

Rozšírenia/zovšeobecnenia waveletov:

- wavelety na intervale (prebrané)
- viacrozmerné wavelety (prebrané separovateľné 2D prípady)
- M-pásmové wavelety
- Multivavelety
- waveletové pakety

M-pásmové wavelety

Doteraz bolo:

- báza V_m tvorená množinou $\{\varphi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \varphi(2^{-m}t - n), n \in Z\}$
- dilatačná rovnica pre $\varphi(t)$: $\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n) \varphi(2t - n)$

Zovšeobecnením je:

$$\varphi(t) = \sqrt{M} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n) \varphi(Mt - n) \quad M \in Z, \quad M > 2$$

Čo platí pre $h_{mr}(n)$ ak báza tvorená pomocou $\varphi(t)$ je ortonormálna?

Označme $h_{mr}(n) = h(n)$. Analogicky ako pri vlastnostiach ortonormálnych DWT platí:

$$\sum_n h(n) = \sqrt{M}$$

$$\sum_n h(Mn + m) = 1 / \sqrt{M} \quad H(2\pi l / M) = 0 \quad l = 0, 1, \dots, M-1$$

$$\sum_n h(n + Mm) h(n) = \delta(m) \quad \text{resp.} \quad \sum_n h(n)^2 = 1$$

$$\Rightarrow |H(\omega)|^2 + |H(\omega + 2\pi / M)|^2 + \dots + |H(\omega + 2\pi(M-1) / M)|^2 = M$$

atď'...

A čo je s waveletmi ???

Nemáme jediný wavelet, ale *M-1 waveletov* $\psi_l(t)$:

$$\psi_l(t) = \sqrt{M} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_l(n) \phi(Mt - n) \quad l = 0, 1, \dots, M-1$$

Čomu na každej úrovni rozlíšenia odpovedá *M-1 diferenčných priestorov* $W_{m,l}$.
T.j. pre MRA platí?

$$V_m = V_{m+1} \oplus W_{m+1,1} \oplus W_{m+1,2} \oplus \dots \oplus W_{m+1,M-1}$$

Wavelety sú *ortogonálne* k funkcii mierky, t.j. :

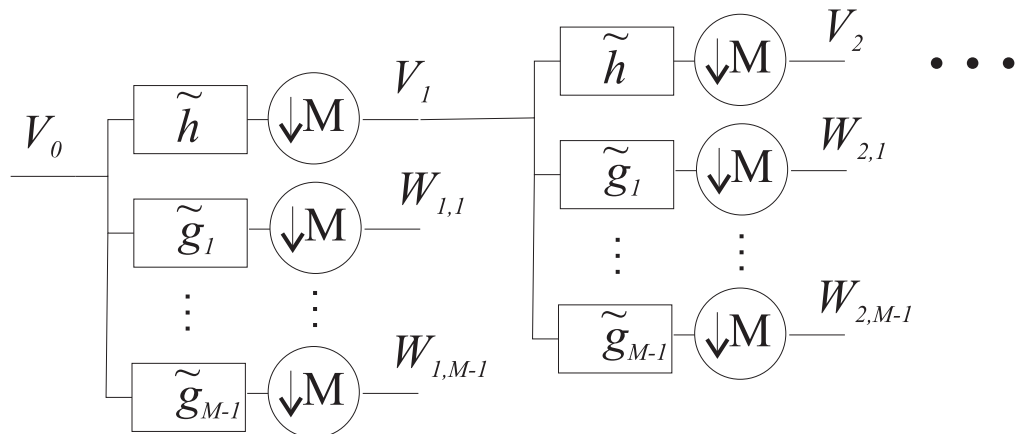
$$\int \phi(t-n) \psi_l(t-m) dt = 0 \quad \sum_n h(n) g_l(n-Mk) = 0 \quad l = 0, 1, \dots, M-1$$

Čo sme vlastne získali?

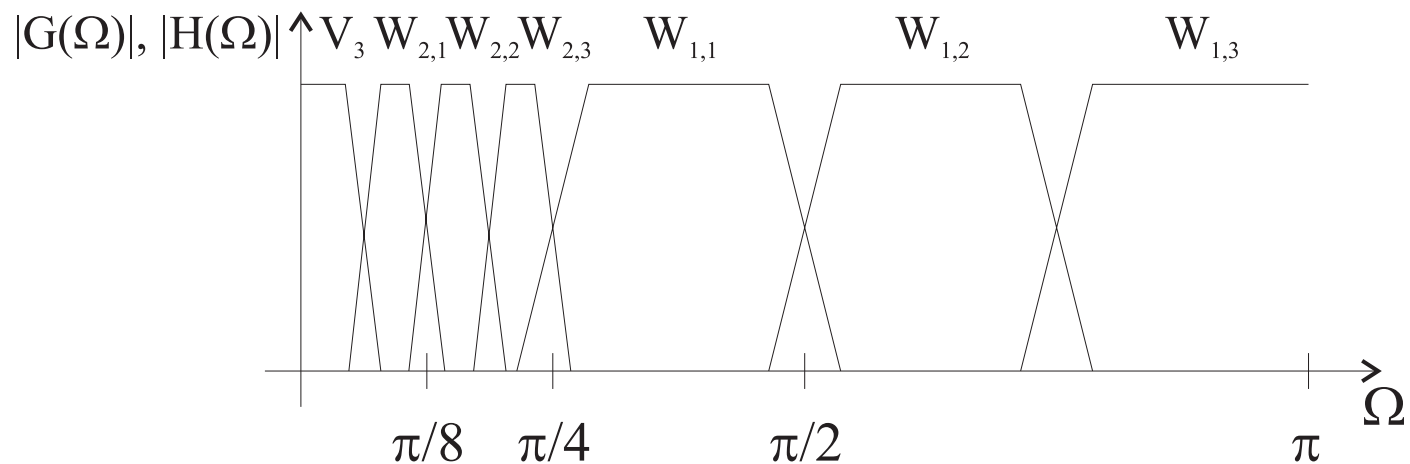
- Stupne voľnosti – je veľa rôznych ortogonálnych waveletov k danej funkcii mierky
- Časovo-frekvenčnú rovinu môžeme deliť lineárne aj logaritmicky (mix oboch)
- Čisto logaritmické delenie je ekvivalentné *M-adickým waveletom*, t.j. máme iba jeden wavelet (M-1 waveletov je rovnakých) s hustejšou vzorkovacou mriežkou

Ako vypočítame M-pasmovú DWT ?

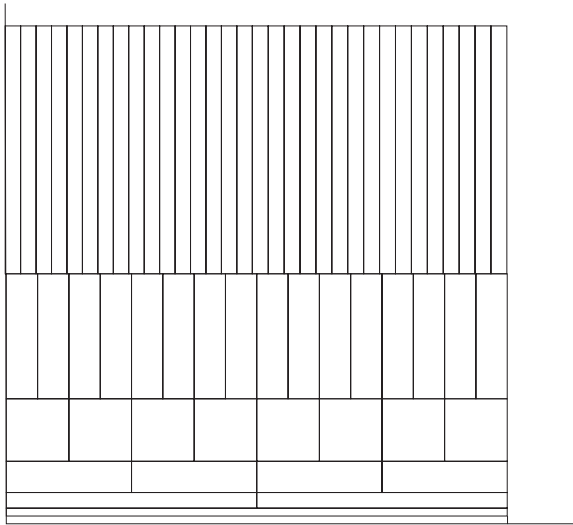
M-pásmovou bankou filtrov:



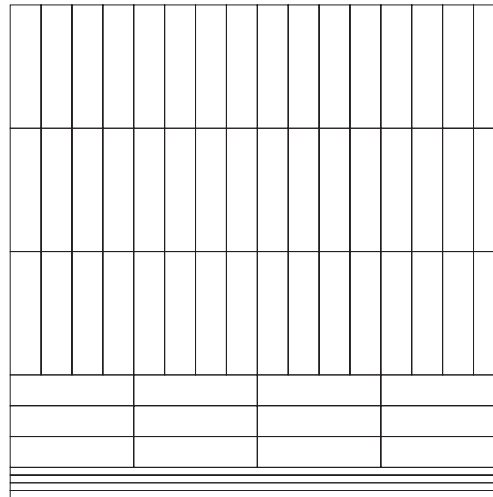
Príklad rozdelenia subpásiem pre 4-pasmovú DWT



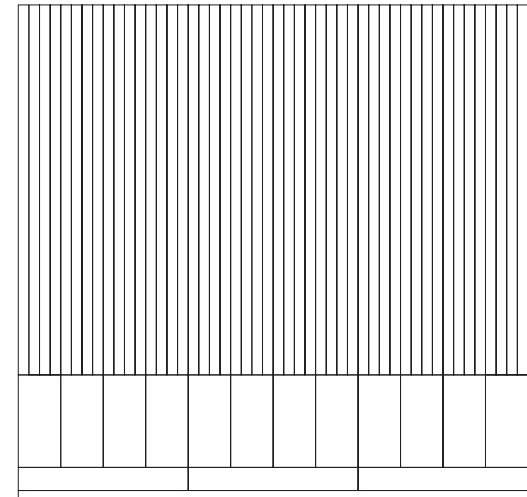
Spôsob delenia časovo-frekvenčnej roviny



Dyadická DWT



4-pásmová DWT, 3
odlišné wavelety, ktoré
zaberajú rôzne oblasti
vo frekvencii



4-pásmová DWT,
špeciálny prípad ,
3 x rovnaký wavelet
=
4-adická DWT

Multivavelety (R-wavelety)

V MRA máme hierarchiu:

$$\{0\} \dots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \dots L^2(R)$$

Bázy priestorov V_m sú tvorené pomocou *viacerych funkcií mierky* $\varphi_k(t)$:

$$\{\varphi_{i,m,n}(t) = 2^{-m/2} \varphi(2^{-m}t - n), n \in Z\} \quad i = 1, \dots, R$$

, keďže $V_1 \subset V_0$, pre vektor funkcií mierky $\Phi(t) = [\varphi_1(t), \dots, \varphi_R(t)]^T$ platí:

$$\Phi(t) = \sqrt{2} \sum_n \mathbf{H}(n) \Phi(2t - n)$$

, kde $\mathbf{H}(n)$ je *sekvencia štvorcových matic rozmeru $R \times R$* . Z vlastností MRA vyplýva, že existuje vektor základných waveletov $\Psi(t) = [\psi_1(t), \dots, \psi_R(t)]^T$, pre ktorý platí:

$$\Psi(t) = \sqrt{2} \sum_n \mathbf{G}(n) \Phi(2t - n)$$

, kde $\mathbf{G}(n)$ je sekvencia štvorcových matic rozmeru $R \times R$.

Ako vypočítame multiwaveletové rady (MWR)?

- 1) Zvolíme počiatkové V_m tak, aby bol vstupný signál $s(t)$ aproximovaný s dostatočnou presnosťou.
- 2) Počiatkové koeficienty mierky vytvoríme ako vektor počiatkových projekcií signálu $x(t)$ do V_m nasledovne:

$$\mathbf{C}_m(n) = [c_{1,m}(n), \dots, c_{R,m}(n)]^T$$

, kde

$$c_{i,m}(n) = \langle s(t), \varphi_{i,m,n}(t) \rangle$$

- 3) Ďalej pokračujeme ich rozkladom:

$$\mathbf{C}_{m+1}(k) = \sqrt{2} \sum_n \tilde{\mathbf{H}}(n) \mathbf{C}_m(2k + n) \quad \mathbf{D}_{m+1}(k) = \sqrt{2} \sum_n \tilde{\mathbf{G}}(n) \mathbf{C}_m(2k + n)$$

, kde $\tilde{\mathbf{H}}(n) = \mathbf{H}(-n)$, $\tilde{\mathbf{G}}(n) = \mathbf{G}(-n)$

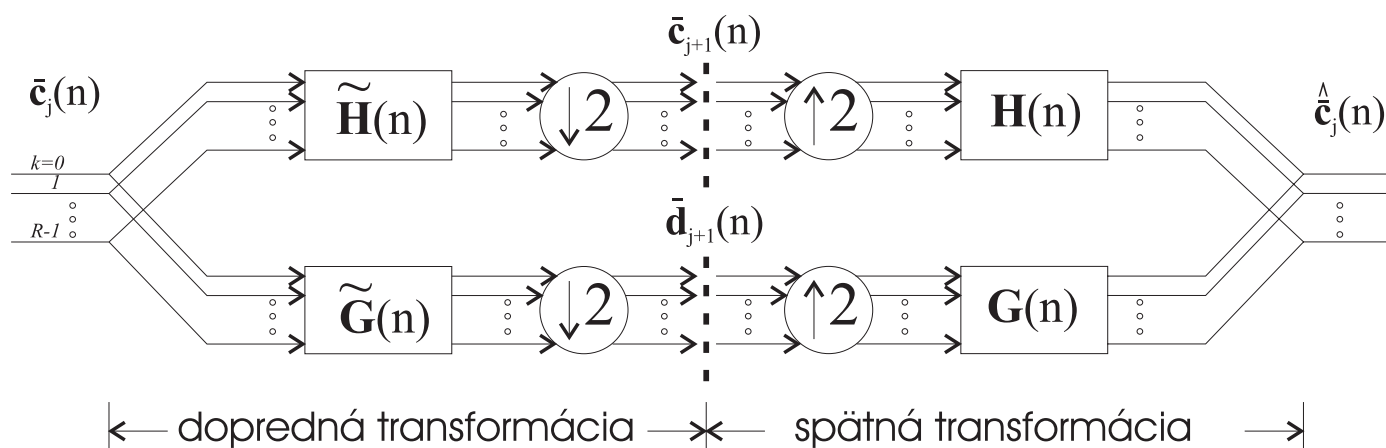
Pri rekonštrukcii platí:

$$\mathbf{C}_m(n) = \sqrt{2} \sum_k [\mathbf{H}(k) \mathbf{C}_{m+1}(2k + n) + \mathbf{G}(k) \mathbf{D}_{m+1}(2k + n)]$$

Ako vypočítame diskretnú multiwaveletovú transformáciu (MDWT)?

- Signál spracúvame paralelne v dávkach o veľkosti R
- Problém inicializácie, **nemôžeme** jednoducho zobrať *susedné* vzorky signálu ako vstup pre jednu dávku (ako pri klasických waveletoch), lebo naše $\varphi_k(t)$ existujú v čase *naraz* $\rightarrow$ nutná *predfiltrácia* odpovedajúca projekcii.

Výpočet MDWT vektorovými bankami filtrov



Dôležitá vlastnosť:

Je možné symetrické a zároveň ortogonálne riešenie.

Príklad multiwaveletov - GMH (Geronimo-Hardin-Massopust) multiwavelety

$R=2$, sekvencie Matíc $\mathbf{H}(n)$ a $\mathbf{G}(n)$ majú dĺžku 4:

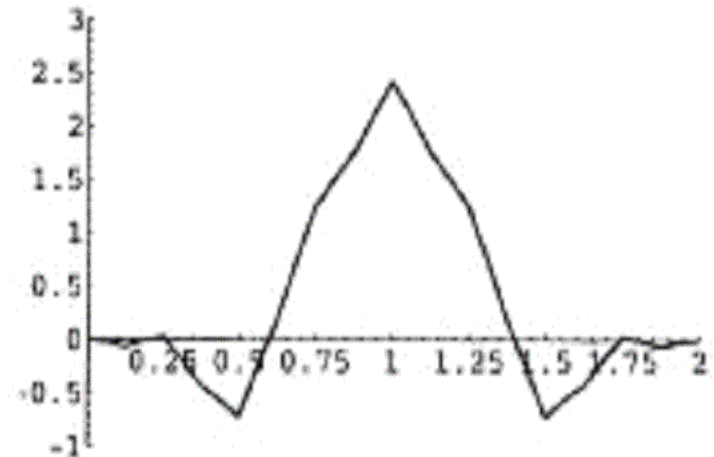
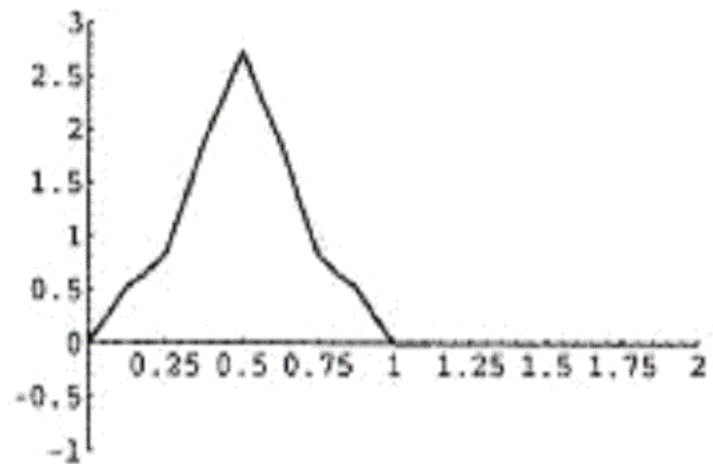
$$\mathbf{H}(0) = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4\sqrt{2}}{5} \\ -\frac{1}{10\sqrt{2}} & -\frac{3}{10} \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}(1) = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{9}{10\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}(2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{9}{10\sqrt{2}} & -\frac{3}{10} \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}(3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{10\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{G}(0) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -3 \\ 1 & 3\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{G}(1) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} \frac{9}{\sqrt{2}} & -10 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{G}(2) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} \frac{9}{\sqrt{2}} & -3 \\ 9 & -3\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{G}(3) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vlastnosti:

- Množiny $\{\varphi_1(t-n), \dots, \varphi_R(t-n)\}, \{\psi_1(t-n), \dots, \psi_R(t-n)\}, n \in \mathbb{Z}$ sú *ortogonálne*.
- Bázové funkcie aj *symetrické*
- Funkcie mierky sú schopné reprodukovať lineárne funkcie

GHM Funkcie mierky



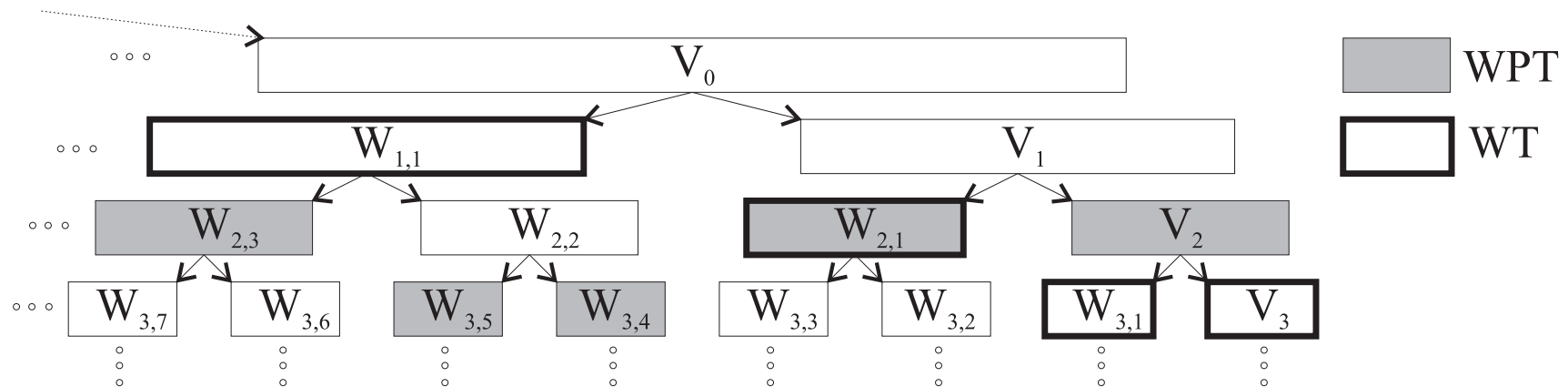
GHM Multivaveley:



Waveletové pakety

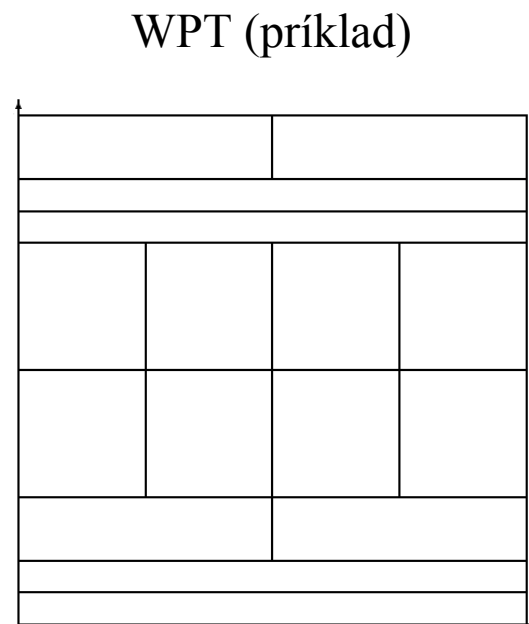
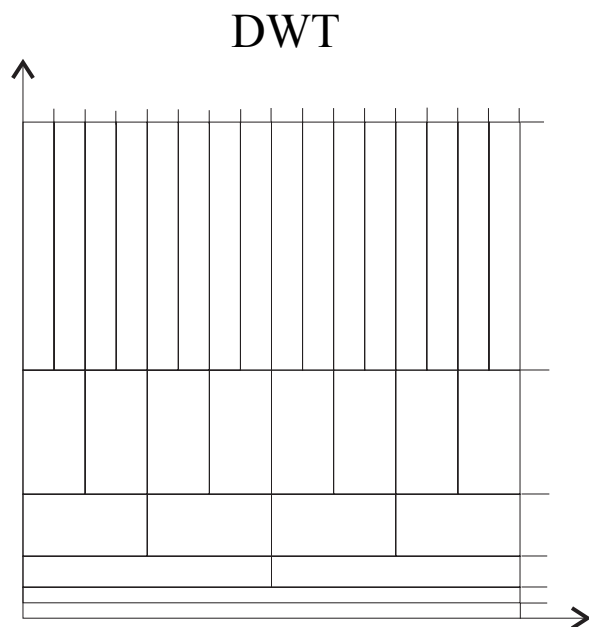
- v klasickom prípade waveletov rozkladáme v MRA iba sumačné podpriestory V_m
- waveletové pakety rozklad zovšeobecňujú aj na diferenčné priestory W_m
- sú možným rozšírením všetkých doteraz uvedených typov waveletov
- umožňujú adaptívnu, podrobnejšiu a flexibilnejšiu analýzu signálov

Výpočet Waveletovej paketovej transformácie(WPT) – v MRA je dovolené deliť aj diferenčné popriestory, nielen sumačné:



Vzniká kompletný waveletový paketový strom. Reprezentácia kompletným stromom je *redundantná* - stačí použiť iba *vhodnú časť stromu*.

Delenie priestorov odpovedá aj deleniu časovo-frekvenčnej roviny



WPT umožňuje *adaptívne* resp. optimalizované delenie podpriestorov = delenie časovo-frekvenčnej roviny = použitie istej časti kompletného waveletového paketového stromu.

Ktorú časť stromu použiť – ako čo najlepšie reprezentovať signál ?

Výber najvhodnejšej stromovej štruktúry je ekvivalentný s *hľadaním najlepšej bázy*.

Najbežnejšie kritériá pre výber najlepšej reprezentácie signálu, formované pomocou tzv.

nákladovej funkcie λ sú:

- minimalizácia entropie reprezentácie signálu (Wickerhauser, Coifman)
- minimalizácia počtu bitov reprezentácie signálu a skreslenia pri danej množine kvantizátorov

Koľko je možných báz?

Ak dĺžka signálu je N , potom pre α , počet možných WPT báz platí:

$$\alpha \geq 2^{N/2}$$

Ako teda vyberať najlepšiu bázu?

Najjednoduchšie je rozhodovať sa priamo počas rozkladov, t.j. rozhodovať sa, či ďalší rozklad prevedieme, alebo nie.

Aké kritérium použiť?

Rozhodujeme sa, podľa toho či *náklady po rozdelení budú väčšie ako pred rozdelením*. Kritériom musí byť taká nákladová funkcia, ktorej aditivita sa rozkladom pri DWT zachováva (napríklad entropia).

Príkladom je napr. Shannonova entropia E zo signálu $s(n)$, pre ktorú

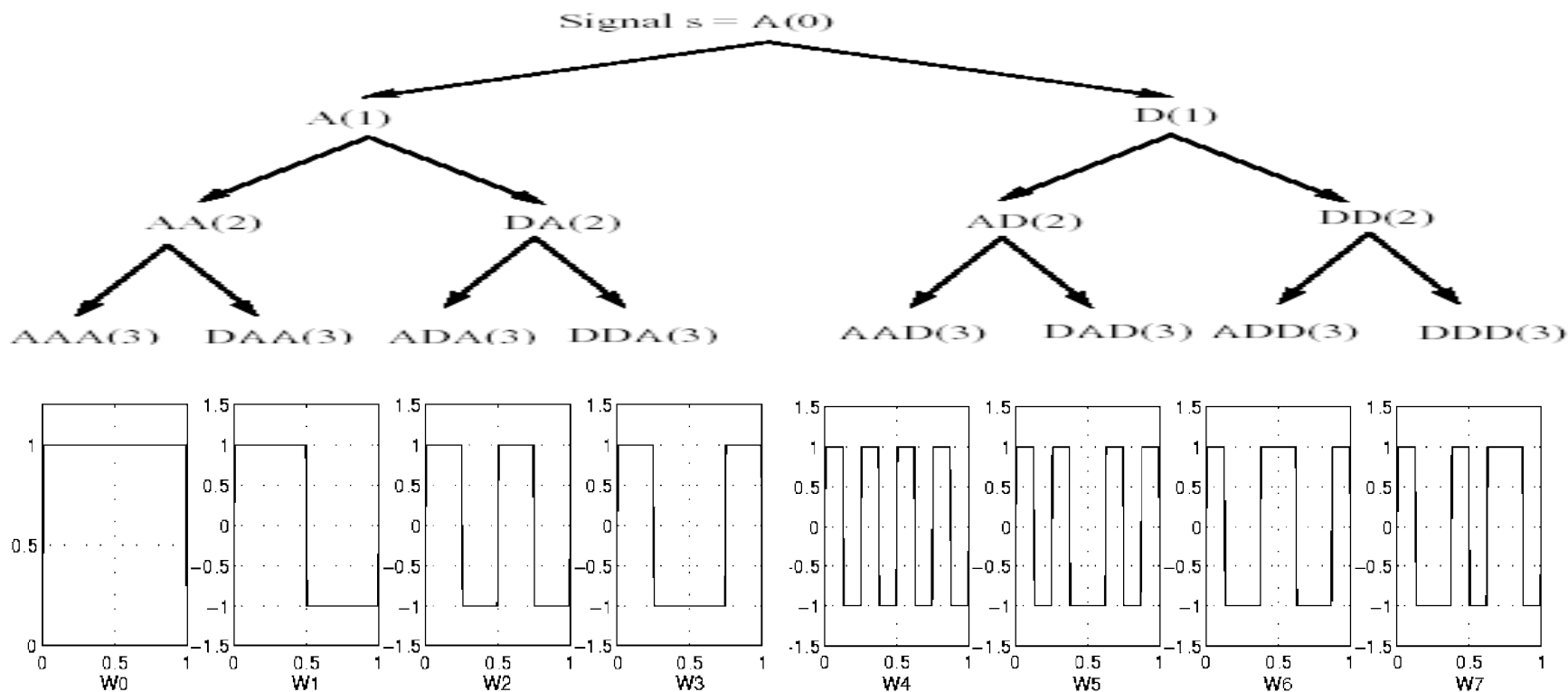
$$E(s) = - \sum_n s(n)^2 \log[s(n)^2]$$

s konvenciou $0 \log(0) = 0$.

Kritérium teda je:

Ak suma Shannonových entropií 2 subpásiem, ktoré vznikli rozdelením pôvodného subpásma, je menšia ako entropia pôvodného subpásma, je výhodné rozdelenie uskutočniť.

Ako vyzerajú bázové funkcie pri úplnom rozklade pre Haarovu WPT?



Počet prechodov nulou je:

2 3 5 4 9 8 6 7

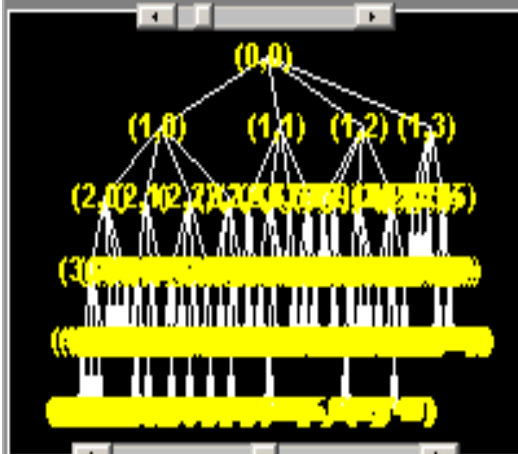
T.j. frekvenčné pásma odpovedajúce jednotlivým priestorom nemajú vzostupný charakter, sú poprehadzované, ich poradie je:

0 1 3 2 7 6 4 5

= analogicky ako pri *Walshovej transformácii v Palleyho poradi*, t.j. nie v sekvenčnom.

Chceme zobrazit' frekvenčný obsah v prirodzenom poradi? → *koeficienty preusporiadať*

Best Tree

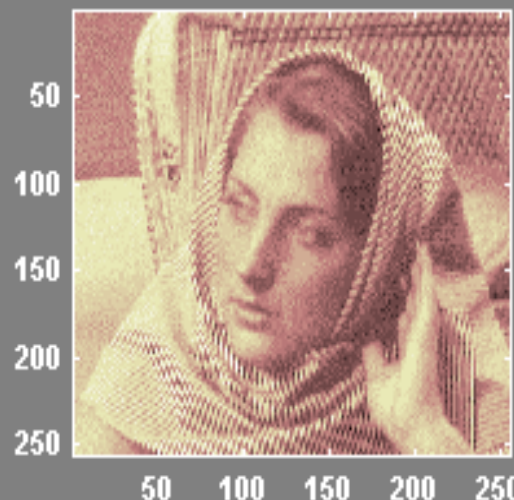


Packet : (1,0) or (1)



Scale of Colors from Min to Max

Analyzed Image : size = (256,256)



Colored Coefficients for Terminal Nodes



Image

woman

Wavelet

db 2

Level

5

Entropy

shannon

Analyze

Compress

De-noise

Initial Tree

Wavelet Tree

Best Tree

Best Level

Cut Tree at Level :

5

Node Label

Depth_Pos

Node Action

Visualize

Select Nodes

Reconstruct

Full Size

1

3

2

4

Colormap

pink

Nb. Colors

255

Brightness

Errata:

Welther +0.5b