

Vlastnosti ortonormálnych WR

Predpokladajme ortonormálnu MRA. Potom každú $f(t) \in L^2(R)$ potom môžeme vyjadriť superpozíciou

$$f(t) = \sum_{m,n \in Z} d_{m,n} \psi_{m,n}(t) \quad d_{m,n} = \langle f(t), \psi_{m,n}(t) \rangle \quad m, n \in Z$$

to, že sa jedná o odpovedajúce reprezentácie signálu, označujeme ako

$$f(t) \leftrightarrow d_{m,n}$$

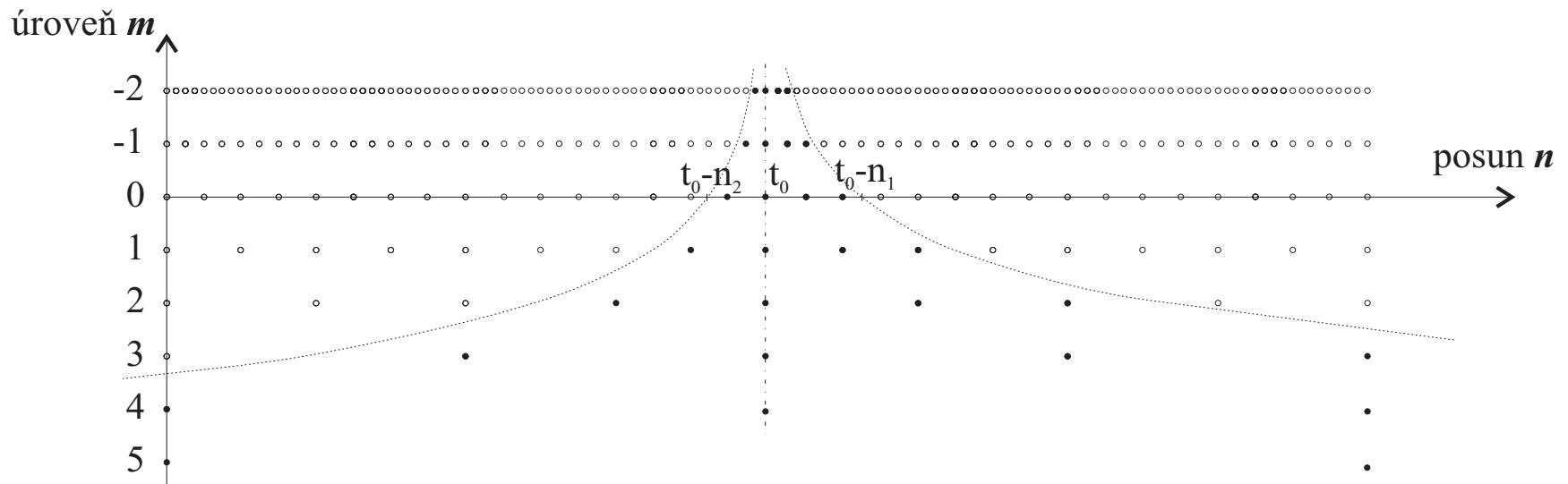
Linearita

Definujme operátor T ako $T[f(t)] = \{d_{m,n}\} = \langle f(t), \psi_{m,n}(t) \rangle$. Potom $\forall a, b \in R$ platí

$$T[a f(t) + b g(t)] = a T[f(t)] + b T[g(t)]$$

Lokalizácia

Keď zobrazíme koeficienty $d_{m,n}$ ako stredy okien príslušných waveletov $\psi_{m,n}$ v časovo frekvenčnej rovine, dostávame nasledovné **diadické vzorkovanie** časovo-frekvenčnej roviny:



Ako príklad je označený región koeficientov, ktoré sú ovplyvnené hodnotou signálu $f(t)$ v $t = t_0 = 16$, $\psi(t)$ má **kompaktnú podporu** na intervale $\langle -2.5, 1.5 \rangle$

a) lokalizácia v čase

Ak $\psi(t)$ má kompaktnú podporu na intervale $\langle n_1, n_2 \rangle$ potom $\psi_{m,n}$ má kompaktnú podporu na intervale $\langle (n + n_1)2^m, (n + n_2)2^m \rangle$. Platí:

- 1) informácie o signále $f(t)$ v čase t_0 je vyjadrená iba v koeficientoch $d_{m,n}$, pre ktorých indexy m, n platí: $2^{-m}t_0 - n_2 \leq n \leq 2^{-m}t_0 - n_1$.
- 2) koeficient d_{m_0, n_0} je ovplyvnený iba hodnotami $f(t)$ na intervale $t \in \langle (n_0 + n_1)2^{m_0}, (n_0 + n_2)2^{m_0} \rangle$

b) lokalizácia vo frekvencii

Nech $\Psi(\omega)$, fourierova transformácia $\psi(t)$ má kompaktnú podporu na intervale $\langle \omega_{\min}, \omega_{\max} \rangle$. Potom $\Psi_{m,n}(\omega)$ má kompaktnú podporu na intervale $\langle \omega_{\min} / 2^m, \omega_{\max} / 2^m \rangle$:

- 1) frekvenčná zložka $F(\omega)$ v ω_0 ovplyvní $d_{m,n}$ na úrovniach m , pre ktoré $\log_2(\omega_{\min} / \omega_0) \leq m \leq \log_2(\omega_{\max} / \omega_0)$
- 2) koeficienty $d_{m_0, n}$ sú ovplyvnené iba frekvenčnými zložkami signálu $F(\omega)$, na intervale $\omega \in \langle \omega_{\min} / 2^{m_0}, \omega_{\max} / 2^{m_0} \rangle$

Posun v čase

Ak na vyjadrenie signálu stačia waveletové koeficienty $d_{m,n}$ iba to istej úrovne M , t.j. platí:

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m=-\infty}^M d_{m,n} \psi_{m,n}(t)$$

Potom pre posun signálu platí tzv. *slabá vlastnosť posunu v čase*:

$$f(t - 2^M k) \leftrightarrow d_{m, n - 2^{M-m} k}, \quad -\infty \leq m \leq M$$

T.j. na všetkých úrovniach sú waveletové koeficienty iba preindexované. Ak signál posunieme o 2^{M-u} , t.j. nie o 2^M , uvedené pravidlo platí iba do úrovne $M-u$, koeficienty v posledných u úrovniach treba znova prepočítať.

Zmena mierky

Platí

$$f(2^{-k}t) \leftrightarrow 2^{k/2} d_{m-k,n}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Zmena mierky, ktorá nie je mocninou 2 sa rieši *reinterpoláciou* pôvodného signálu.

Otázky:

- 1) existujú vôbec nejaké urovňovo ohraničené signály ? T.j. signály úplne vyjadriteľné waveletovými koeficientami $d_{m,n}$ iba to istej úrovne M . Ako sa konštruujú take signály?

Vlastnosti funkcie mierky a waveletov

- $\varphi(t), \psi(t)$ - funkcia mierky a wavelet spĺňajúca relácie zmeny rozlíšenia
 $h(n), g(n)$ - koeficienty pre zmenu rozlíšenia $h_{mra}(n), g_{mra}(n)$, predstavujú impulzovú odpoveď FIR filtrov
 $H(\omega), G(\omega)$ - DTFT koeficientov $h(n)$ a $g(n)$

Teorém 1 : Ak platí $\int \varphi(t)dt \neq 0$ potom $\sum_n h(n) = \sqrt{2}$. Pozn.: podmienka

$\int \varphi(t)dt \neq 0$ je nutná aby MRA bola kompletná.

Teorém 2 : Ak celočíselné posuny $\varphi(t)$ sú navzájom ortonormálne, t.j.

$\int \varphi(t)\varphi(t-k)dt = \delta(k)$ potom $\sum_n h(n)h(n-2k) = \delta(k)$.

Dôsledky: $\sum_n h(2n) = \sum_n h(2n+1) = \sqrt{2}/2$ $\sum_n |h(n)|^2 = 1$

Teorém 3 : Ak $\varphi(t)$ má kompaktnú podporu na intervale $\langle 0, N-1 \rangle$ a $\varphi(t-k)$ sú lineárne nezávislé, potom $h(n)$ má kompaktnú podporu na $0 \leq n \leq N-1$, t.j. $h(n)=0$ pre $n < 0$ a pre $n > N-1$, dĺžka sekvencie $h(n)$ je N .

Vlastnosti $\varphi(t), \psi(t)$	Vlastnosti $h(n), g(n)$	Vlastnosti $H(\omega), G(\omega)$	Poznámka
$\int \varphi(t) dt = 1$	$\sum_n h(n) = \sqrt{2}$	$H(0) = \sqrt{2}$	Teorém 1
$\int \varphi(t) \varphi(t - k) dt = \delta(k)$	$\sum_n h(n) h(n - 2k) = \delta(k)$ ak $k = 0$ platí $\sum_n h(n) ^2 = 1$	$ H(\omega) ^2 + H(\omega + \pi) ^2 = 2$	Teorém 2
$\sum_l \varphi(t - l) = \sum_l \varphi(l) = 1$	$\sum_n h(2n) = \sum_n h(2n + 1)$	$H(\pi) = 0$	
$\int \psi(t) dt = 0$	$\sum_n g(n) = 0$	$G(0) = 0$	
$\int \varphi(t - n) \psi(t - m) dt = 0$	$g(n) = \pm (-1)^n h(M - n)$	$ G(\omega) = H(\omega + M\pi) $	M je nepárne
	$\sum_n h(n) g(n - 2k) = \delta(k)$	$ H(\omega) ^2 + G(\omega) ^2 = 2$	

Tab.PM1: Prehľad vlastností pri ortonormálnych WR a DWT

- Aby mohli byť splnené podmienky pre $h(n)$, treba aby N , dĺžka $h(n)$ bola párna.
- Ak $h(n)$ spĺňa uvedené podmienky, sú zarčené iba základné vlastnosti $\varphi(t)$ (integrovateľnosť, ortonormalitu, ...) pričom $\varphi(t)$ môže mať extrémne neregulárny, prípadne fraktálový charakter.
- Pri návrhu $h(n)$ s dĺžkou N , ostáva po splnení nutných $N/2+1$ podmienok ešte $N/2-1$ stupňov voľnosti. Tieto môžeme využiť aby $\varphi(t), \psi(t)$ resp. $h(n), g(n)$ mali požadované vlastnosti, ako napr. istú regularitu, aproximačné vlastnosti ...

Pozn.1: nutných $N/2+1$ podmienok je:

a) 1.podmienka: $\sum_n h(n) = \sqrt{2}$ kvoli existencii $\varphi(t)$

b) $N/2$ podmienok kvoli ortonormalite $\varphi(t)$:

$$\sum_n h(n)h(n-2k) = \delta(k) \quad k = 0, 1, \dots, N/2 - 1$$

Pozn.2: Nech $|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 2$. Označme $P(\omega) = |H(\omega)|^2$. Potom P je tzv.

Polpásmový filter t.j. v Z rovine platí : $P(z) + P(-z) = 2$

Kaskádové algoritmy, generovanie $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ vo frekvenčnej a časovej oblasti.

Ako vypočítať $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ ak poznáme koeficienty pre zmenu mierky?

Vychádzajme s rovníc:

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n) \varphi(2t - n) \qquad \psi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{mr}(n) \varphi(2t - n)$$

Tieto rovnice môžeme riešiť iteračne, pričom ak postup bude konvergovať k pevnému bodu, potom je pevný bod hľadaným riešením. Iterácie sú definované:

$$\varphi^{(k+1)}(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n) \varphi^{(k)}(2t - n) \qquad \psi^{(k+1)}(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n) \psi^{(k)}(2t - n)$$

Uvedený iteračný postup sa nazýva aj **kaskádový algoritmus**. Hľadáme teraz riešenie vo frekvenčnej oblasti.

Použitím fourierovej transformácie dostaneme:

$$\Phi^{(k+1)}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} H_{mr}(\omega/2) \Phi^{(k)}(\omega/2)$$

riešením tejto rovnice pre $k \rightarrow \infty$ dostávame

$$\Phi^{(\infty)}(\omega) = \Phi^{(\infty)}(0) \prod_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} H_{mr}(\omega/2^k) \right]$$

Ak táto limita existuje a je spojitá v $\omega = 0$ potom $\Phi(\omega) = \Phi^{(\infty)}(\omega)$. Analogicky:

$$\Psi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} G_{mr}(\omega/2) \prod_{k=2}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} H_{mr}(\omega/2^k) \right]$$

Výsledok oboch **kaskádových agoritmov** nezávisí od tvaru $\varphi^{(0)}(t)$ ale iba od hodnoty $\Phi^{(k)}(0) = \int \varphi^{(k)}(t) dt = A_0 > 0$, ktorá je invariantná vzhľadom na iterácie.

Momentové vlastnosti

k-te momenty $\varphi(t), \psi(t)$ sú definované:

$$m_{\varphi}(k) = \int t^k \varphi(t) dt \qquad m_{\psi}(k) = \int t^k \psi(t) dt$$

diskrétny k-te momenty $h(n), g(n)$ sú definované:

$$\mu_h(k) = \sum_n n^k h(n) \qquad \mu_g(k) = \sum_n n^k g(n)$$

z diskretných momentov μ_h, μ_g môžeme vypočítať *spojité momenty* pomocou:

$$m_{\varphi}(k) = \frac{1}{(2^k - 1)\sqrt{2}} \sum_{l=1}^k \binom{k}{l} \mu_h(l) m_{\varphi}(k-l) \qquad m_{\psi}(k) = \frac{1}{2^k \sqrt{2}} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \mu_g(l) m_{\varphi}(k-l)$$

na začiatku výpočtu si treba uvedomiť, že $m_{\varphi}(0) = 1$.

Počet nulových momentov $m_\psi(k)$ dáva informáciu o plochosti $H(\omega)$ a hladkosti $\psi(t)$ ktoré rastú priamo úmerne. Okrem toho, čím viac máme waveletových momentov je nulových, tým lepšiu aproximáciu získame pri projekcii signálu $f(t) \in L^2(R)$ do V_m .

Čím väčší počet nulových momentov $m_\varphi(k)$ je dôležitý pri aproximácii signálu $f(t) \in L^2(R)$ vo V_m pomocou vzoriek $f(t)$ namiesto projekčných koeficientov. Takisto sa zlepšuje aj symetria $\varphi(t)$.

Príkladom waveletového systému, ktorého dizajn je založený na momentových vlastnostiach $\varphi(t), \psi(t)$ sú tzv. *Coiflets*. Je to ortonormálny systém v ktorom sa snažíme nulovať momenty waveletu a rovnako aj funkcie mierky:

$$m_\varphi(k) = 0, \quad m_\psi(k) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, L-1$$

K-regulárne filtre

FIR filter s impulzovou odpoveďou $h(n)$, ktorá spĺňa podmienky v Tab.PM1 sa nazýva *K-regulárny* vtedy ak platia nasledovné ekvivalentné tvrdenia:

- 1) $H(\omega)$ má *K-násobnú nulu* v $\omega = \pi$
- 2) prvých K-diskrétnych aj spojitých waveletových momentov je nulových, t.j.: $m_\psi(k) = 0$, $\mu_\psi(k) = 0$, pre $k = 0, 1, \dots, (K - 1)$
- 3) polynomicke sekvencie stupňa $\leq (K - 1)$ môžu byť vyjadrené lineárnou kombináciou posunov $h(n)$.
- 4) polynómy stupňa $\leq (K - 1)$ môžu byť vyjadrené lineárnou kombináciou posunov $\varphi(t)$

Potom Z transformáciu $h(n)$: $H(z) = \sum_n h(n)z^{-n}$ môžeme napísať v tvare:

$$H(z) = \left(\frac{1 + z^{-1}}{2} \right)^K L(z)$$

pričom $L(z)$ nemá žiadne póly v $z = e^{i\pi}$. Ak N je dĺžka filtra $h(n)$, potom polynóm $H(z)$ je stupňa $N-1$ a $L(z)$ stupňa $N-1-K$. Aby $L(z)$ zabezpečilo splnenie nutných $N/2$ podmienok pre ortogonalitu, musí byť aspoň stupňa $N/2-1$. Potom $K \leq N/2$.

Zároveň z podmienky existencie $\varphi(t)$ automaticky platí, že $h(n)$ je aspoň $K=1$ regulárne. Takže platí :

$$1 \leq K \leq N/2$$

Návrh waveletov s K nulovými momentami

Nech $h(n)$ s dĺžkou N je *K-regulárny filter* (prvých K momentov $\psi(t)$ je nulových). Potom:

$$H(\omega) = \left(\frac{1 + e^{i\omega}}{2} \right) L(\omega)$$

spĺňa $|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 1$ vtedy a len vtedy, ak

$$|L(\omega)|^2 = P(\sin^2(\omega/2))$$

kde

$$P(y) = \sum_{k=0}^{K-1} \binom{K-1+k}{k} y^k + y^K R(1/2 - y)$$

a $R(y)$ je antisymetrický polynóm taký, že $P(y) \geq 0$ pre $y \in \langle 0, 1 \rangle$. Ak $R(y) = 0$, potom dostávame wavelety s maximálnym počtom nulových momentov N , tzv. *Daubechies* wavelety. Ak $N > 2K$ potom $R(y)$ nám vyjadruje stupne voľnosti, ktoré môžeme použiť na modifikáciu vlastností waveletov.

Pri výpočte $H(\omega)$ dostaneme potrebné $L(\omega)$ spektrálnou faktorizáciou $|L(\omega)|^2$.

Autokorelácia a spektrálna faktorizácia.

Autokorelačiou sekvencie $h(n)$ budeme nazývať sekvenciu:

$$p(n) = \langle h(k), h(k-n) \rangle$$

Použitím DTFT dostávame:

$$P(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(n) e^{-i\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) h^*(k-n) e^{-i\omega n} = H^*(\omega) H(\omega) = |H(\omega)|^2$$

Vyjadrením v Z-rovine dostaneme:

$$P(z) = H_*(z^{-1}) H(z)$$

, kde označenie * znamená konjugáciu koeficientov, nie celej funkcie. Vidíme, že ak z_k je nula $P(z)$ potom nula je aj $1/z_k^*$, t.j. nuly sa vyskytujú iba v pároch. Navyše ak $h(n)$ je reálne, potom $P(z)$ má nuly aj v z_k^* a $1/z_k$.

Platí:

$$P(z) = \alpha \prod_{i=1}^{N_1} \left((1 - z_{1_i} z^{-1}) (1 - z_{1_i}^* z) \right) \prod_{i=1}^{N_2} \left((1 - z_{2_i} z^{-1}) (1 - z_{2_i}^* z) \right)$$

,kde N_1 je počet párov núl na jednotkovej kružnici (platí $|z_{1_i}|=1$, pár je vlastne dvojnásobný koreň) a N_2 je počet párov núl mimo jednotkovej kružnice (platí $|z_{2_i}|<1$).

Pre danú $P(z)$ sa vyhovujúce $H(z)$ nazývajú *spektrálne faktory* $P(z)$. Tieto faktory nie su jedinečné, pričom ich získame použitím iba jednej nuly z každého páru núl $P(z)$. Všetky riešenia majú rovnakú magnitúdovú charakteristiku, líšia sa iba vo fázovej charakteristike. Dôležité je *riešenie s minimálnou fázou*, t.j. pri vytváraní $H(z)$ použijeme iba nuly v a na jednotkovej kružnici. Potom:

$$H(z) = \sqrt{\alpha} \prod_{i=1}^{N_1} (1 - z_{1_i} z^{-1}) \prod_{i=1}^{N_2} (1 - z_{2_i} z^{-1})$$

Príklad: Zistite koeficienty $h(n)$, pre Daubechies wavelety s minimálnou fázou ak $N=6$.

Riešenie: Chceme max. počet nulových mometov, t.j. $K=3$, $R=0$.

Potom $P(y) = 1 + 3y + 6y^2$,

$$y = \sin^2(\omega/2) = \frac{1}{2}(1 - \cos(\omega)) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}(e^{i\omega} + e^{-i\omega})\right) = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}z^{-1}$$

$$P(z) = \frac{3}{8}z^{-2} - \frac{9}{4}z^{-1} + \frac{19}{4} - \frac{9}{4}z + \frac{3}{8}z^2$$

nulové body sú

$$\{0.28725 - 0.15289i, 2.71275 + 1.44389i \\ 0.28725 + 0.15289i, 2.71275 - 1.44389i\}$$

$$P(z) = \alpha \left(1 - (0.28725 - 0.15289i)z^{-1}\right) \left(1 - (0.28725 + 0.15289i)z\right) \\ \left(1 - (0.28725 + 0.15289i)z^{-1}\right) \left(1 + (0.28725 - 0.15289i)z\right)$$

α zistíme pomocou koeficientu pri najvyššej mocnine

$$\alpha = \frac{3}{8} \sqrt{[(0.28725 - 0.15289i)(0.28725 - 0.15289i)]}$$

vytvoríme faktor s minimálnou fázou:

$$L(z) = \sqrt{\alpha} \left(1 - (0.28725 - 0.15289i)z^{-1}\right) \left(1 - (0.28725 + 0.15289i)z^{-1}\right)$$

Aby sme dostali ortonormálny systém, normujeme $H(z)$ faktorom $\sqrt{2}$, potom:

$$H(z) = \sqrt{2} \left(\frac{1+z}{2}\right)^3 L(z)$$

čo je numericky

$$H(z) = 0.33267z^3 + 0.80689z^2 + 0.45988z - 0.13501 + 0.08544z^{-1} + 0.03523z^{-2}$$

Čo odpovedá nekauzálnemu filteru.

Kauzalitu dosiahneme vynásobením $H(z)$ faktorom z^{-3} , t.j. oneskorením $h(n)$ o 3 takty. Potom

$$h(n) = \{0.33267, 0.80689, 0.45988, -0.13501, 0.08544, 0.03523\}$$

Biortogonálne wavelety a nulové momenty.

Predpokladajme všeobecné riešenie faktorizácie $P(z)$ v tvare $P(z) = F(z)H(z)$.

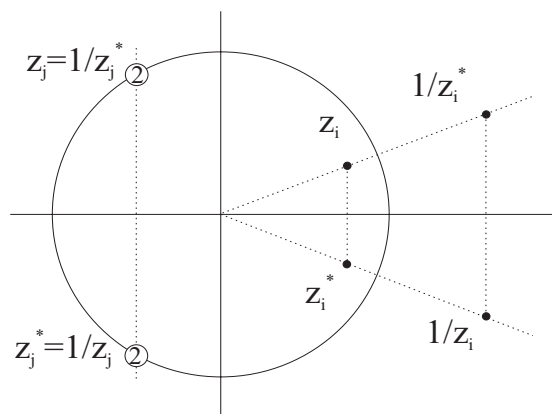
Nulové body $P(z)$ označme z_i . Potom platia nasledovné pravidlá:

- 1) aby $F(z)$ a $H(z)$ boli prenosové funkcie *reálnych filtrov*, z_i a z_i^* musíme použiť v pároch
- 2) aby $F(z)$ a $H(z)$ boli prenosové funkcie filtrov s *Lineárnou fázou*, z_i a $1/z_i$ musíme použiť v pároch
- 3) Aby $F(z)$ a $H(z)$ mohli tvoriť *ortogonálne wavelety*, z_i a $1/z_i$ musíme použiť oddelene.

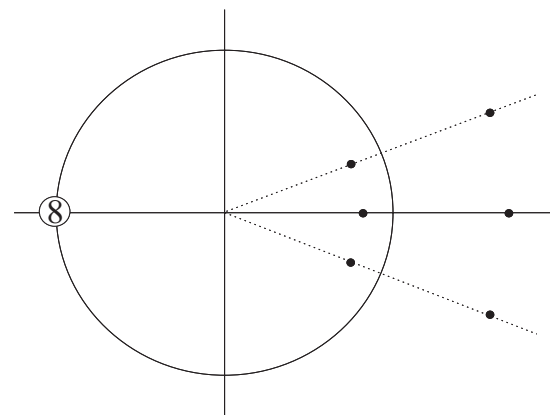
Zároveň platí: Symetrický ortogonálny FIR filter s prenosovou funkciou $H(z)$, môže mať maximálne 2 nenulové koeficienty, pričom platí :

$$H(z) = (1 + z^{-N}) / \sqrt{2}$$

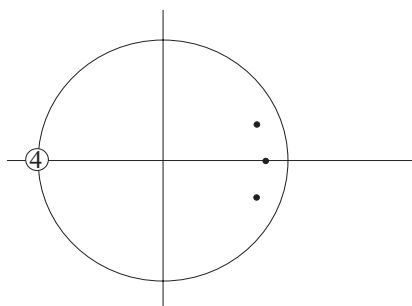
a N je nepárne.



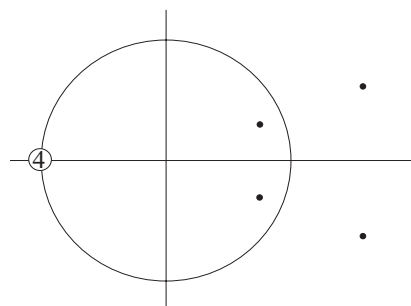
a) Všeobecné umiestnenie núl $P(z)$



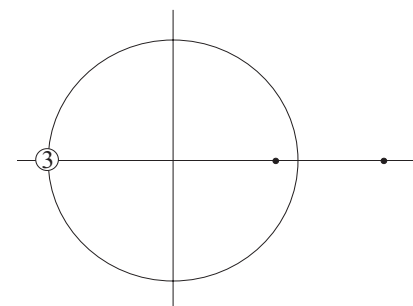
b) Umiestnenie núl pre maximálne hladký polpásmový filter so 14 nulami v $P(z)$



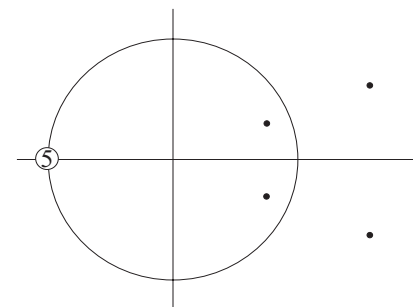
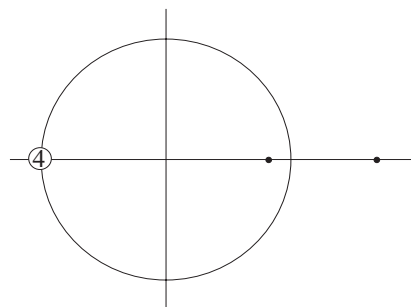
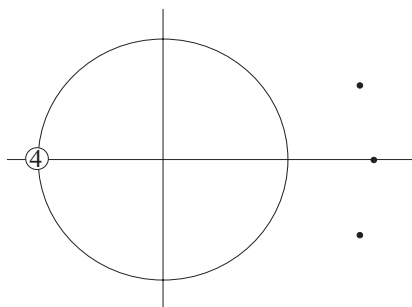
8/8 ortogonálne



9/7 symetrické



6/10 symetrické



c) Príklady faktorizácie $P(z)$ z b)

T.j. sú možné 3 tvary filtrov pre biortogonálne wavelety:

- 1) filtre pre ortogonálne wavelety
- 2) filtre s lineárnou fázou, symetrické
 - Všetky sú s *nepárnou* dĺžkou impulzovej odpovede
 - Všetky sú s *párnou* dĺžkou impulzovej odpovede