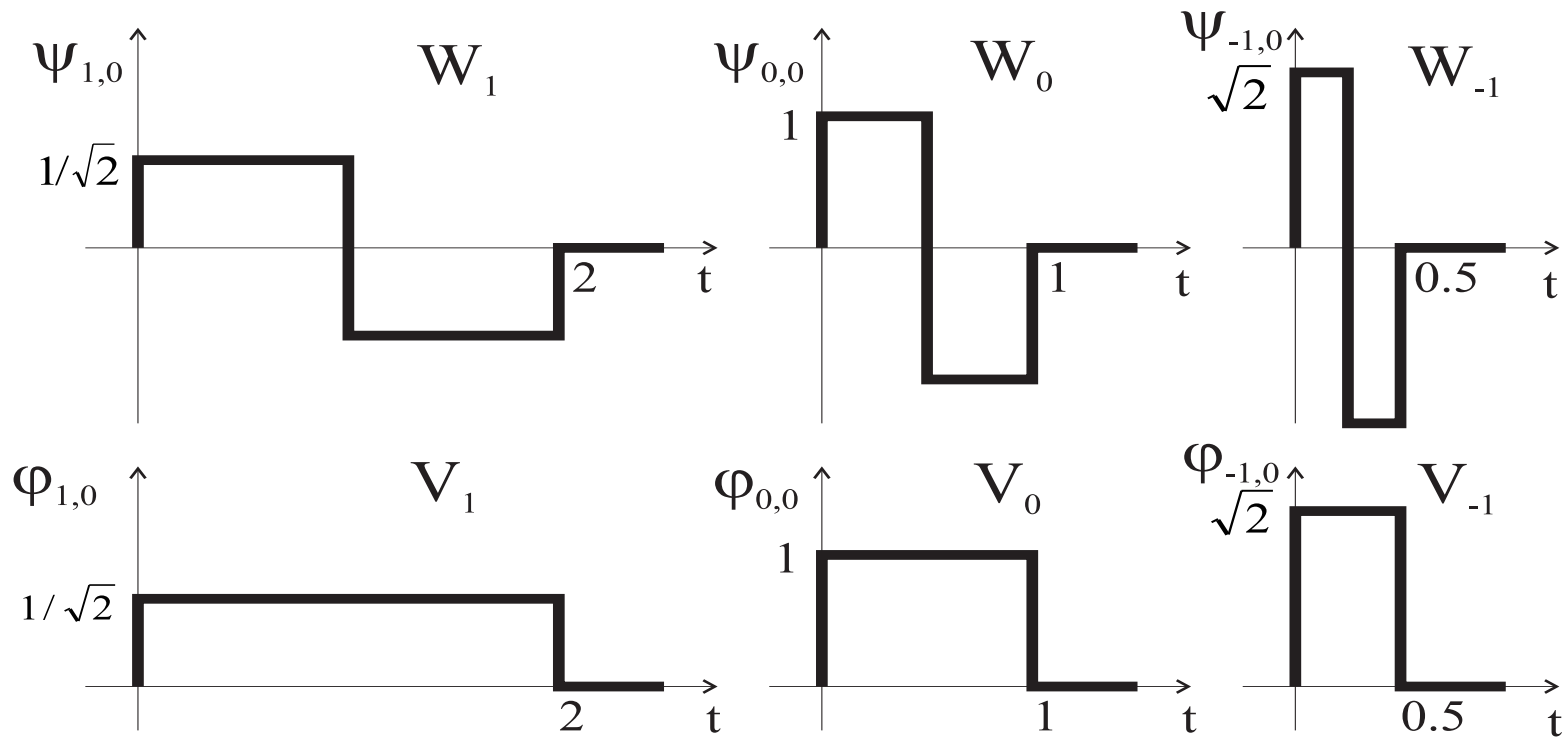
$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{mr}(n) \varphi(2t - n)$$

Tieto dva vzťahy sa nazývajú *relácie zmeny rozlíšenia* resp. *dilatačné rovnice*

Koeficienty h_{mr} a g_{mr} charakterizujú vzťahy medzi bázami na susedných úrovniach rozlíšenia a nazývajú sa *koeficienty pre zmenu rozlíšenia* resp. *dilatačné koeficienty*

Uvedomme si, že platí:

$$\varphi_{m+1,n}(t) = 2^{-1/2} \varphi_{m,n}(t/2) \qquad \psi_{m+1,n}(t) = 2^{-1/2} \psi_{m,n}(t/2)$$



Na báзовých funkciách pre Haarovu WT môžeme vidieť, že

- 1) Priamy súčet podpriestorov V_1 a W_1 je V_o , t.j. báзовé funkcie V_o sa dajú vyjadriť ako lineárna kombinácia báзовých funkcií V_1 a W_1
- 2) Bázy vo V_1 a W_1 môžeme vyjadriť pomocou bázy V_o , t.j.:

$$\varphi_{1,n}(t) = (\varphi_{0,n}(t) + \varphi_{0,n+1}(t)) \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad h_{mr} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\psi_{1,n}(t) = (\varphi_{0,n}(t) - \varphi_{0,n+1}(t)) \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad g_{mr} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

Algoritmus výpočtu Waveletových radov a disktrétnej waveletovej transformácie

Nech funkcie $f(t) \in V_m$. Potom $f(t)$ môžeme vyjadriť ako:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_m(n) \varphi_{m,n}(t)$$

,kde

$$c_m(n) = \langle f(t), \varphi_{m,n}(t) \rangle$$

je množina *projekčných* koeficientov $f(t)$ vo V_m nazývaných *koeficienty mierky*. Použitím vzťahu opisujúcom vzťahy medzi bázami podpriestorov na susedných úrovniach rozlíšenia, vlastností MRA a následnou úpravou dostávame:

$$\text{rozklad:} \quad c_{m+1}(n) = \sum_k h_{mr}(k - 2n) c_m(k) \quad d_{m+1}(n) = \sum_k g_{mr}(k - 2n) c_m(k)$$

$$\text{rekonštrukcia:} \quad c_m(n) = \sum_k h_{mr}(n - 2k) c_{m+1}(k) + \sum_k g_{mr}(n - 2k) d_{m+1}(k)$$

Platí: $\varphi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \varphi(2^{-m}t - n)$

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n) \varphi(2t - n)$$

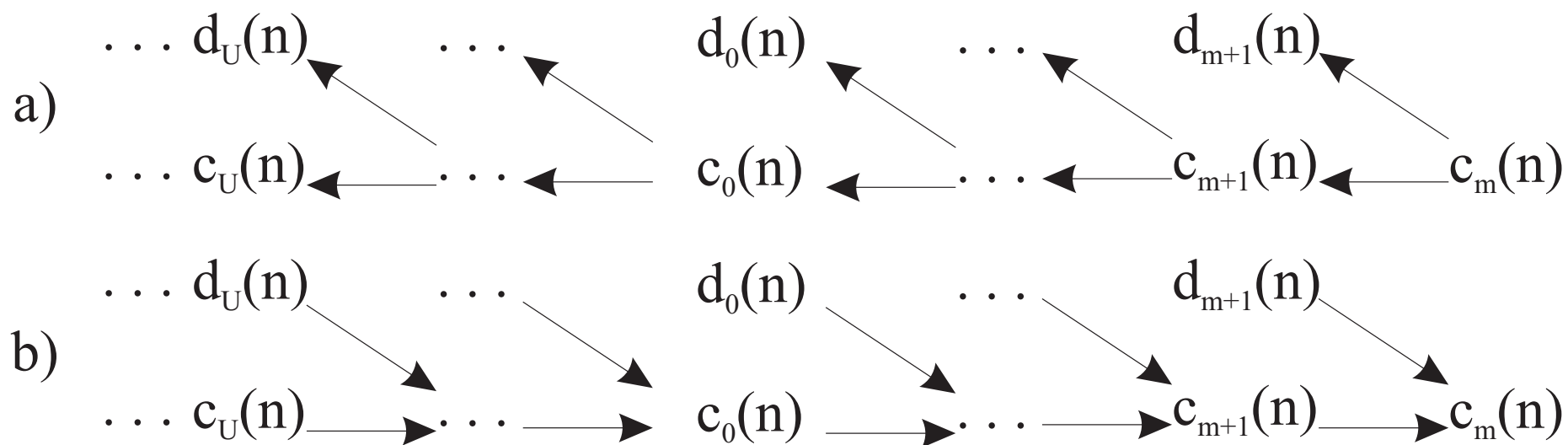
Vynásobme obe strany druhej rovnice $2^{-m/2}$ a za t dosadíme $2^{-m}t - n$:

$$2^{-m/2} \varphi(2^{-m}t - n) = 2^{-m/2} \cdot 2^{1/2} \sum_k h_{mr}(k) \varphi(2(2^{-m}t - n) - k)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{m,n}(t) &= \sum_k h_{mr}(k) 2^{-(m-1)/2} \varphi(2^{-(m-1)}t - 2n - k) = \\ &= \sum_k h_{mr}(k) \varphi_{m-1,2n+k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_m(n) &= \langle f(t), \varphi_{m,n}(t) \rangle = \left\langle f(t), \sum_k h_{mr}(k) \varphi_{m-1,2n+k} \right\rangle = \sum_k h_{mr}(k) \langle f(t), \varphi_{m-1,2n+k} \rangle = \\ &= \sum_k h_{mr}(k) c_{m-1}(2n+k) = \sum_k h_{mr}(k-2n) c_{m-1}(k) \end{aligned}$$

T.j: $c_{m+1}(n) = \sum_k h_{mr}(k-2n) c_m(k)$



Rozklad(a) a rekonštrukcia(b) koeficientov mierky pri výpočte WR a DWT

Výpočet waveletových radov

Pri výpočte *waveletových radov* z $s(t) \in L^2(R)$ môžeme zvoliť počiatočné V_m tak, aby $f(t) \in V_m$ aproximovalo $s(t)$ s ľubovoľnou presnosťou. T.j:

- 1) začneme s projekciou do V_m : $c_m(n) = \langle s(t), \varphi_{n,m}(t) \rangle$
- 2) pokračujeme v diskkrétnej oblasti pomocou vzťahu na výpočet rozkladu, často iba po želanú úroveň rozkladu (napr. U).

V tejto reprezentácii môžeme $s(t)$ vyjadriť sumou rekonštrukcií signálu z koeficientov v príslušnom podpriestore, t.j. *aproximácie signálu* $s_v^U(t)$ a postupným pridávaním *detailov* $s_w^i(t)$:

$$s(t) = s_v^U(t) + s_w^U(t) + \dots + s_w^{m+2}(t) + s_w^{m+1}(t)$$

Výpočet DWT

Pri výpočte *diskrétnej waveletovej transformácie* (DWT) interpretujeme vstupné dáta $x(n)$, $n \in Z$ ako projekčné koeficienty $c_0(n)$ nejakého spojitého signálu $s(t)$ do V_0 a ďalej pokračujeme rozkladmi ako pri WR.

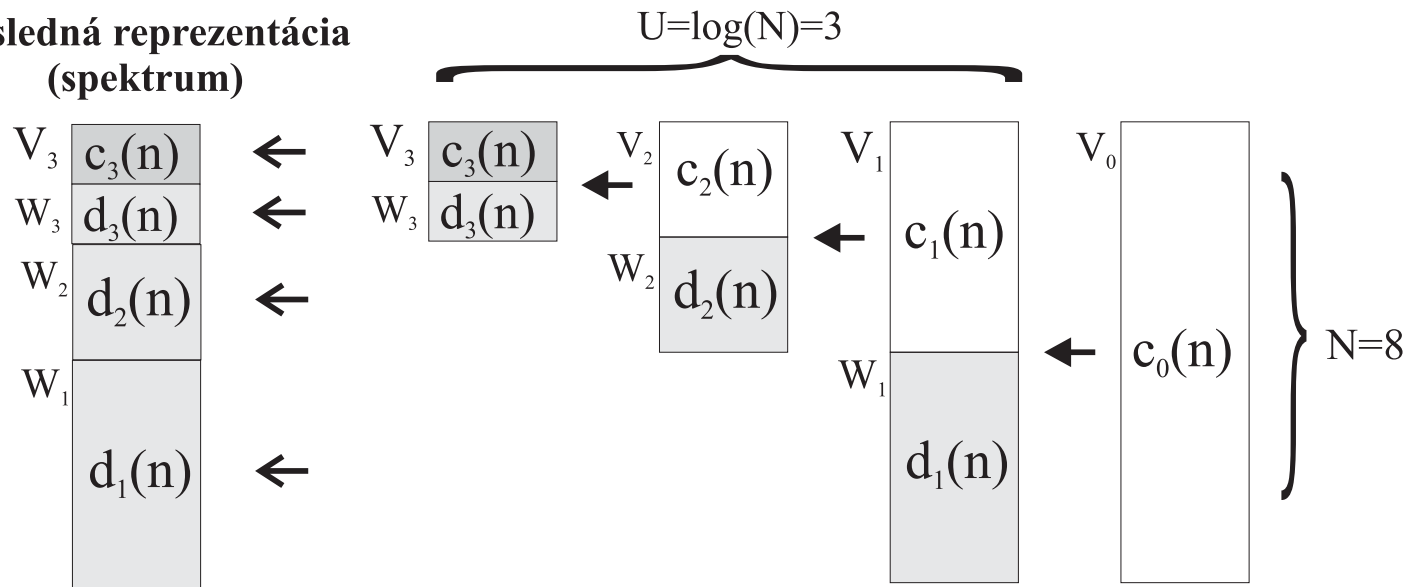
Ak je signál konečnej dĺžky L , potom pre max. počet úrovní rozkladu U platí

$$U \leq \log_2 L$$

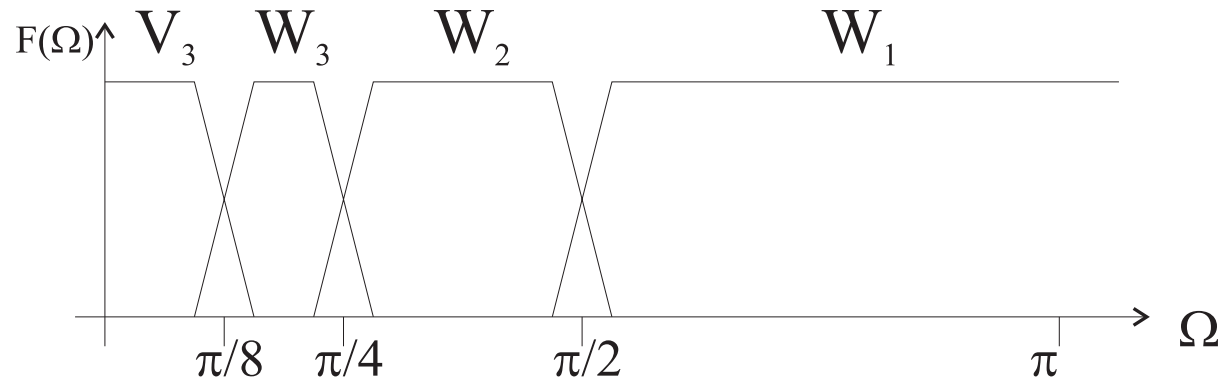
Keďže vstupný signál aj výpočet projekčných koeficientov je diskretný v čase, *báza projekčných priestorov bude diskretná, vytvorená z koeficientov pre zmenu rozlíšenia*. Celá transformácia potom môže byť vyjadrená v maticovom tvare ako ostatné diskkrétne lineárne transformácie.

Výpočet WR a DWT sa v praxi realizuje bankami filtrov.

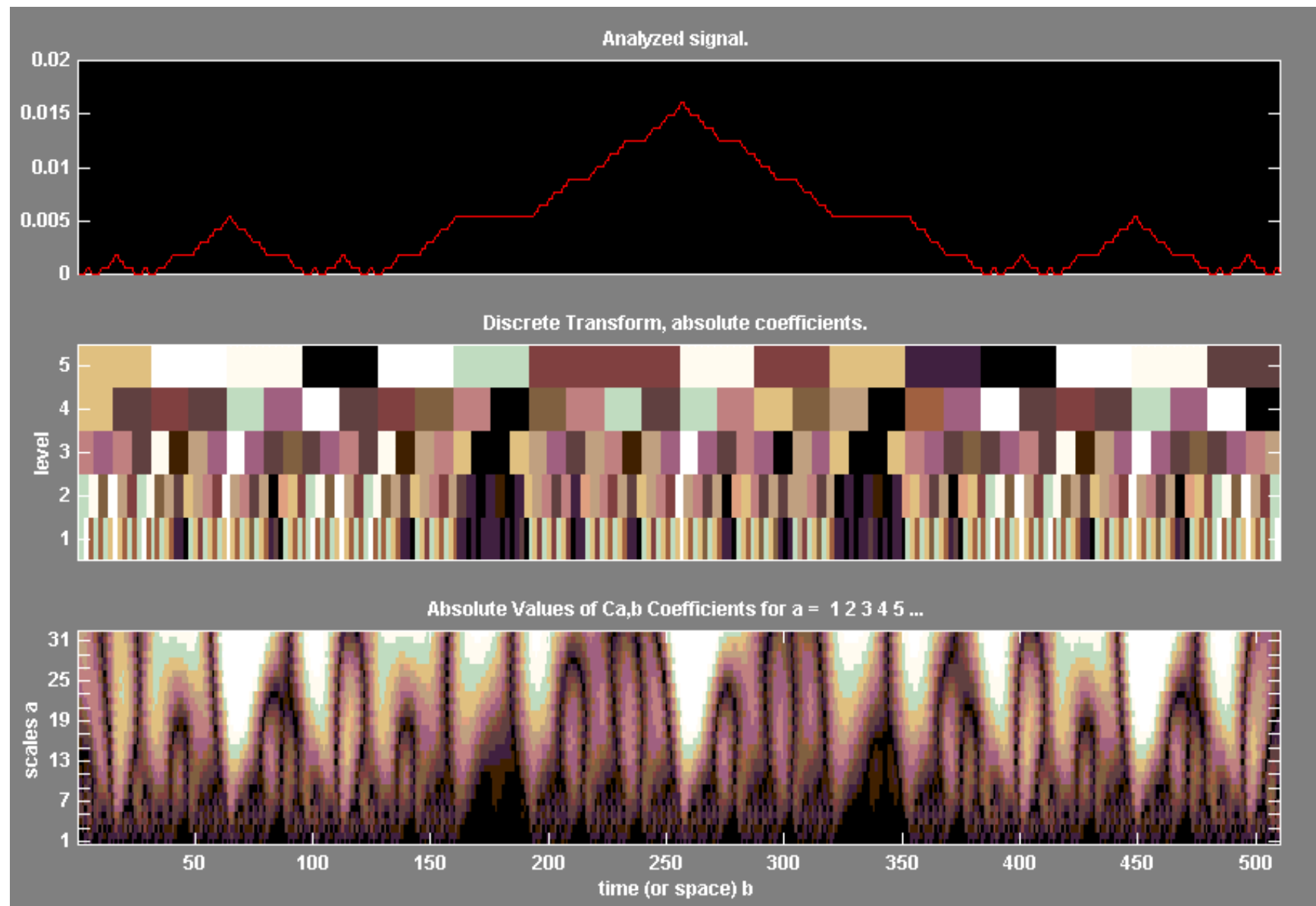
**Výsledná reprezentácia
(spektrum)**

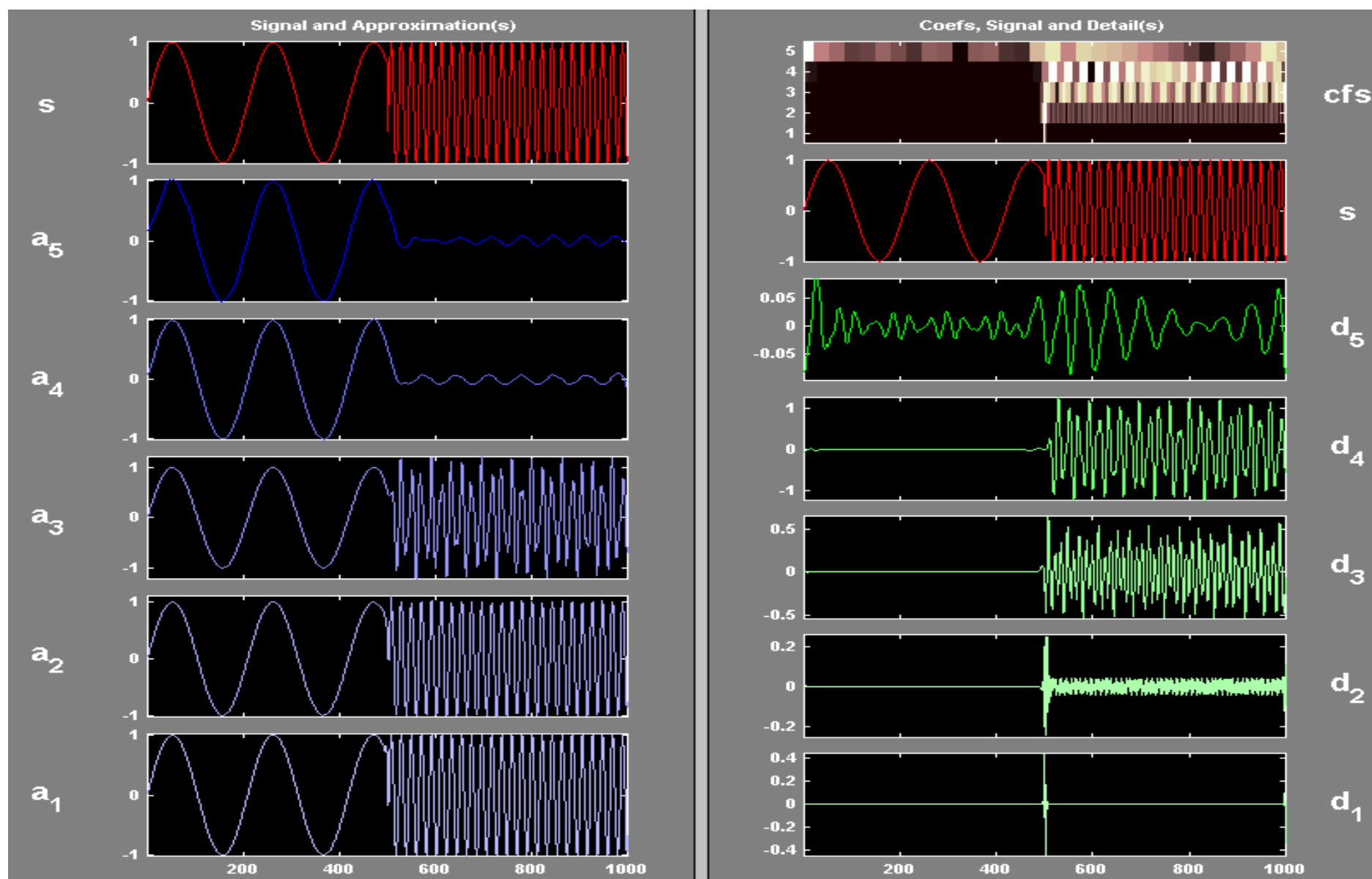


Výpočet koeficientov pri DWT a veľkosti vstupného vektora 8.

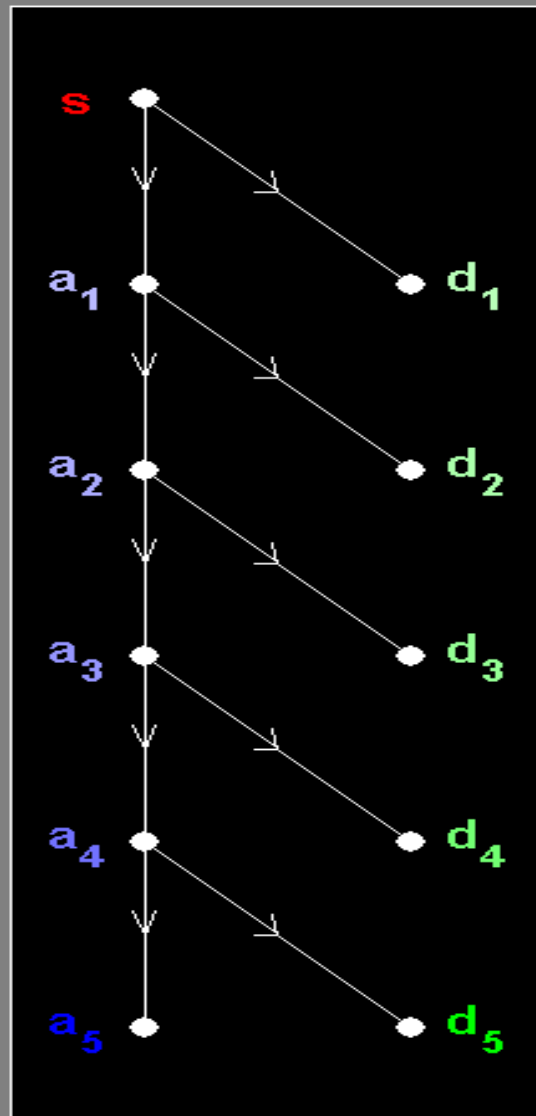


Označme diskretný vstup pre DWT ako $f(n)$. Na príklade jeho DTFT $f(\Omega)$ je znázornené, ktoré časti spektra budú vyjadrené v ktorých podpriestoroch.

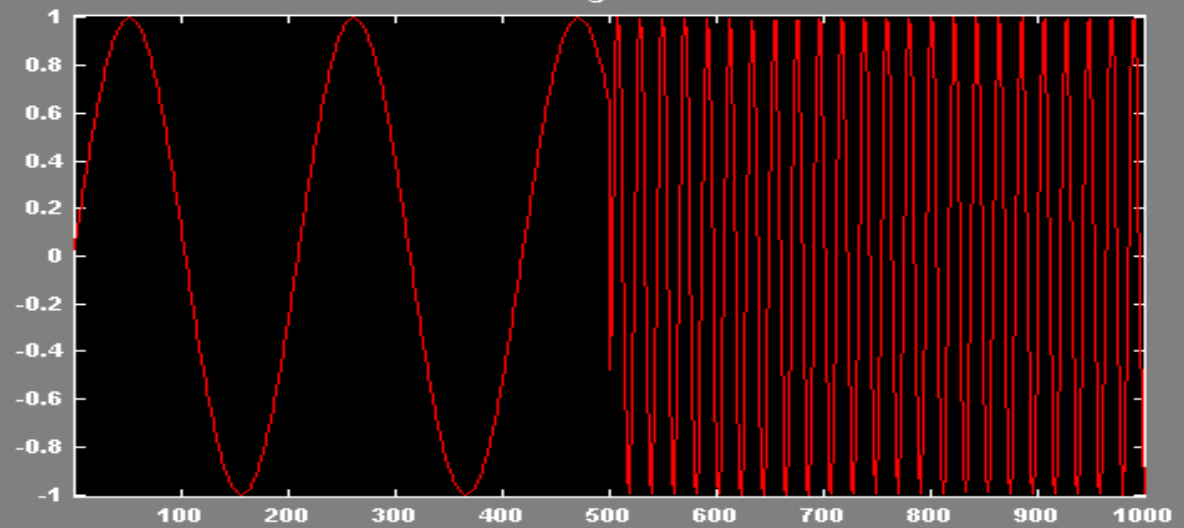




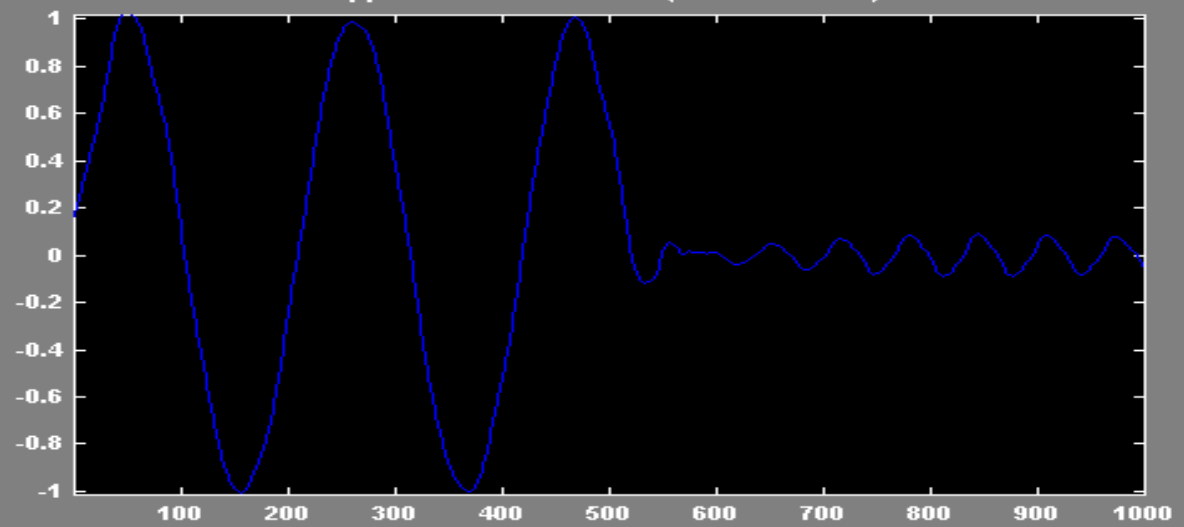
DWT : Wavelet Tree

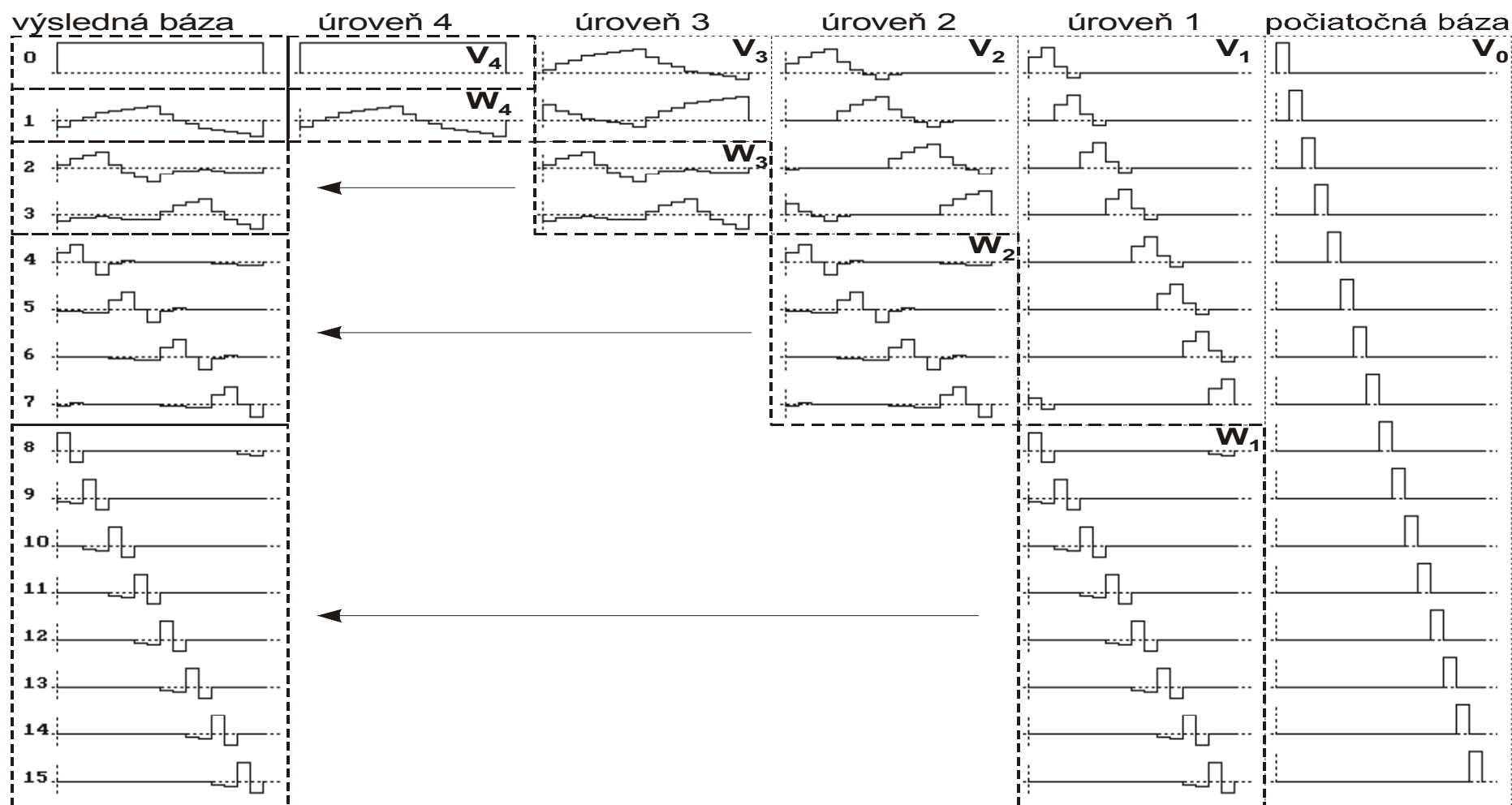


Signal

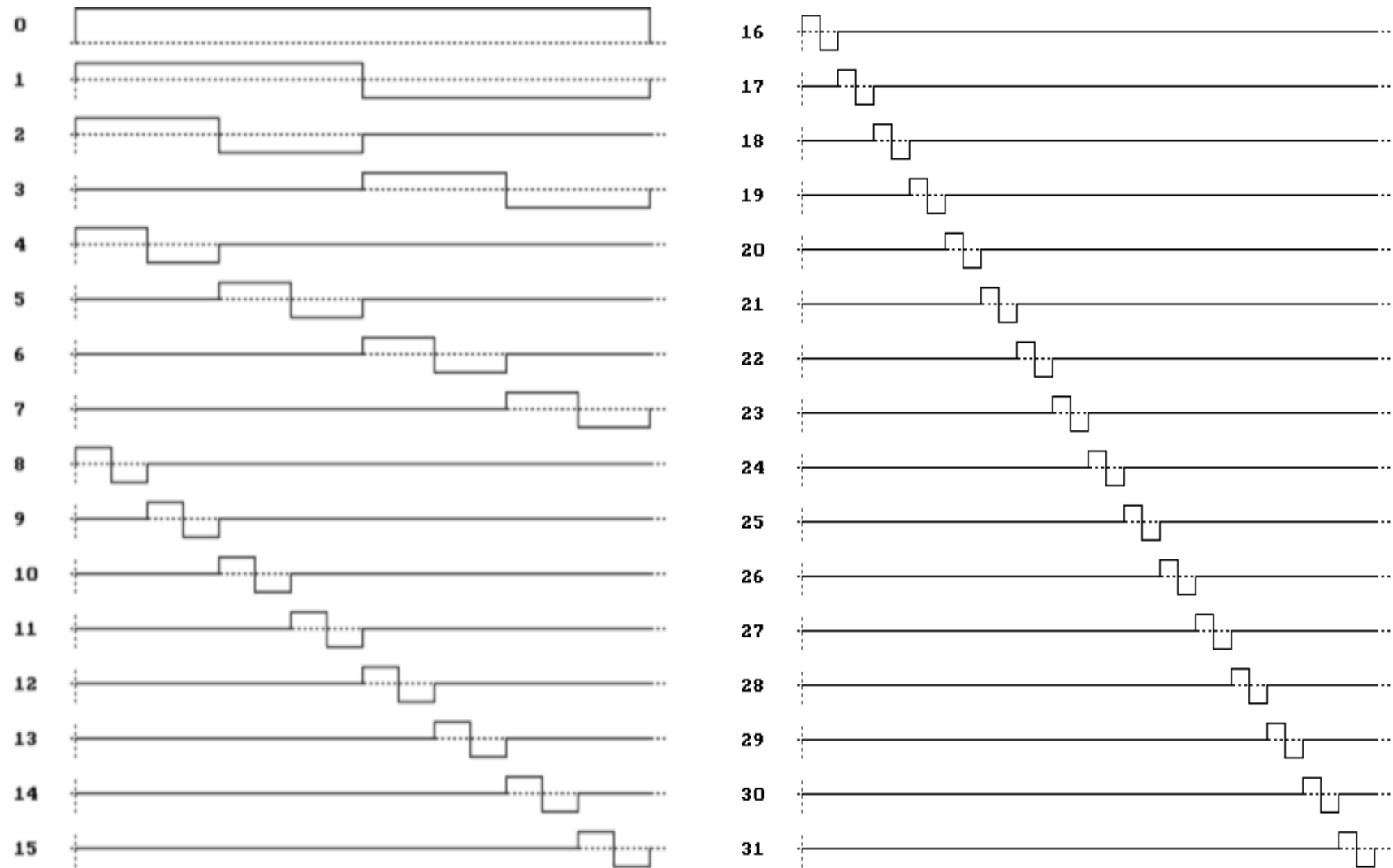


Approximation at level 5 (reconstructed).

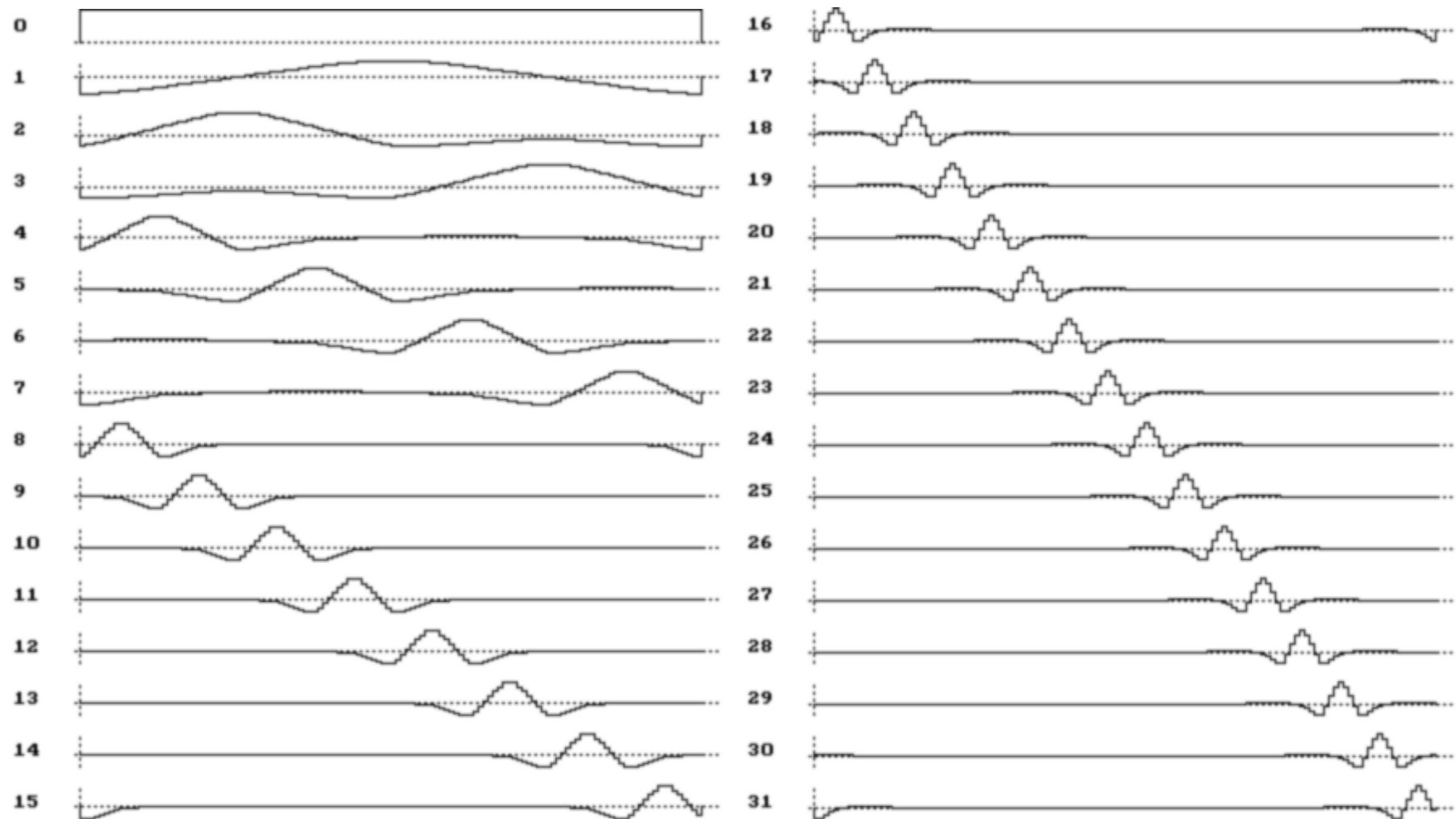




Štruktúra bázy pri ortogonálnej DWT s Db2. Pri vstupe do V_0 je báza tvorená posunmi jednotkových impluzov. Pri rozklade signálu do ďalších podpriestorov predstavujú bazové vektory čoraz lepšiu aproximáciu waveletov.



Bázové funkcie diskkrétnej waveletovej bázy o veľkosti $N=32$ pre Haarov wavelet



Prvých 32 bázových funkcií diskkrétnej waveletovej bázy o veľkosti $N=128$ pre FBI(9,7) wavelet

Biortogonálne wavelety a rozklad signálu

V predchádzajúcom texte sme vytvorili MRA s použitím ortonormálnych báz. Ak bázy $\{\psi_{m,n}\}$ a $\{\tilde{\psi}_{m,n}\}$ sú navzájom biortogonálne potom k základným waveletom $(\psi, \tilde{\psi})$ existujú funkcie mierky $\phi, \tilde{\phi}$ také, že množiny $\{\phi_{mn}\}$ a $\{\tilde{\phi}_{mn}\}$ tvoria bázy pre podpriestory V_{-m} resp. $\tilde{V}_{-m}$ a množiny $\{\psi_{mn}\}$ a $\{\tilde{\psi}_{mn}\}$ tvoria bázy pre podpriestory W_{-m} resp. $\tilde{W}_{-m}$. V $L^2(R)$ potom existujú dve MRA s hierarchiami:

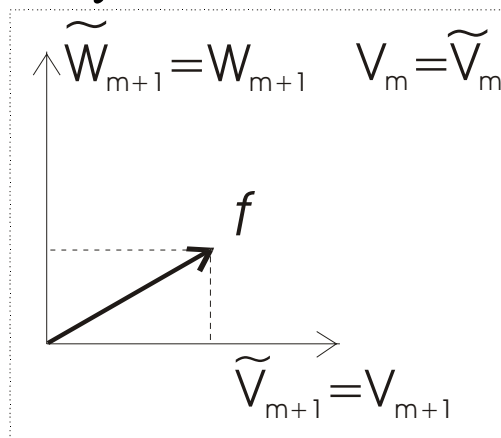
$$\begin{aligned} \dots V_2 &\subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \dots \\ \dots \tilde{V}_2 &\subset \tilde{V}_1 \subset \tilde{V}_0 \subset \tilde{V}_{-1} \subset \tilde{V}_{-2} \dots \end{aligned}$$

pričom platí že W_{m+1} je síce doplnkom k V_{m+1} v priestore V_m , ale nie je to ortogonálny doplnok. W_{m+1} je namiesto toho ortogonálny doplnok k $\tilde{V}_{m+1}$ v priestore $\tilde{V}_m$. Analogicky $\tilde{W}_{m+1}$ je ortogonálny doplnok k V_{m+1} v priestore V_m .

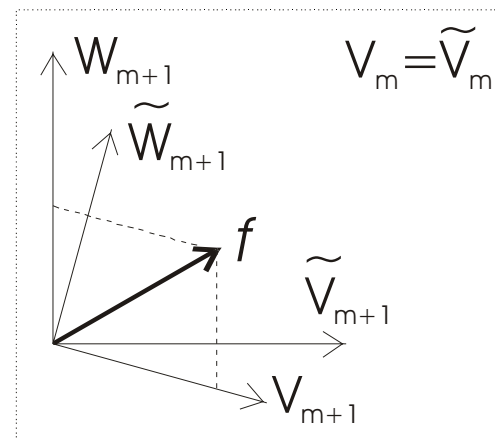
Platia nasledovné vzťahy:

$$\begin{aligned} V_m &= V_{m+1} \oplus W_{m+1} & V_m &= V_{m+1} \overset{\perp}{\oplus} \tilde{W}_{m+1} \\ \tilde{V}_m &= \tilde{V}_{m+1} \oplus \tilde{W}_{m+1} & \tilde{V}_m &= \tilde{V}_{m+1} \overset{\perp}{\oplus} W_{m+1} \end{aligned}$$

Znázornené graficky:



a) ortogonálny rozklad



b) biortogonálny rozklad

Relácie zmeny mierky potom možno vyjadriť vzťahmi:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(t) &= \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{h}_{mr}(n) \tilde{\varphi}(2t - n) & \varphi(t) &= \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n) \varphi(2t - n) \\ \tilde{\psi}(t) &= \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{g}_{mr}(n) \tilde{\varphi}(n - 2t) & \varphi(t) &= \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n) \varphi(n - 2t) \end{aligned}$$