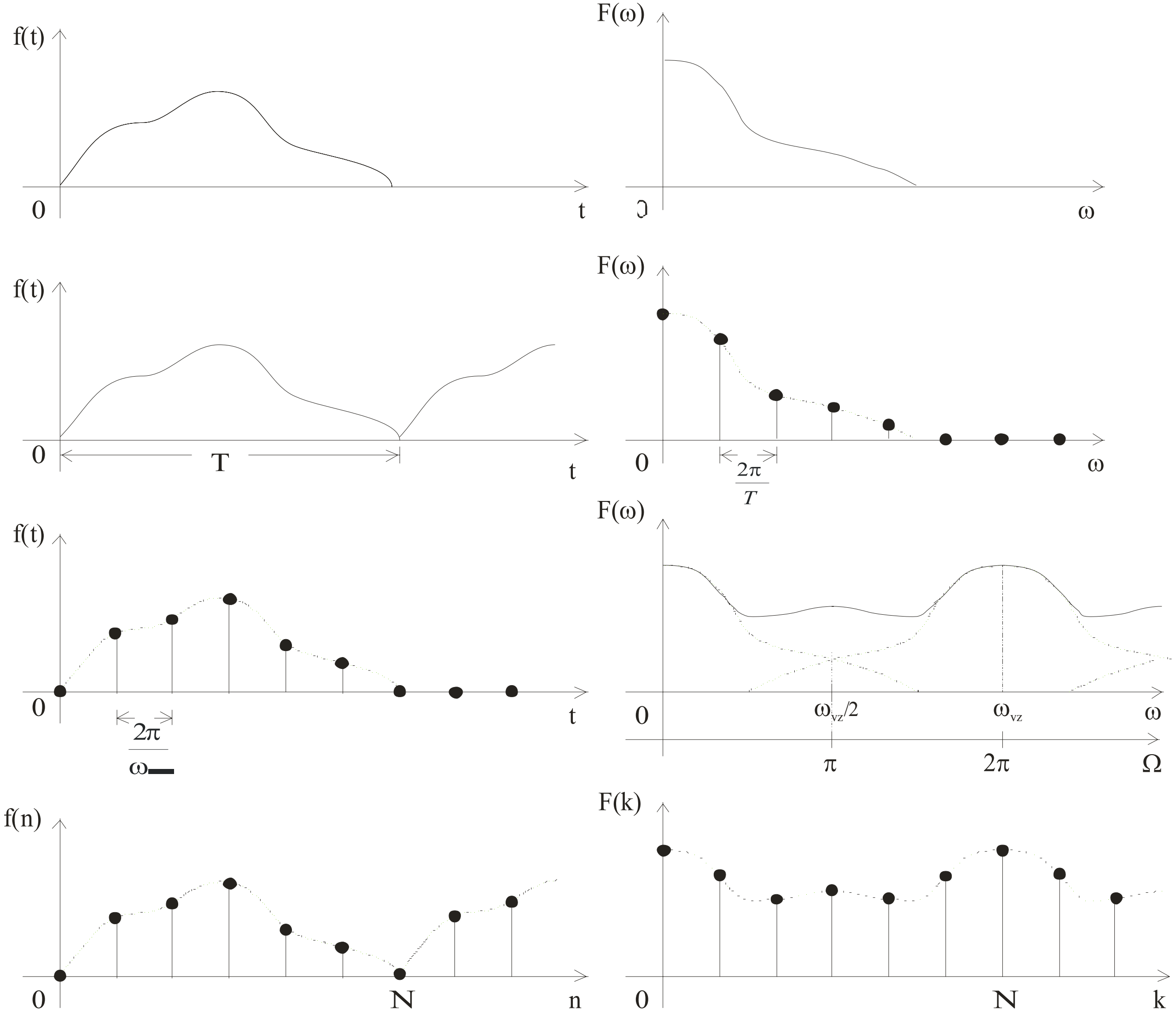
Fourierova transformácia a jej druhy



a) CTFT
(Continuous Time
Fourier Transform)
<u>- „FT”</u>

b) CTFS
(Continuous Time
Fourier Series)
<u>- „FR“</u>

c) DTFT
(Discrete Time
<u>Fourier Trasform)</u>

d) DTFT
(Discrete Time
Fourier Series)
<u>- “DFT”</u>

DRUH	**Čas**	**Frekvencia**	**Analýza/syntéza**
CTFT	Spojitý	Spojitá	$F(\omega)=\int_t f(t)e^{-j\omega t}\,dt$ $\quad f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_\omega F(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$
CTFS	Spojitý Periodický, perióda=T	Diskrétna	$F(k)=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-j2\pi kt/T}\,dt$ $\quad f(t)=\sum_k F(k)e^{j2\pi kt/T}$
DTFT	Diskrétny	Spojitá Periodická, perióda $=2\pi$	$F(\Omega)=\sum_n f(n)e^{-j\Omega n}$ $\quad f(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\Omega)e^{j\Omega n}\,d\Omega$ $\Omega=2\pi\omega/\omega_{vz}$
DTFS	Diskrény, Periodický, perióda=N	Diskréna, Periodická, perióda=N	$F(k)=\sum_{n=0}^{N-1} f(n)e^{-j2\pi nk/N}=\sum_{n=0}^{N-1} f(n)W_N^{-nk}$ $f(n)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F(k)e^{j2\pi nk/N}=\sum_{n=0}^{N-1} F(k)W_N^{nk}$ $W_N=e^{j2\pi/N}$

Stručná história waveletov

- Korene waveletovej analýzy, siahajú až k začiatku nášho storočia.
- Prvý "wavelet" skonštruoval I.Haar v r. 1910 pri konštrukcii alternatívneho ortonormálneho systému k Fourierovmu
- … teórie Littlewood-Paleyho, harmonickej analýzy, atomickej dekompozíciie a teórie rámcov ….
- Vznik ucelenej waveletovej teórie - začiatok 80tich rokov
- Objavenie tesných vzťahov medzi bankami filtrov a waveletovými bázami. - S.Mallat, 1985
- Neskôr …. konštrukcie waveletov tvoriace bázy pre mnohé priestory funkcií (Y.Meyer, I.Daubechies, Battle, Lemarie...)

Časovo - frekvenčná analýza a waveletová transformácia

Pri analýze a reprezentácii signálov je častokrát výhodné použiť transformáciu, ktorá reprezentuje signál súčasne v čase aj frekvencii.

- *Fourierova transformácia* rozkladá signál na frekvenčné komponenty. Neposkytuje informáciu, **kedy** signál vykazuje dané frekvenčné charakteristiky (jej bázové funkcie rovnomerne prekrývajú celú časovú os)

- Riešenie vo forme oknovej *STFT (Short Time Fourier Transform),* Gábor (1946), posúva okno fixnej veľkosti pozdĺž signálu a extrahuje frekvenčný obsah v danom intervale

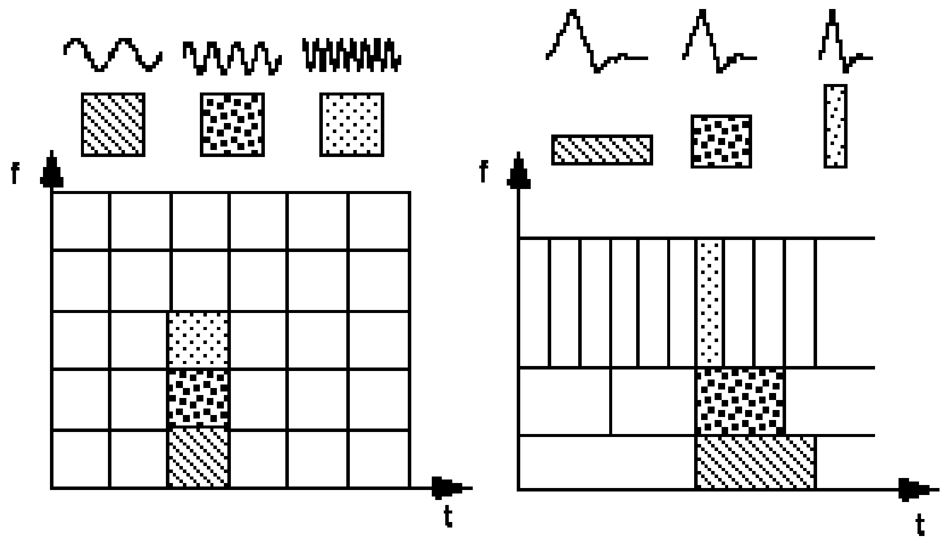
$$F(\omega,\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t-\tau)e^{-j\omega t}dt\left\langle f(t)g(t-\tau),e^{j\omega t}\right\rangle$$

  ,kde $g(t)$ je oknová funkcia a $f(t)$ vstupná funkcia. Ak oknová funkcia je gaussovská funkcia, tak STFT sa volá *Gáborova transformácia*.

Pre STFT platí:

- Bázové funkcie sú generované *moduláciou* a *posunom* oknovej (prototypovej) funkcie $g(t)$.
- STFT má pre danú oknovú funkciu *pevné rozlíšenie vo frekvencii*.

Každý signál môže byť znázornený v *časovo-frekvenčnej rovine*, ktorá charakterizuje rozdelenie napr. energie signálu v čase a frekvencii.



Znázornenie signálov v časovo-frekvenčenj rovine

Rozlíšenie v čase a frekvencii pre danú funkciu $x(t)$ a jej fourierovu transformáciu $X(\omega)$ je dané *časovo – frekvenčným oknom*. Jeho stred je v bode $S=(t_0,\omega_0)$, a veľkosti strán sú $2\sigma_t, 2\sigma_\omega$. Platí:

$$t_0 = \|x(t)\|^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} t|x(t)|^2\,dt \qquad \omega_0 = \|X(\omega)\|^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} \omega|X(\omega)|^2\,d\omega \qquad \text{(1.moment)}$$

$$\sigma_t^2 = \|x(t)\|^{-2}\int_{-\infty}^{\infty} (t-t_0)^2|x(t)|^2\,dt \qquad \sigma_\omega^2 = \|X(\omega)\|^{-2}\int_{-\infty}^{\infty} (\omega-\omega_0)^2|X(\omega)|^2\,d\omega \qquad \text{(2.moment)}$$

Pozn1: Z definície Fourierovej transformácie vyplýva $\|X(\omega)\| = \sqrt{2\pi}\,\|x(t)\|$.

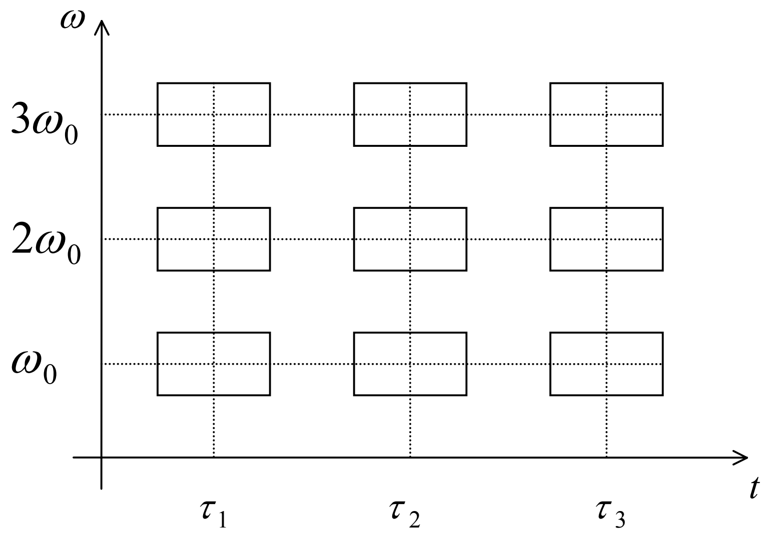
Pozn2: Rôzne τ,ω pri STFT zodpovedajú posunom základného časovo-frekvenčnéo okna v čase a frekvencii

Princíp neurčitosti:

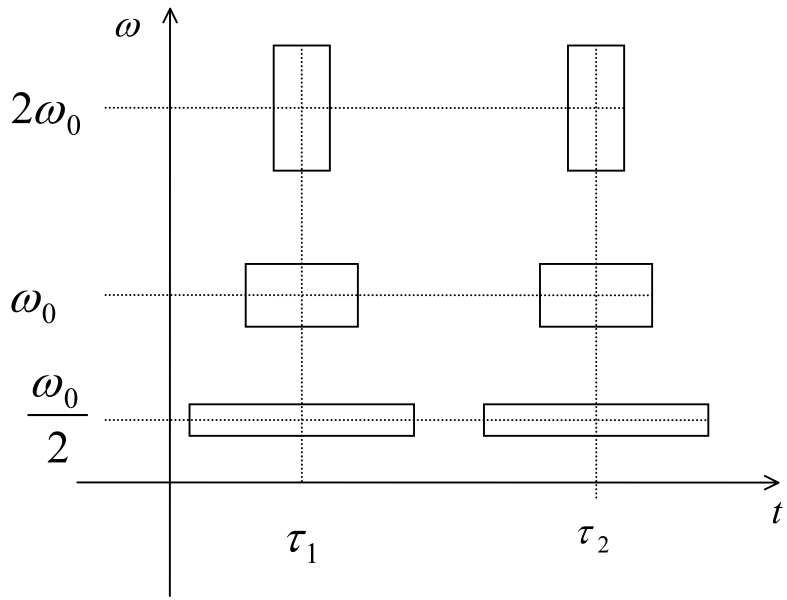
Pre $x(t)$ idúce k nule rýchlejšie ako $1/\sqrt{t}$ ak $t \to \pm\infty$ platí:

$$\sigma_t^2 \cdot \sigma_\varpi^2 \geq 1/4$$

Rovnosť platí, ak $x(t)$ je Gaussova funkcia $x(t) = \sqrt{\alpha / \pi}\, e^{-\alpha t^2}$.



a)



b)

Časovo - frekvenčná rovina s príkladom rozloženia časovo - frekvenčných okien pre a) STFT b) Waveletovú transformáciu

Wigner-Villove rozdelenie(WVR) - predchodca waveletov

Wigner-Villove rozdelenie signálu $x(t)$ je dané:

$$W_x(t,f)=\int_\tau x(t+\tau/2)x^*(t-\tau/2)e^{-i2\pi f\tau}d\tau$$

WVR je:

1) Fourierova transformáciu autokorelačnej funkcie signálu s rôznym posunutím τ počiatku v čase.
2) STFT, kde oknová funkcia je otočená a posúvaná kópia signálu $x(t)$.

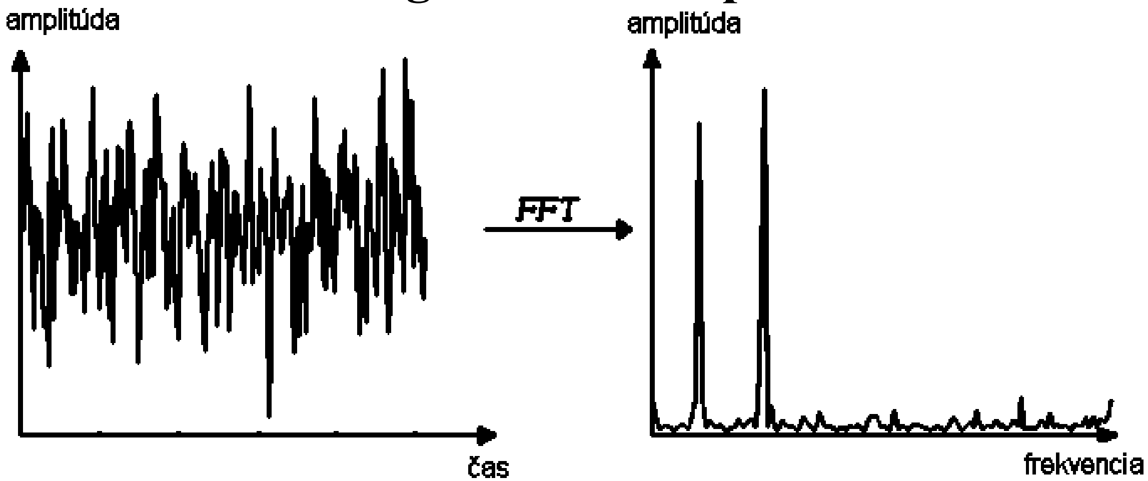
<u>Vlastnosti:</u>

1) WVR ponúka vo všeobecnosti oveľa lepšie časovo-frekvenčné rozlíšenie ako STFT.

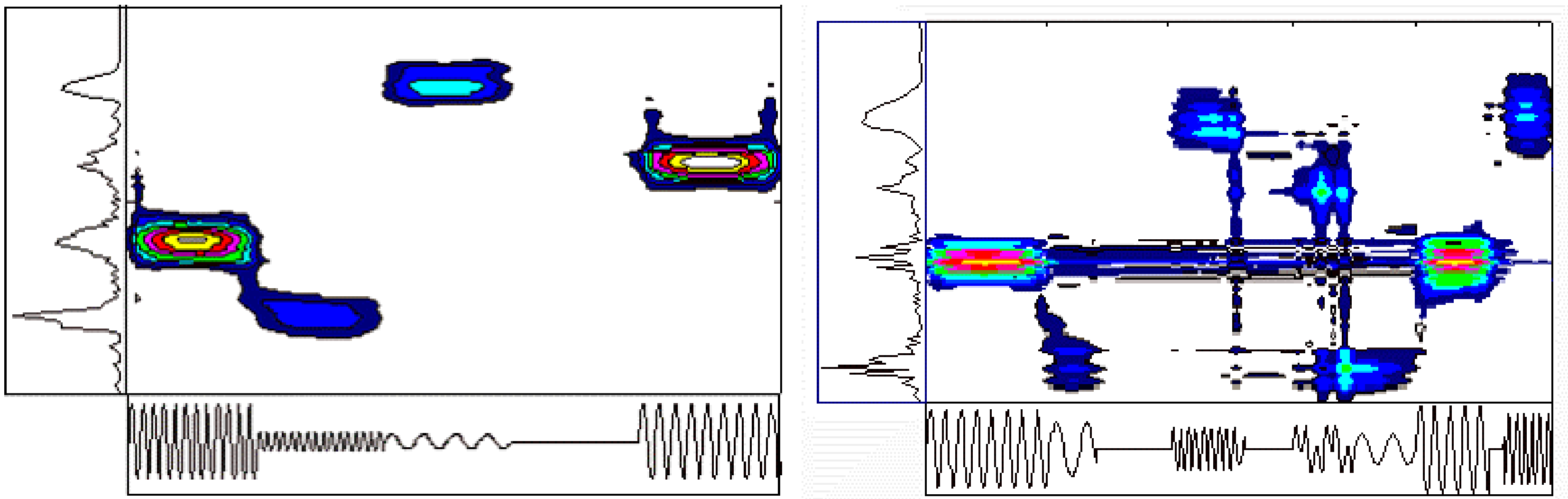
2) Pre WVR platí $W_x(t,f)\in R$, t.j. obor hodnôt sú reálne a nie komplexné čísla

3) Problematická rekonštrukcia signálu

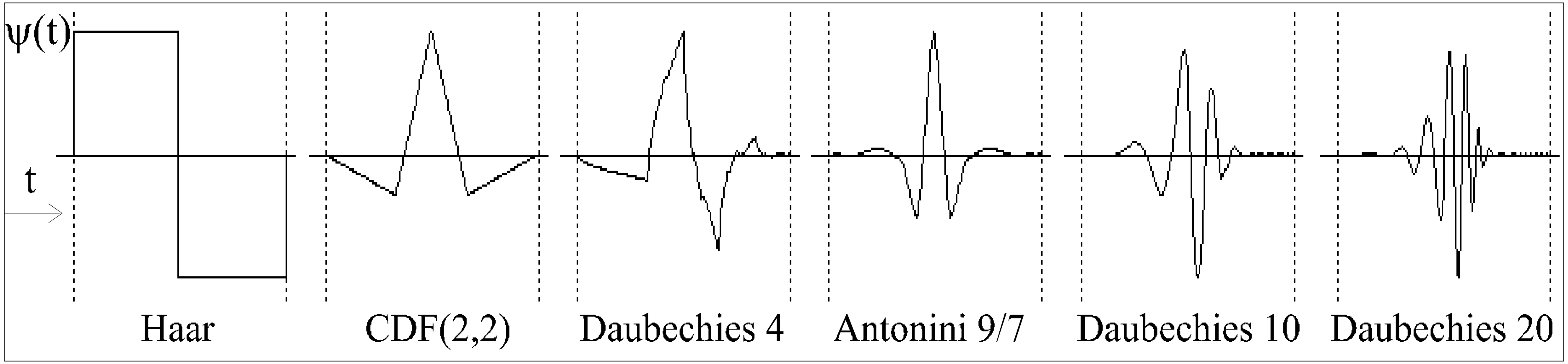
Informácia o signále získané pomocou FFT



Informácia o signále v časovo-frekvenčnej rovine získané pomocou WVR



Waveletová transformácia (WT) má oproti STFT funkcie formované iba zmenou mierky a posunom *prototypovej funkcie (základného waveletu)* $\psi(t)$



Príklady rôznych druhov základných waveletov v $L_2(R)$

Spojitá waveletová transformácia (SWT) funkcie $f(t) \in L^2(R)$ je definovaná ako zobrazenie $L^2(R) \to L^2(R^2)$ vzťahom

$$SWT_f(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi^*_{a,b}(t)dt = \langle f(t), \psi_{a,b}(t) \rangle \qquad a \in R^+, b \in R$$

Funkcie $\psi_{a,b}(t)$ sú definované zo *základného waveletu* $\psi(t)$ pomocou parametrov *zmeny mierky* a *posunu* a , b nasledovne:

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad , \qquad \psi(t) \in L^2(R)$$

SWT v závislosti od parametra a poskytuje pružné časovo - frekvenčné rozlíšenie. Ak *časovo - frekvenčné okno* $\psi(t)$ má rozmery σ_t ,σ_ϖ a stred v bode $S = (t_0, \omega_0)$, potom

$$\sigma_{ab_t} = a\sigma_t \qquad \sigma_{ab_\omega} = \sigma_\omega / a \qquad S_{ab} = (at_0 + b, \omega_0 / a)$$

T.j. obsah okna ostáva konštantne $4\sigma_t\sigma_\omega$.

Príklad: *Ak funkcia* $f(t)$ *má nenulové hodnoty na intervale* (t_0, t_1), *kde bude nenulová* $f[(t-b)/a]$ *?*

Riešenie: *Hľadáme taký interval* (t_0^*, t_1^*), *ktorý sa daným prepisom zobrazí na* (t_0, t_1), *t.j.:* $t_0 = (t_0^* - b)/a$ *a* $t_1 = (t_1^* - b)/a$ *z toho* $t_0^* = at_0 + b$, $t_1^* = at_1 + b$. *Riešením je teda interval* $(at_0 + b,\ at_1 + b)$.

SWT je *invertovateľná,* ak pre Fourierovu transformáciu $\Psi(\omega)$ základného waveletu platí:

$$C_\psi = \int_0^\infty \left| \frac{\Psi(\omega)}{\omega} \right|^2 d\omega < \infty \qquad \Psi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$$

t.j. $\Psi(\omega)$ má charakter pásmového priepustu. Potom existuje inverzná SWT v tvare:

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} SWT_f(a,b) \cdot \psi_{a,b}(t) \frac{da\,db}{a^2}$$

Pozn.1:Základné wavelety majú zvyčajne jednotkovú energiu, t.j. $\|\psi(t)\| = 1$.

Pozn.2: Normalizácia $1/\sqrt{a}$ pri výpočte $\psi_{a,b}(t)$ z $\psi(t)$ zabezpečuje $\|\psi_{a,b}(t)\| = \|\psi(t)\|$.

Zovšeobecnenie

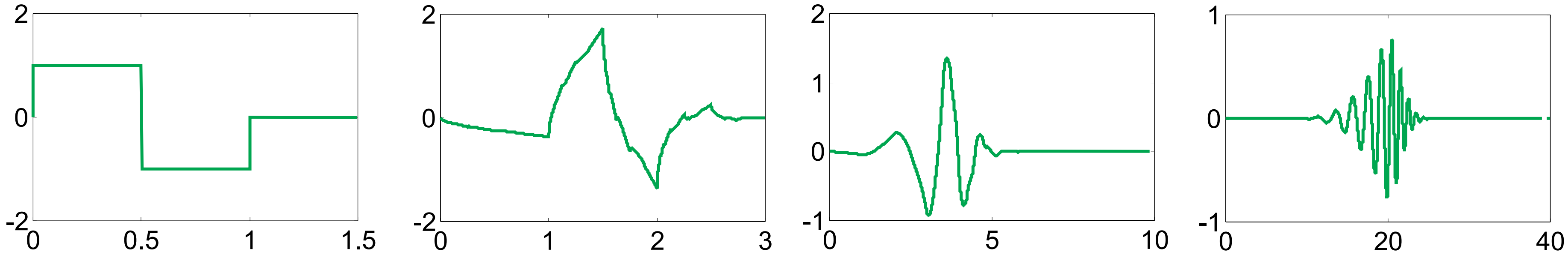
Pri SWT je možné použiť pri rozklade a rekonštrukcii signálu rôzne základné wavelety $\tilde{\psi}(t)$ a $\psi(t)$:

$$f(t) = \frac{1}{C_{\tilde{\psi},\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle f, \tilde{\psi}_{a,b} \right\rangle \psi_{a,b} \frac{dadb}{a^2}$$

Invertovateľnosť je podmienená vzťahom pre výpočet $C_{\tilde{\psi},\psi}$ nasledovne:

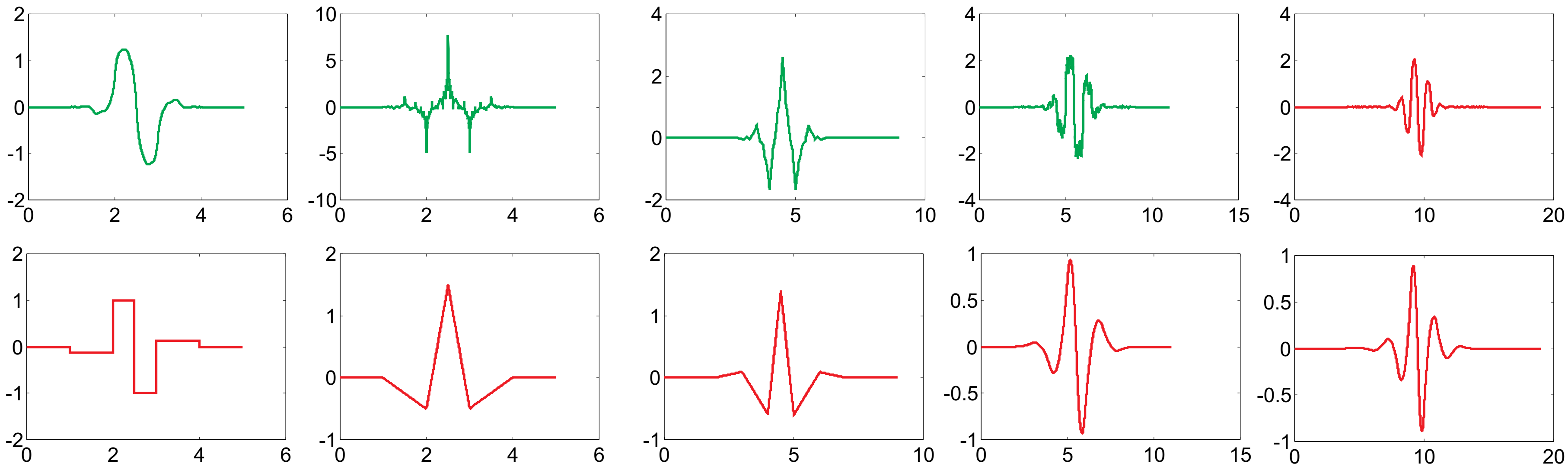
$$C_{\tilde{\psi},\psi} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|\tilde{\Psi}(\omega)\right| \left|\Psi(\omega)\right|}{|\omega|} d\omega < \infty$$

Príklady základných waveletov $\psi(t)$ z rodiny ortogonálnych Daubechies waveletov:

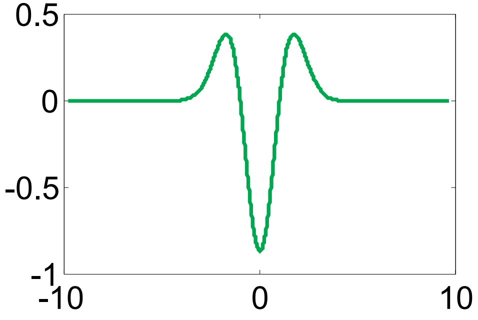


Db1(Haar) Db2 Db4 Db20

Príklady základných biortogonalnych spline waveletov ($\psi(t)$ zelené, $\tilde{\psi}(t)$ červené)



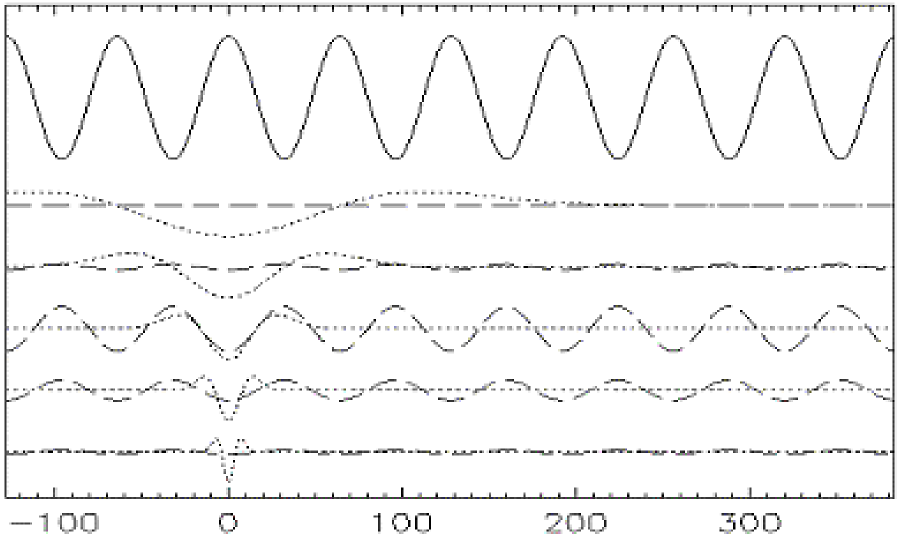
BS1.3 BS2.2 BS2.4 BS3.5 BS3.9



Wavelet ”Mexický klobúk” (obrátená verzia)

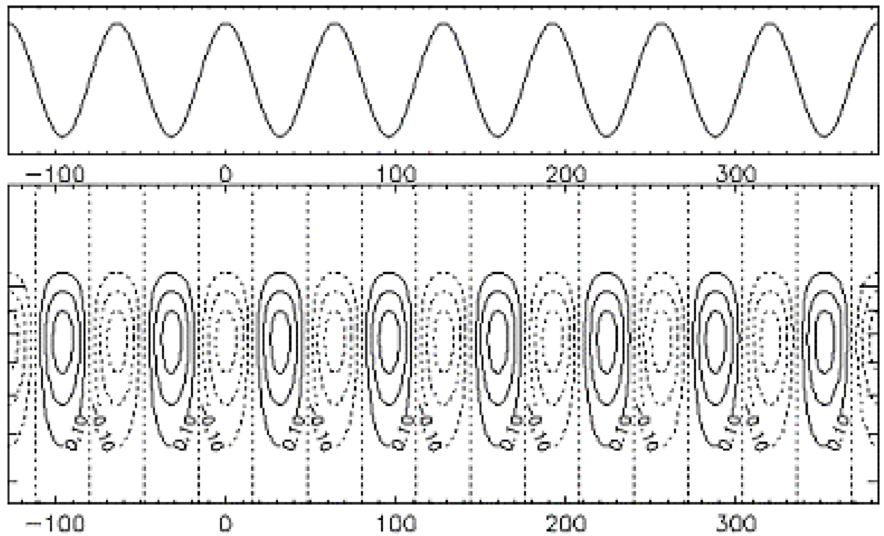
$$\psi_{mex}(t) = \left(t^2 - 1\right) e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Analýza signálu $f(t) = \cos(t/10)$ pomocou $\psi_{mex}(t)$



a)Zhoda $f(t)$ s $\psi_{mex}(t)$ s meniacou sa mierkou

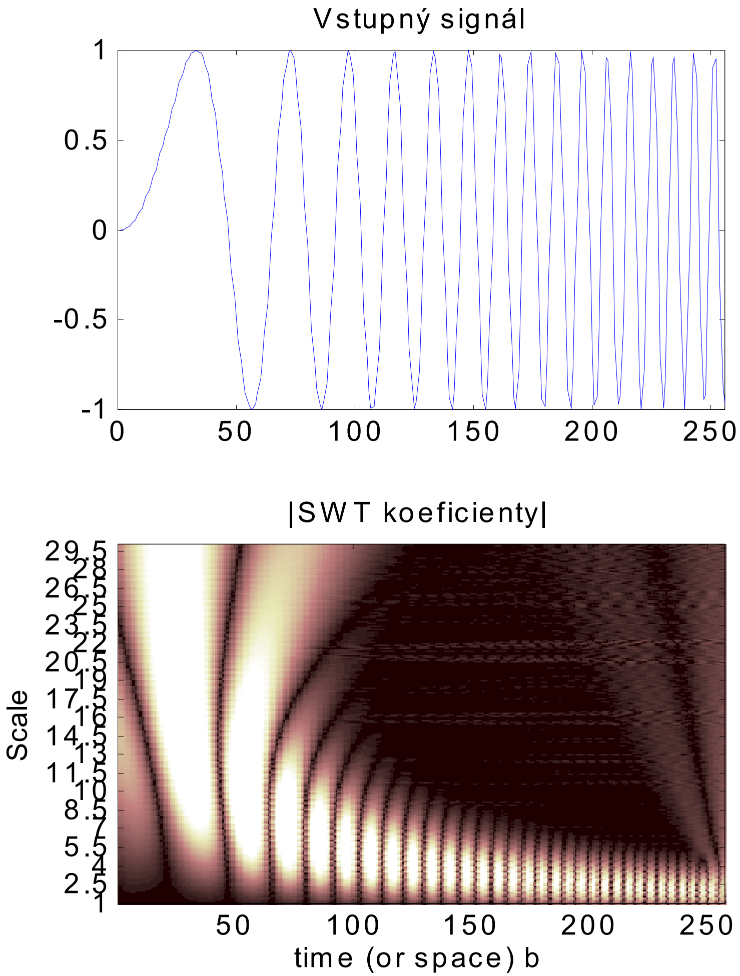
(výsledok znázornený bodkovane)



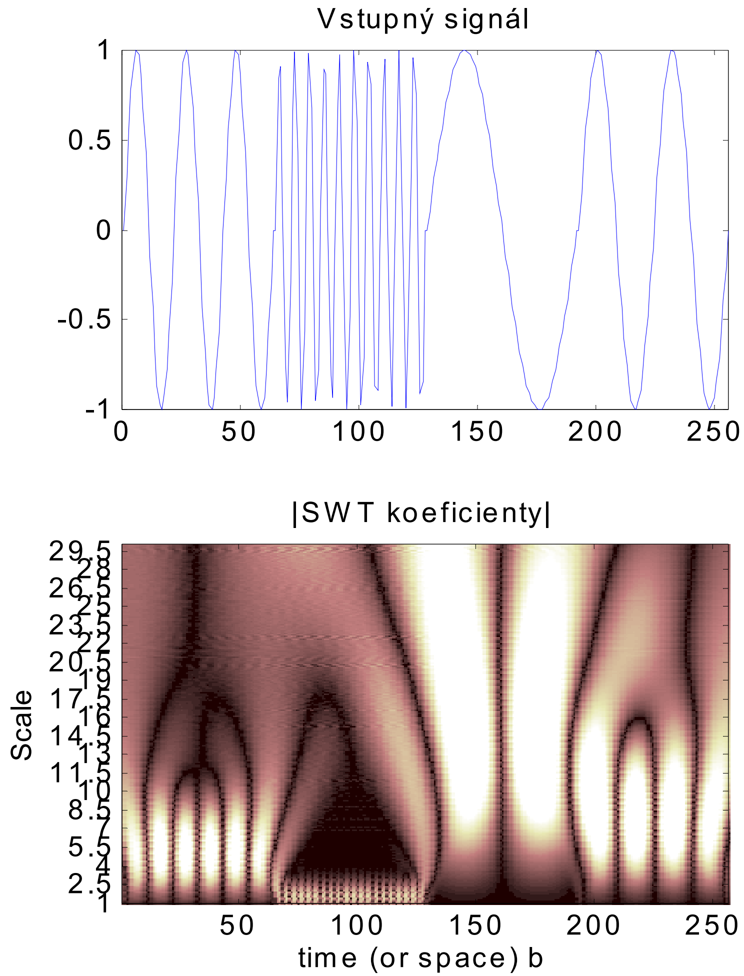
b)Znázornená výsledná SWT

$$SWT(k,\tau) = \sqrt{k} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi_{mex}\left[k(t-\tau)\right] dt$$

Príklady škálogramov SWT, použitý wavelet: $\psi_{mex}(t)$



a) $f(t) = \sin(t^2)$



a) $f(t)$ je kombináciou *sin(3t,10t,1t,2t)*

Vlastnosti SWT

Linearita:

Vyplýva priamo z linearity skalárneho súčinu

Posun v čase:

$$g(t) = f(t - b_0) \Rightarrow SWT_g(a,b) = SWT_f(a, b - b_0)$$

Zmena mierky:

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} f\left(\frac{t}{s}\right) \Longrightarrow SWT_g(a,b) = SWT_f\left(\frac{a}{s}, \frac{b}{s}\right)$$

Základné charakteristiky waveletov

1) Vlastnosť *kompaktnej podpory* na intervale $\langle a,b\rangle$ vypovedá o tom, že funkcia (wavelet) má nenulové funkčné hodnoty len na danom intervale, mimo neho je funkčná hodnota nulová. Hovoríme, že je na danom intervale *podporovaný*.

2) *Počet nulových momentov*. *K-ty moment* $\psi(t)$ definujeme ako $m(k)=\int t^k\psi(t)dt$. Platí, že ak $\psi(t)$ je *K* krát *diferencovateľná* a pre $t\to\pm\infty$ klesá dostatočne rýchlo, potom prvých *K-1* momentov bude nulových. Potom ak $f(t)$ je na nejakom intervale polynómom max. *K-1* stupňa, pre wavelety $\psi_{a,b}(t)$ podporované v tomto intervale budú príslušné waveletové koeficienty $SWT_f(a,b)$ nulové.

3) *Regularita* (Daubechies 1988) poskytuje *mieru hladkosti funkcie* $f(t)$. Je to také maximálne číslo *r* pre ktoré platí $|F(\omega)|\le c/\left(1+|\omega|^{r+1}\right)$, $\omega\in R$. Potom $f(t)$ je *r-1* krát spojite diferencovateľná, *r-tá* derivácia môže byť nespojitá.

Príklady waveletov

Haarov wavelet: $\psi(t)=\begin{cases}1 & pre\ 0<t<0.5\\ -1 & pre\ 0.5<t<-1\\ 0 & ináč\end{cases}$.

Sinc wavelet: $\psi(t)=2\varphi(2t)-\varphi(t)$, kde $\varphi(t)=\dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t}$

Morletov wavelet: $\psi(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-j\omega_0 t}e^{-t^2/2}$.

Wavelet	Počet nulových momentov	Regularita r	Charakter resp. podpora v čase	Charakter resp. podpora vo frekvencii
Haar	1	0	<0,1>	$1/\omega$
Sinc	∞	∞	1/t	$<\pi, 2\pi>$
Daubechies N	N	$\alpha(N)$	< 0, 2N-1>	$1/\omega^{\alpha(N)}$

Waveletové rady a rámce

Redundancia SWT (oba parametre a, b sú spojité) sa dá odstrániť *vzorkovaním* *a*, *b*. Potom hovoríme o *waveletových radoch (WR)*. Pri voľbe vzorkovania sú dôležité otázky kompletnosti, redundancie a minimálnosti výslednej množiny funkcií.

Štandardná voľba *typu* vzorkovacej mriežky

- $a = a_0^m$.
- $b = nb_0 a_0^m$ (volíme tak, aby bola pomocou σ_{ab_t} pri danej mierke a "pokrytá" celá časová os)

Pre $\psi(t)$ (a analogicky pre $\tilde{\psi}(t)$) dostávame množinu funkcií:

$$\psi_{mn}(t) = a_0^{-\frac{m}{2}} \psi\left(a_0^{-m} t - nb_0\right), \quad m, n \in Z$$

Každdú $f(t) \in L^2(R)$ potom môžeme vyjadriť superpozíciou vo *waveletových rámcoch(Wavelet Frames – WF)*:

$$f(t) = \sum_m \sum_n d_{m,n} \tilde{\psi}_{m,n}(t) \qquad d_{m,n} = \langle f(t), \psi_{m,n}(t) \rangle \qquad m,n \in Z \qquad \text{(WF)}$$

ak množiny $\{\psi_{m,n}\}, \{\tilde{\psi}_{m,n}\}$ sú *kompletné duálne rámce*, pre ktoré $\forall f(t) \in L^2(R)$ platí:

$$A\|f\|^2 \le \sum_{m,n} \left| \langle f, \psi_{m,n} \rangle \right|^2 \le B\|f\|^2 \qquad B^{-1}\|f\|^2 \le \sum_{m,n} \left| \langle f, \tilde{\psi}_{m,n} \rangle \right|^2 \le A^{-1}\|f\|^2$$

Koeficienty $d_{m,n}$ nazývame waveletové koeficienty.

Ak $A = B = 1$, $\|\psi_{m,n}\| = 1$ rámec $\{\psi_{m,n}\}$ tvorí *ortonormálnu bázu* v $L^2(R)$. Funkciu $\psi \in L^2(R)$ potom nazývame *ortonogonálny* resp. *ortonormálny wavelet*.

Najbežnejšia sa redundancia reprezentácie vo waveletových rámcoch odstraňuje voľbou vzorkovacej mriežky :

$$a_0 = 2, b_0 = 1$$

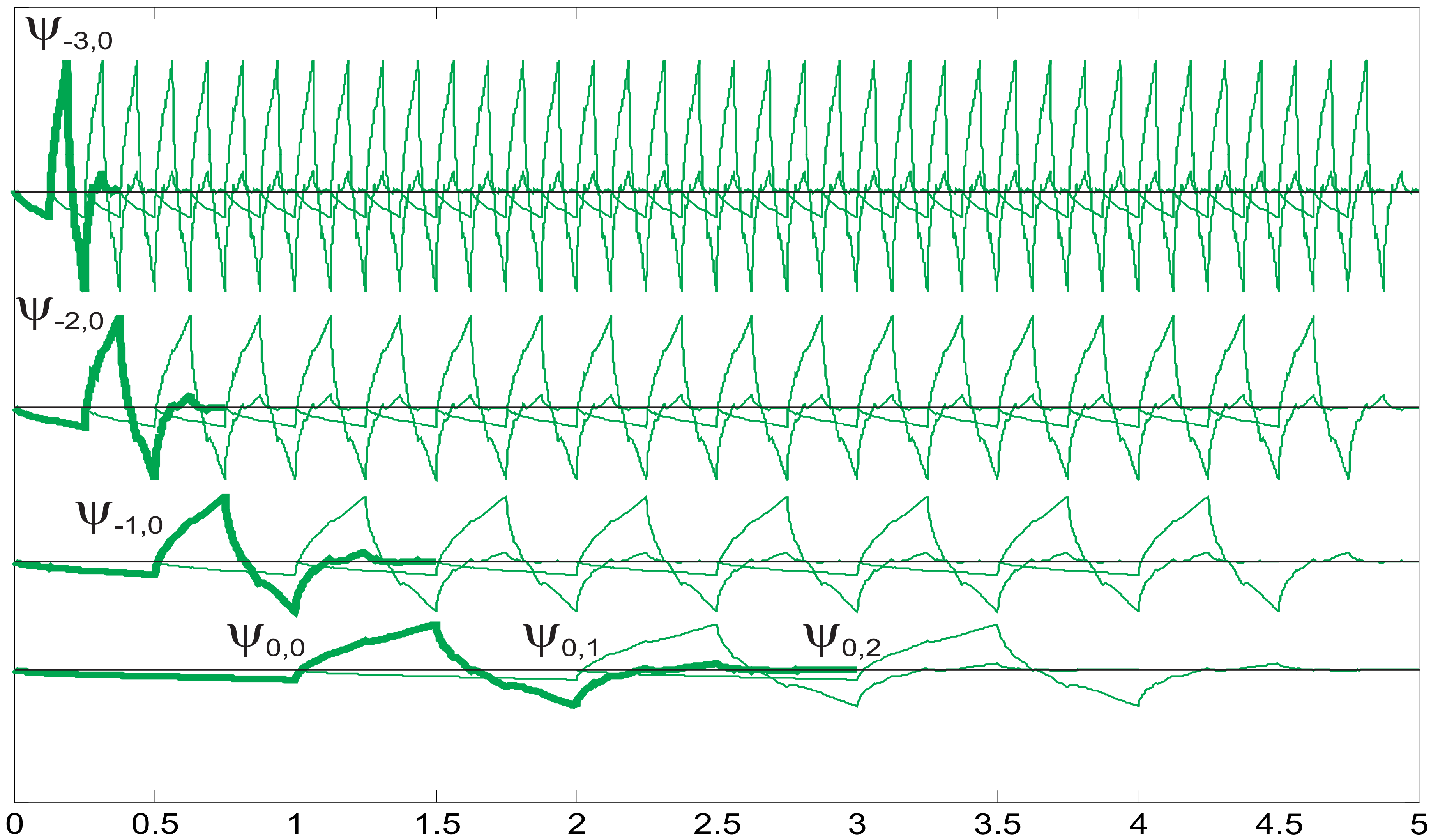
Platí :

$$\psi_{m,n}(t) = 2^{-\frac{m}{2}} \psi\left(2^{-m} t - n\right)$$

funkciu $\psi_{m,n}(t)$ potom nazývame *dyadický wavelet* a vzťahmi (WF):

$$f(t) = \sum_m \sum_n d_{m,n} \tilde{\psi}_{m,n}(t) \qquad d_{m,n} = \left\langle f(t), \psi_{m,n}(t) \right\rangle \qquad m, n \in Z$$

sú definované *waveletové rady (WR)*.



Poloha bázových funkcií(odvodených od Db2) v dyadických waveletových radoch

Ortogonalita, biortogonalita a semiortogonalita

Pre ortonormálne wavelety platí $\tilde{\psi} \equiv \psi^*$ a

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m} \rangle = \delta(j-l)\delta(k-m) \qquad j,k,l,m \in Z$$

čo charakterizuje ortogonalitu v rovnakých úrovniach rozlíšenia a aj medzi rôznymi úrovňami.

Pár $(\psi, \tilde{\psi})$ spĺňa podmienku *biortogonality* (hovoríme o *biortogonálnych waveletoch*), ak množiny $\{\psi_{m,n}\}$ a $\{\tilde{\psi}_{m,n}\}$ sú duálne bázy, spĺňajúce prodmienku biortogonality:

$$\langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{l,m} \rangle = \delta(j-l)\delta(k-m) \qquad j,k,l,m \in Z$$

Wavelet $\psi \in L^2(R)$ $j,k,l,m \in Z$ sa nazýva *semiortogonálny* (nazývaný aj pre-wavelet), ak platí:

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m} \rangle = \delta(j-l) \qquad j,k,l,m \in Z$$

t.j. je zachovaná ortogonalita len medzi rôznymi úrovňami rozlíšenia.

Prechod k analýze viacúrovňovým rozlíšením
(**M**ulti**R**esolution **A**nalysys - MRA)

Označme :

$$W_m = L\left(\left\{\psi_{m,n}\right\}, n \in Z\right)$$
$$\widetilde{W}_m = L\left(\left\{\widetilde{\psi}_{m,n}\right\}, n \in Z\right)$$

$L^2(R)$ potom môžeme vyjadriť ako priamu sumu podpriestorov W_m resp. $\widetilde{W}_m$:

$$L^2(R) = \ldots \oplus W_1 \oplus W_0 \oplus W_{-1} \oplus \ldots$$
$$L^2(R) = \ldots \oplus \widetilde{W}_1 \oplus \widetilde{W}_0 \oplus \widetilde{W}_{-1} \oplus \ldots$$

Ako odstrániť nekonečné sumy pri reprezentácii resp. aproximácii signálu ???