

Waveletové Rady
Diskrétna WT

=

Iterované
Banky filtrov



Banky
Filtrov

Dyadická DWT

=

Iterovaná
2-pásmová
Banka filtrov

Banky filtrov a systémy s rôznym taktovaním

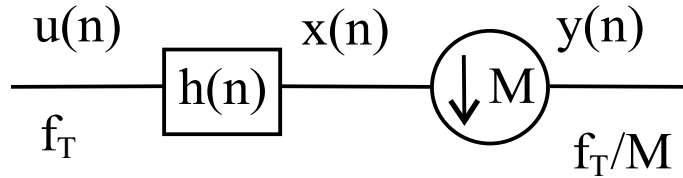
V *systémoch s rôznym taktovaním* (*SRT*, “*multirate systems*”) sú vzorky signálu spracovávané v častiach systému s rôznymi *taktovacími frekvenciami*. Zmeny taktovacej frekvencie sú uskutočnené operáciami *decimácie* a *interpolácie*.

Decimácia je proces redukcie vzorkovacej frekvencie celočíselným faktorom M . Najprv je signál $u(k)$ filtrovaný *antialiasingovým* filtrom prípadne ideálnym DP filtrom s hranicou prepúšťania $\Omega_0 = \pi / M$ a impulzovou charakteristikou $h(n)$ a potom je podvzorkovaný. Výsledok po decimácii je:

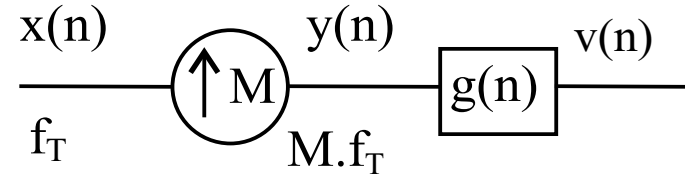
$$y(n) = \sum_k h(Mn - k)u(k)$$

Interpolácia je proces zvýšenia taktovacej frekvencie signálu celočíselným faktorom M . Signál $x(k)$ je najprv nadvzorkovaný (vložením $M - 1$ núl medzi každé 2 vzorky) a potom interpolovaný filtrom (napr. ideálnym DP s $\Omega_0 = \pi / M$) s imp. charakteristikou $g(n)$. Výsledný signál po interpolácii je:

$$v(n) = \sum_k g(n - Mk)x(k)$$

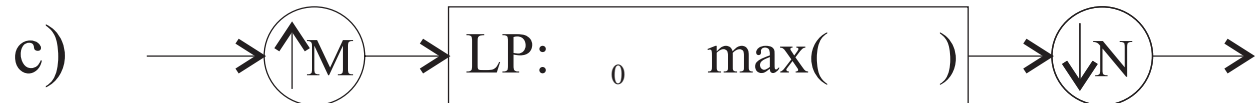
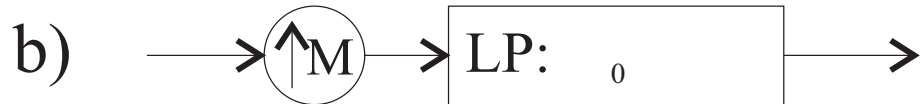
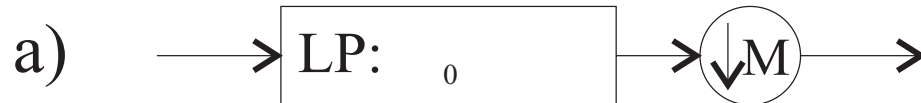


a)



b)

Operácie v SRT a) decimácia b) interpolácia



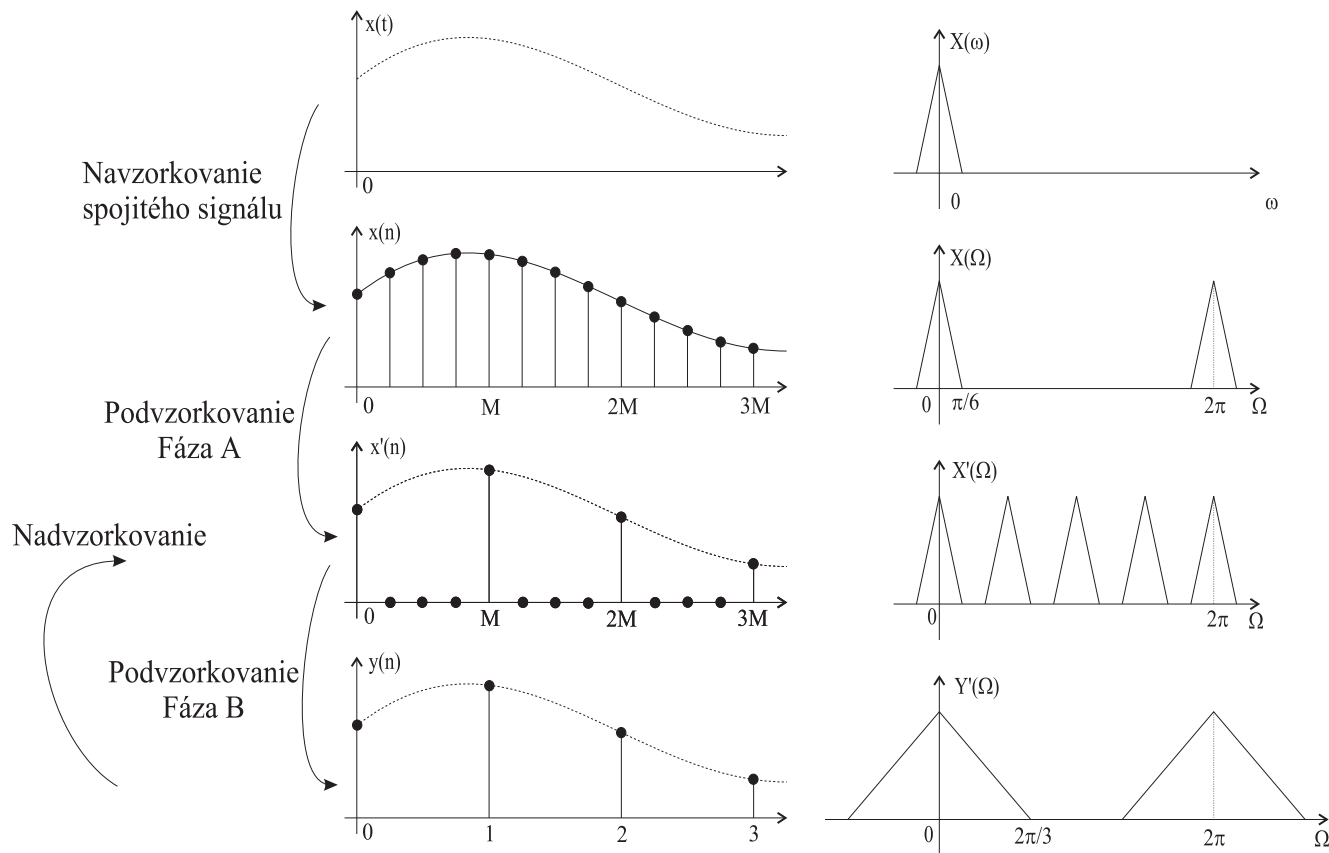
Požadovaný typ filtra pri : a) decimácii b) interpolácii c) zmene taktovacej frekvencie faktorom M/N

Podvzorkovanie signálu

Z pôvodného signálu zachováame iba každú M -tú vzorku. Pre vstupný signál

$$x(n) \text{ je výstup daný } y(n) = x(Mn)$$

Čo vo frekvencii odpovedá (znázornené pre $M=4$):



Proces podvzorkovania $x(n)$ môžeme popísať v dvoch fázach:

A) vynulovanie nepotrebných zložiek (násobenie Kroneckerovými impulzami)

$$x'(n) = x(n) \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(n - rM) = x(n) \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{j \frac{2\pi}{M} nk}$$

Z transformáciou dostaneme:

$$X'(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} Z \left\{ x(n) \left(e^{j \frac{2\pi}{M} k} \right)^n \right\} = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(z W^k)$$

, kde $W = e^{-j2\pi/M}$. Tomu opovedá frekvenčná charakteristika (pri $z = e^{j\Omega}$)

$$X'(\Omega) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X\left(\Omega - \frac{2\pi}{M} k\right)$$

T.j. výsledné spektrum je sumou M pôvodných spektier, posunutých zakaždým o $2\pi/M$.

B) Zmena mierky, resp. rozťahnutie signálu $x'(n)$

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x'(Mn) z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x'(k) \left(z^{\frac{1}{M}} \right)^{-k} = X' \left(z^{\frac{1}{M}} \right) \quad Y(\Omega) = X'(\Omega/M)$$

Výsledkom podvzorkovania teda je:

$$Y(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X \left(z^{\frac{1}{M}} W^k \right) \quad Y(\Omega) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X \left(\frac{\Omega - 2k\pi}{M} \right)$$

Nadvzorkovanie signálu.

Pri nadvzorkovaní signálu vkladáme medzi jeho vzorky zakaždým $M-1$ núl. Teda pre vstupný signál $x(n)$ je výstup daný:

$$y(n) = x(n / M)$$

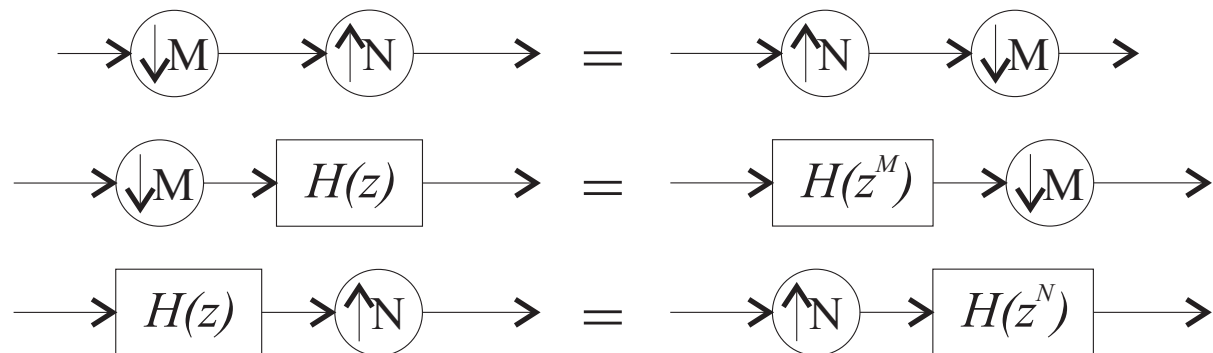
Proces je opačný ako pri fáze B podvzorkovania, t.j na intervale vznikne $M-1$ obrazov spektra pôvodného signálu $x(n)$:

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n / M) z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) (z^M)^{-k} = X(z^M)$$
$$Y(\Omega) = X(M\Omega)$$

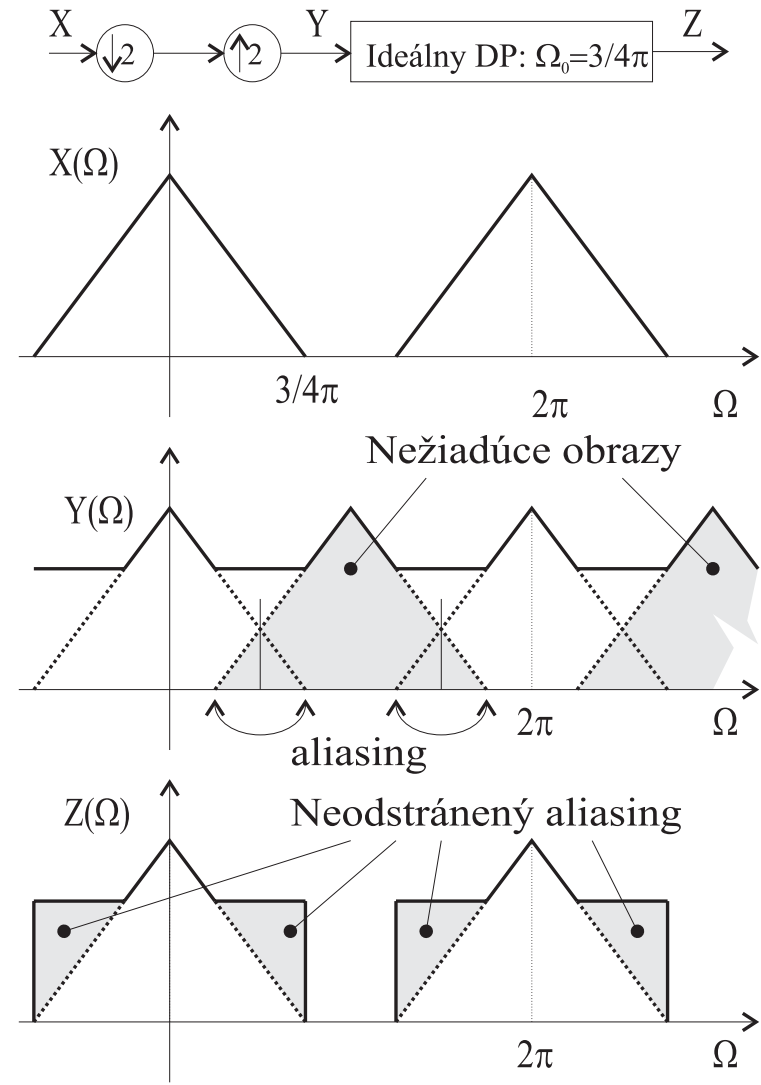
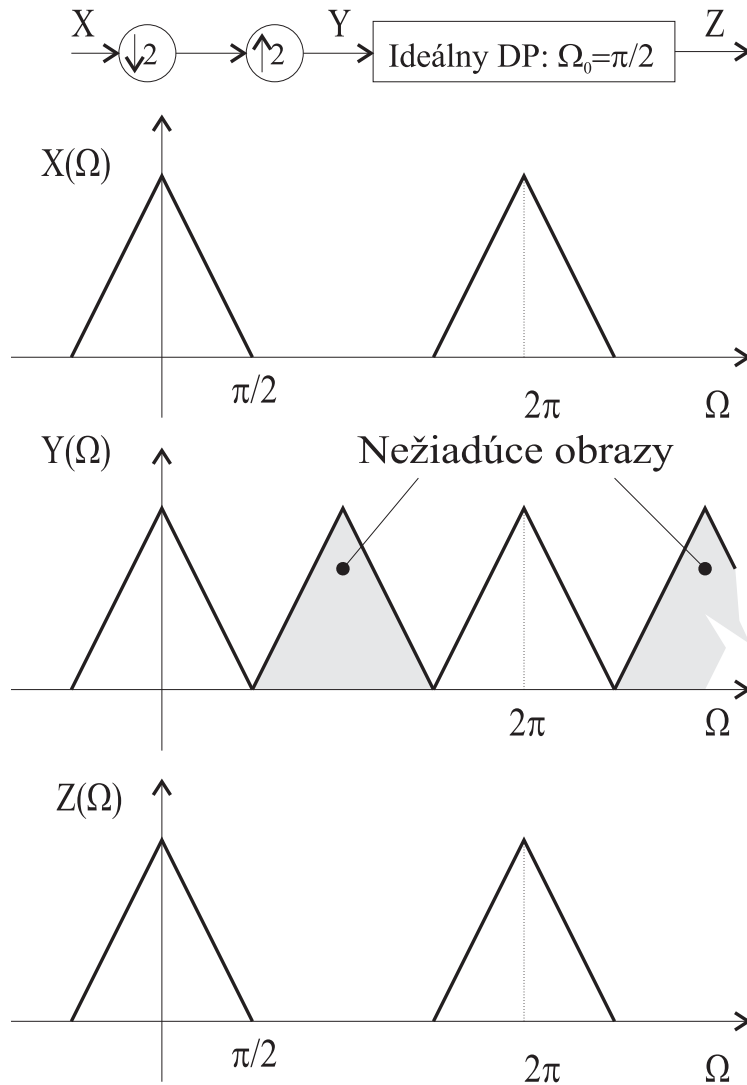
Úlohou interpolačného filtra je odstrániť týchto $M-1$ obrazov.

Ekvivalentné štruktúry v SRT

M, N nesúdeliteľné



Podvzorkovanie a následné nadvzorkovanie signálu



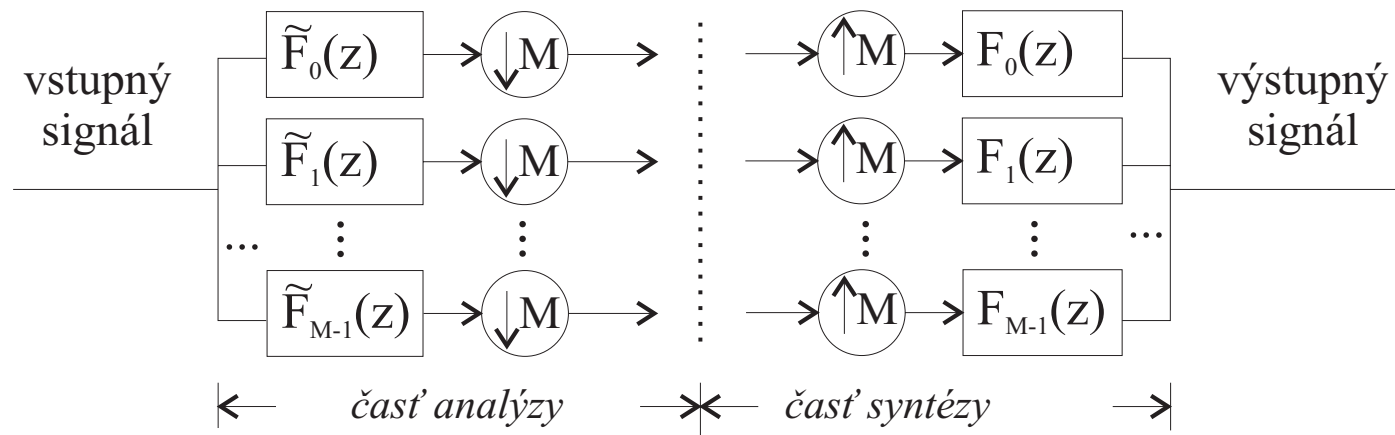
- Vidíme, že po podvzorkovaní a následnom nadvzorkovaní vieme bezchybne zrekonštruovať iba signál frekvenčne ohraničený po $\Omega_0 = \pi / M$.
- Ináč vzniká tzv. *aliasing* (sčítavanie zrkadlových spektrálnych zložiek signálu), ktorý nevieme odstrániť.

Ako po podvzorkovaní zrekonštruovať ľubovoľný signál?

—>> Riešením je banka filtrov.

Banka filtrov

Definícia: **Banka filtrov (BF)** je sústava, v ktorej filtre, použité v operáciach decimácie a interpolácie, umožňujú signál rozložiť (analýza) na **subpásma** a spätne zložiť (syntéza).



*Všeobecná schéma M-pásmovej banky filtrov s **kritickým podvzorkovaním***

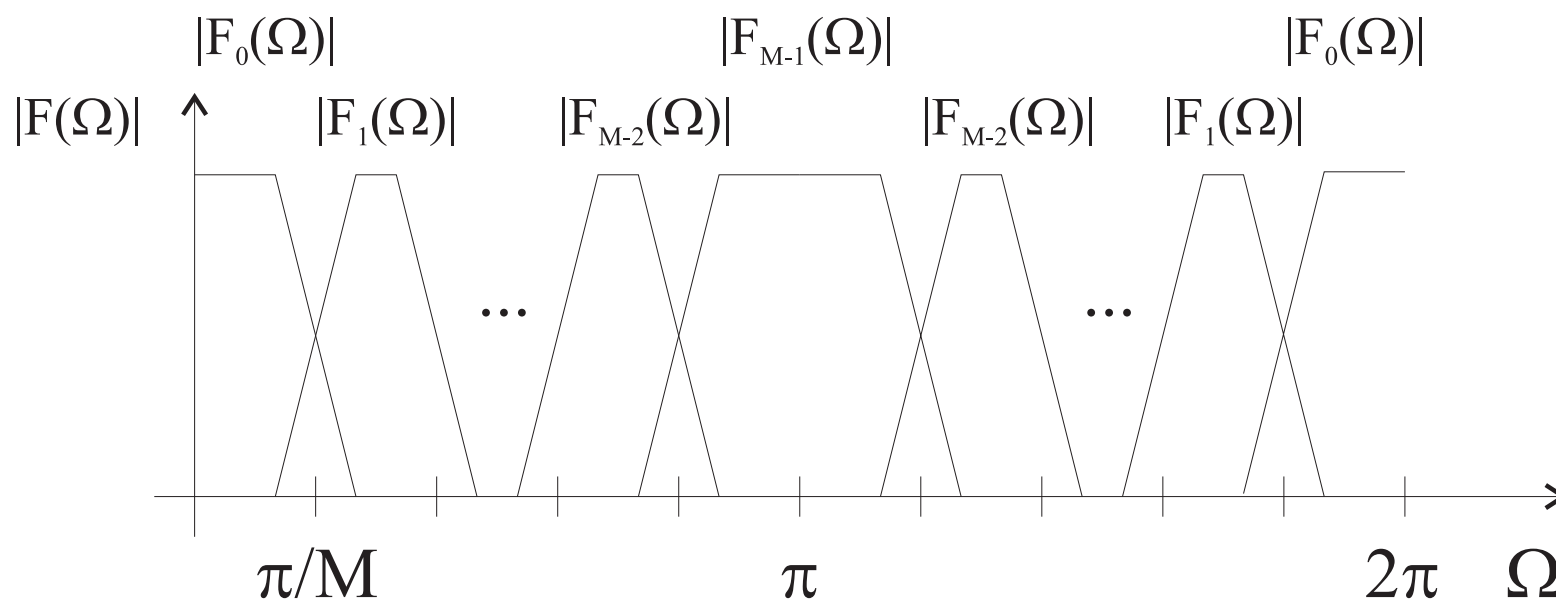
- Signál je rozdelený filtermi pre analýzu $\tilde{F}_k$ na M častí (**subpásiem**) a následne podvzorkovaný – **analýza signálu**
- Signál zrekonštruujeme spätným nadvzorkovaním týchto dvoch častí, interpoláciou filtermi pre syntézu F_k nakoniec sčítaním – **syntéza signálu**

Ak je výstupný signál identický so vstupným, potom FB má vlastnosť *perfektnnej(úplnej) rekonštrukcie*.

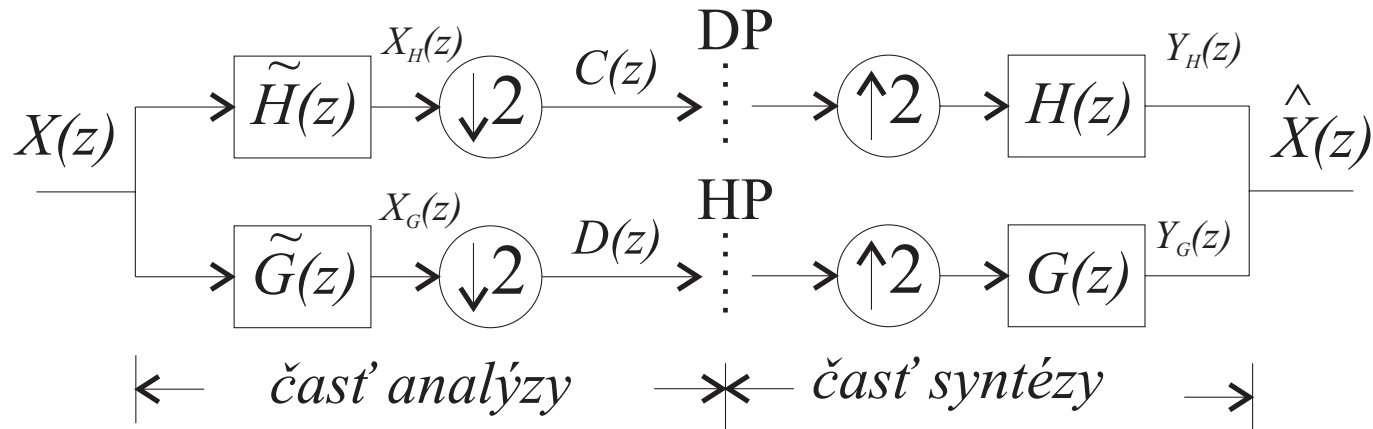
Zvyčajne chceme FB s *rušením aliasingu* a *úplnou rekonštrukciou signálu*.

→ Prenosové funkcie analyzačných $\tilde{F}_k(z)$ resp. syntetizačných filtrov $F_k(z)$ musia spĺňať isté podmienky.

Najčastejšie je používané rovnomerné rozdelenie na subpásma v tvare:



Dvojkánálové banky filtrů



Platí(V1):
$$c(n) = \sum_k \tilde{h}(2n-k)x(k) \quad d(n) = \sum_k \tilde{g}(n-2k)x(k)$$

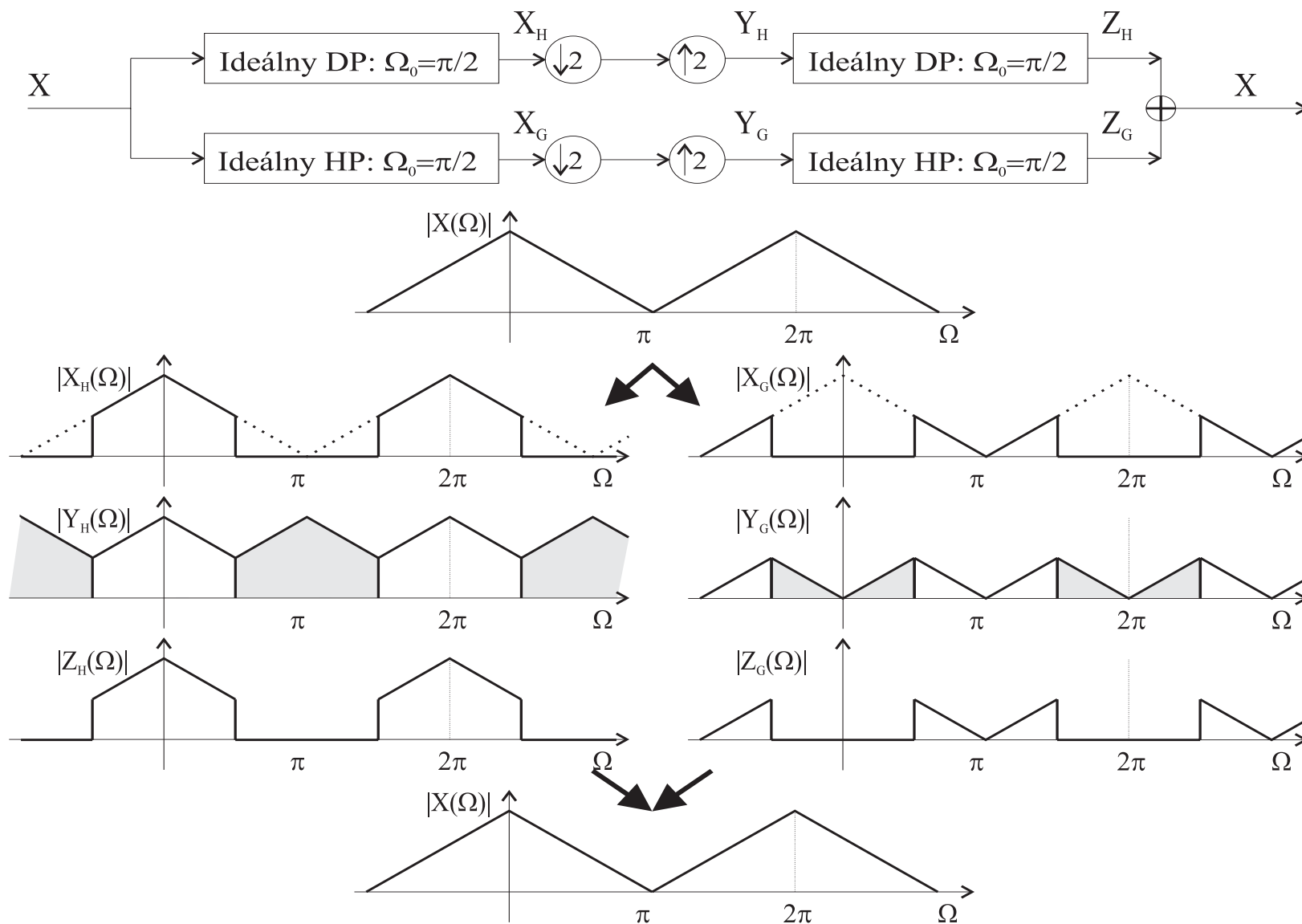
$$\hat{x}(n) = \sum_k h(n-2k)c(k) + \sum_k g(n-2k)d(k)$$

DWT(V2):
$$c_{m+1}(n) = \sum_k \tilde{h}_{mr}(k-2n)c_m(k) \quad d_{m+1}(n) = \sum_k \tilde{g}_{mr}(k-2n)c_m(k)$$

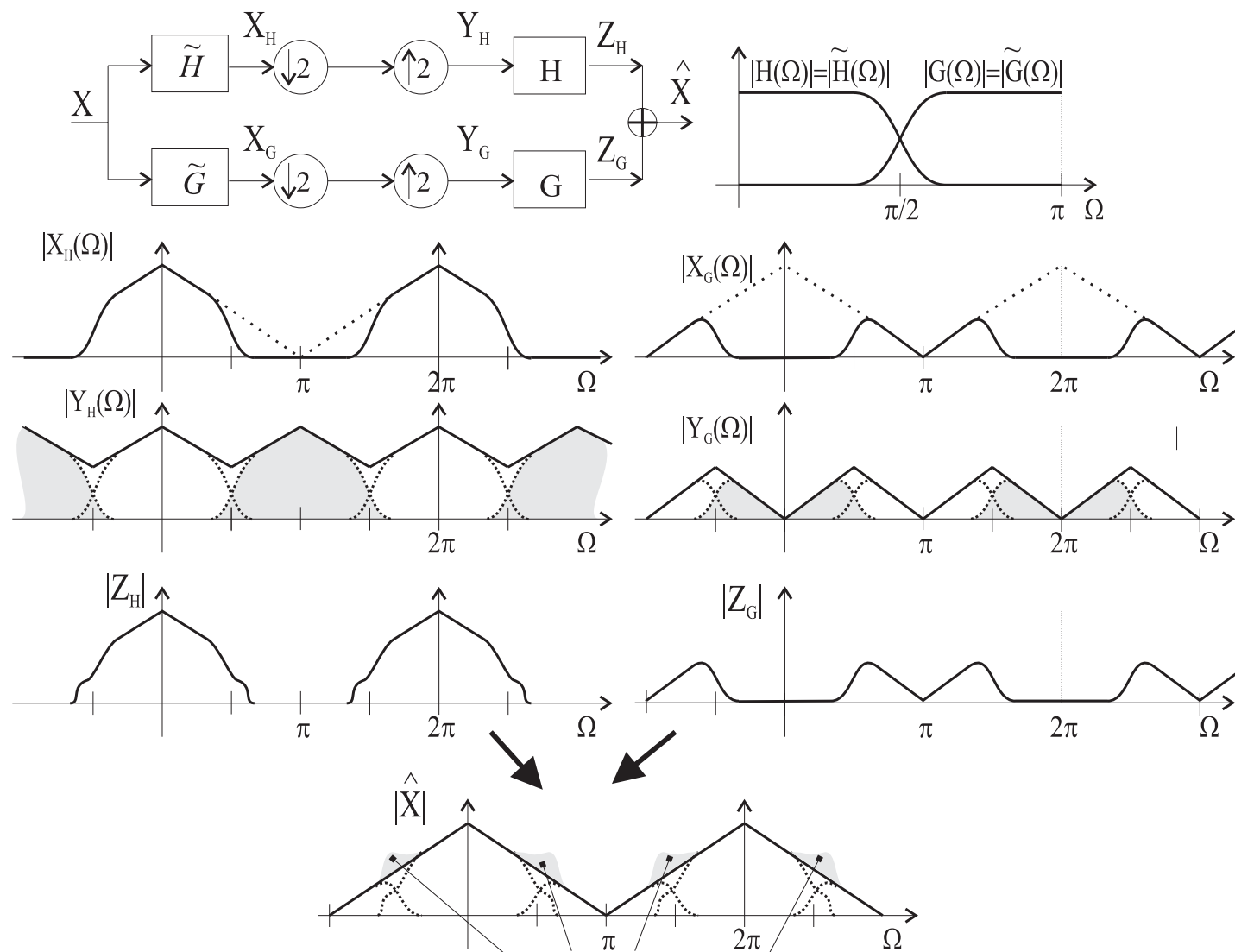
$$c_m(n) = \sum_k h_{mr}(n-2k)c_{m+1}(k) + \sum_k g_{mr}(n-2k)d_{m+1}(k)$$

T.J.AK PLATÍ
$$\begin{aligned} \tilde{h}(n) &= \tilde{h}_{mr}(-n) & h(n) &= h_{mr}(n) \\ \tilde{g}(n) &= \tilde{g}_{mr}(-n) & g(n) &= g_{mr}(n) \end{aligned}$$
 SÚ V1 a V2 TOTOŽNÉ !!!

Ako dosiahneme úplnú rekonštrukciu?



Ak filtre nie su ideálne?



Pri úplnej rekonštrukcii sa aliasing z DP a HP časti navzájom eliminuje

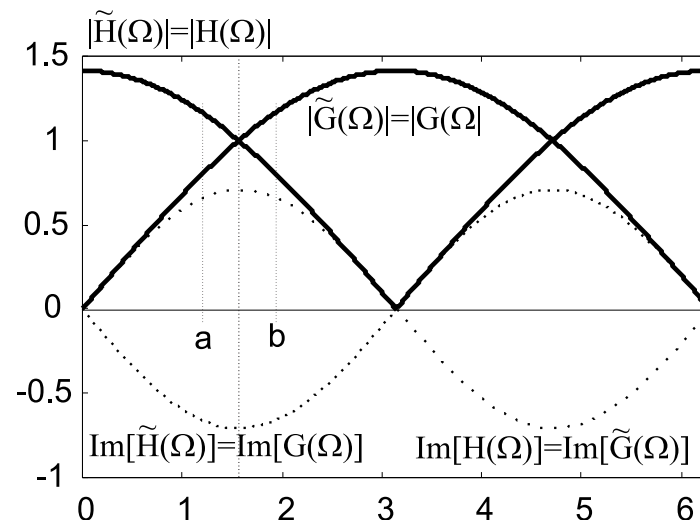
Príklad: Ako je eliminovaný aliasing pri Banke Filtrov používajúcu Haarove filtre?

Platí:

$$\begin{aligned} F(z) = \tilde{H}(z) = 1 + z^{-1} & & H(z) = 1 + z \\ \tilde{G}(z) = 1 - z^{-1} & & G(z) = 1 - z \end{aligned}$$

Odpovedajúce prenosové charakteristiky:

Aký je prenos signálu $X(\Omega)$ v bode $X(a)$?

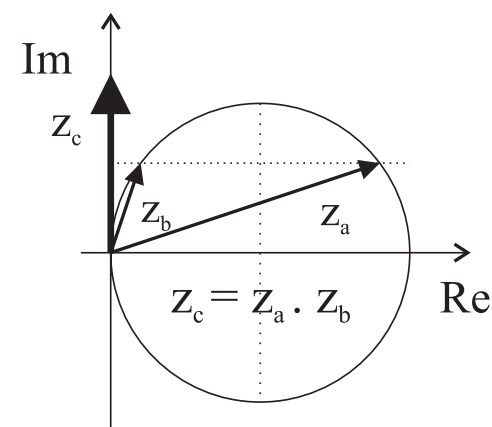


	Po 1. filtrácii	po pod- a nadvzorkovaní	Po2. filtrácii
DP vetva	$X(a)F(a)$	$0.5[X(a)F(a) + X(b)F^*(b)]$	$0.5F^*(a)[X(a)F(a) + X(b)F^*(b)]$
HP vetva	$X(a)F^*(b)$	$0.5[X(a)F^*(b) + X(b)F(a)]$	$0.5F(b)[X(a)F^*(b) + X(b)F(a)]$

T.j výsledok je:

$$0.5X(a)[F^*(a)F(a) + F^*(b)F(b)] + 0.5X(b)[F^*(a)F^*(b) + F(a)F(b)]$$

- prenos $X(a)$ je jednotkový a reálny (vidno aj z grafu)
- prenos $X(b)$ je nulový, vyplýva s vlastností súčinu komplexných čísel (vid'. obrázok vpravo) a z následného súčtu dvoch imaginárnych čísel s opačným znamienkom



Popisom signálov v oboch vetvách FB dostávame:

$$X_H(z) = X(z)\tilde{H}(z)$$

$$X_G(z) = X(z)\tilde{G}(z)$$

$$C(z) = \frac{1}{2} \left[X_H\left(z^{\frac{1}{2}}\right) + X_H\left(-z^{\frac{1}{2}}\right) \right]$$

$$D(z) = \frac{1}{2} \left[X_G\left(z^{\frac{1}{2}}\right) + X_G\left(-z^{\frac{1}{2}}\right) \right]$$

$$Y_H(z) = C(z^2)H(z)$$

$$Y_G(z) = D(z^2)G(z)$$

$$\hat{X}(z) = Y_H(z) + Y_G(z) = \dots = \frac{1}{2} \left[R_p(z)X(z) + R_a(z)X(-z) \right]$$

$R_p(z)$ charakterizuje celkový prenos sústavou a $R_a(z)$ aliasing

$$R_p(z) = \tilde{H}(z)H(z) + \tilde{G}(z)G(z)$$

$$R_a(z) = \tilde{H}(-z)H(z) + \tilde{G}(-z)G(z)$$

Postačujúce podmienky na úplnú rekonštrukciu sú:

1) eliminácia aliasingu $R_a(z) = 0, \forall z$

2) prenos je nanajvýš oneskorením $R_p(z) = 2z^{-l}, l \in \mathbb{Z}$

Riešením 1. podmienky - eliminácie aliasingu dostaneme napr.:

$$H(z) = \pm cz^m \tilde{G}(-z) \quad G(z) = \mp cz^m \tilde{H}(-z), \quad m \in \mathbb{Z}$$

Pri riešení 2. podmienky prepíšeme obe podmienky do maticového tvaru:

$$(H(z) \quad G(z)) \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{H}(z) & \tilde{H}(-z) \\ \tilde{G}(z) & \tilde{G}(-z) \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{M}}(z)} = \begin{pmatrix} 2z^{-l} & 0 \end{pmatrix}$$

, kde $\tilde{\mathbf{M}}(z)$ je *modulačná matica* filtrov pre analýzu. Transponovaním a vynásobením $(\tilde{\mathbf{M}}^T(z))^{-1}$ zľava dostaneme:

$$\begin{pmatrix} H(z) \\ G(z) \end{pmatrix} = \frac{2z^{-l}}{\det(\tilde{\mathbf{M}}(z))} \begin{pmatrix} \tilde{G}(-z) \\ -\tilde{H}(-z) \end{pmatrix}$$

, pričom platí

$$\det(\tilde{\mathbf{M}}(z)) = -\det(\tilde{\mathbf{M}}(-z))$$

Označme $P_H(z) = \tilde{H}(z)H(z)$. Potom použitím predchádzajúcej rovnice dostaneme

$$P_H(-z) = \tilde{H}(-z)H(-z) = \tilde{H}(-z) \left(\frac{2z^{-l} \cdot (-1)^l}{-\det(\tilde{\mathbf{M}}(z))} \tilde{G}(z) \right) = G(z)\tilde{G}(z)(-1)^l$$

dosadením do rovnice pre úplnú rekonštrukciu dostávame:

$$P_H(z) + P_H(-z)(-1)^l = 2z^{-l}$$

Normovaním (centrovaním) $P_H(z)$ pomocou $P(z) = z^l P_H(z)$ dostaneme:

$$\boxed{P(z) + P(-z) = 2}$$

T.j. všeobecným riešením podmienky 2 je, aby $P(z)$ bol tzv. *polpásmový filter*.

Ak chceme navyše sústavu s nulovým oneskorením platia nasledovné tvary vzt'ahov pre elimináciu aliasingu:

$$H(z) = z^{2k-1} \tilde{G}(-z) \quad G(z) = -z^{2k-1} \tilde{H}(-z)$$

Polpásmový filter

Polpásmový filter s prenosovou funkciou $P(z)$ je FIR filter pre ktorý platí:

$$P(z) = P(z^{-1}) \qquad P(z) + P(-z) = 2$$

resp.

$$\begin{aligned} P(e^{j\Omega}) &= P(e^{-j\Omega}) & P(e^{j\Omega}) + P(e^{j(\pi-\Omega)}) &= 2 \\ p(n) &= p(-n) & p(n) + (-1)^n p(n) &= 2\delta(n) \end{aligned}$$

T.j. $P(e^{j\Omega})$ je reálna párna funkcia Ω s nepárnou symetriou okolo bodu $[\pi/2, 1]$ a pre odpovedajúcu impulzovú charakteristiku $p(n)$ platí:

$$p(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \text{ je párne} \\ p(n) & \text{ináč} \end{cases}$$

Energeticky komplementárne filtre

Filtre s $H(z)$ a $G(z)$ sú *energeticky komplementárne* ak platí:

$$\left| H(e^{j\Omega}) \right|^2 + \left| G(e^{j\Omega}) \right|^2 = 2$$

Riešenie vo forme kvadrátúrnych zrkadlových filtrov(QMF)

Kvadrátúrne zrkadlové filtre(QMF) boli v o BF prvýkrát použité v r.1977 (Esteban, Galand) voľbou:

$$H(z) = \tilde{H}(z) \quad \tilde{G}(z) = \tilde{H}(-z) \quad G(z) = -\tilde{H}(-z)$$

Aliasing je odstránený, avšak takáto BF podmienku na prenos iba aproximuje, t.j. nedosahuje úplnú rekonštrukciu okrem trivialneho Haarovho prípadu. Názov *kvadrátúrne zrkadlové filtre* pochádza z vlastnosti, že $\tilde{H}(z)$ a $\tilde{G}(z)$ majú zrkadlové prenosové funkcie okolo $\Omega = \pi/2$, pričom sú energeticky komplementárne.

Ortogonalne (paraunitárne) riešenie

Nech $H_0(z)$ je prenosová funkcia a $h_0(n)$ impulzová charakteristika (párnej dĺžky $N = 2l$, $l \in \mathbb{Z}$ prototypového DP FIR filtra. Potom BF z neho odvodená vzťahmi:

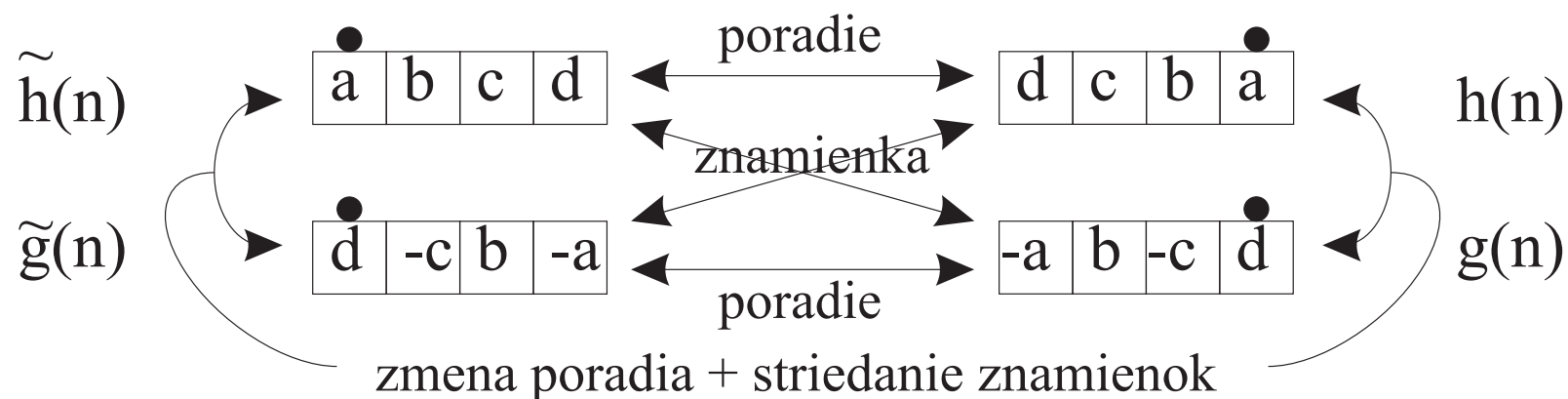
$$\begin{aligned}\tilde{H}(z) &= H_0(z) & H(z) &= \pm z^{2l-1} \tilde{G}(-z) = \tilde{H}(z^{-1}) \\ \tilde{G}(z) &= \mp z^{-(2l-1)} \tilde{H}(-z^{-1}) & G(z) &= \mp z^{2l-1} \tilde{H}(-z) = \tilde{G}(z^{-1})\end{aligned}$$

dosahuje úplnú rekonštrukciu za podmienky, že pre $h_0(n)$ platí:

$$\sum_n h_0(n) h_0(n-2k) = \delta(k) \quad \sum_n h_0(n) = \sqrt{2}$$

Pre takéto riešenie platí:

- má *nulové oneskorenie* avšak sú tu *nekauzálne časti* - *filtre pre analýzu a syntézu v oboch vetvách majú impulzové charakteristiky časovo obrátené*.
- Oneskorením nekauzálnych filtrov (vynásobením členom $z^{-(2l-1)}$) dostaneme kauzálnu BF s oneskorením $2l-1$.
- filtre pre analýzu (a analogicky aj pre syntézu) sú ortogonálne navzájom a aj voči svojim párnym posunom.



Príklad impulzových charakteristík filtrov v ortogonálnej FB s nulovým oneskorením. Bodkou sú označené koeficieny v $n=0$.

Poznámka: Ak sústavu začneme navrhovať od syntézy, t.j. $H(z) = H_0(z)$, výsledkom je zámena analyzačnej a syntetizačnej časti FB, t.j. vo vzťahoch na výpočet filtrov sa zamení označenie duálnosti.

Úvaha: Prečo musia byť filtre $H(z) = \tilde{H}(z^{-1})$, $G(z) = \tilde{G}(z^{-1})$ takto časovo otočené ?

➔ Lebo ináč nemôžu formovať polpásmový filter, $p(n)$ by nebolo symetrické.

Biortogonálne riešenie

Biortogonálne riešenie umožňuje návrh 2-kanálových bánk filtrov s FIR filtrami s *lineárnou fázou* a *rôznymi dĺžkami impulzovej charakteristiky* filtrov pri analýze a syntéze. Aliasing musí byť nulový:

$$H(z) = \pm z^m \tilde{G}(-z) \quad G(z) = \mp z^m \tilde{H}(-z), \quad m \in \mathbb{Z}$$

Filtre v jednotlivých vetvách musia formovať polpásmové filter:

$$P(z) = \tilde{H}(z)H(z) \quad P(-z) = \tilde{G}(z)G(z)$$

Sú možné tieto tvary riešení(formulované pre analyzačné filtre):

- 1) oba filtre sú symetrické, nepárnych dĺžok líšiacich sa o nepárny násobok 2
- 2) jeden filter je symetrický, druhý antisymetrický, oba párnych dĺžok líšiacich sa o párny násobok 2
- 3) jeden filter je nepárnej, druhý párnej dĺžky, oba majú nuly iba na jednotkovej kružnici. Oba sú symetrické alebo jeden je symetrický a druhý antisymetrický.

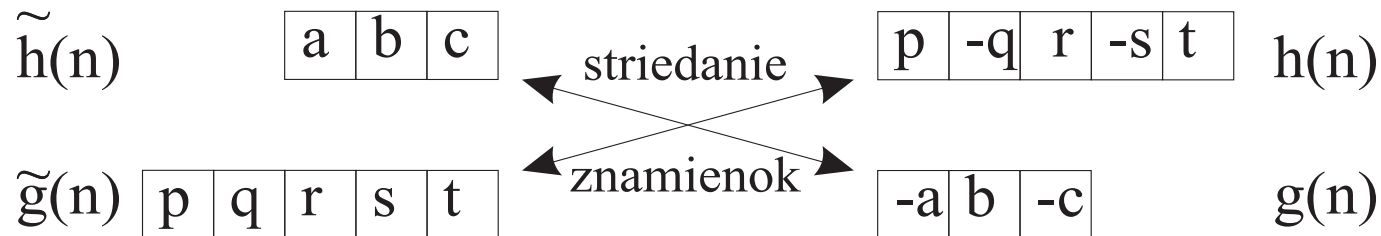
Filtre spĺňajú podmienky biortogonalit, t.j. sú ortogonálne k párnym posunom svojich duálov a ortogonálne navzájom „nakríž“:

$$\sum_k h(k) \tilde{h}(2n-k) = \delta(k)$$

$$\sum_k g(k) \tilde{g}(2n-k) = \delta(k)$$

$$\sum_k g(k+2m) \tilde{h}(2n-k) = \delta(k)$$

$$\sum_k h(k+2m) \tilde{g}(2n-k) = \delta(k)$$



Príklad impulzových charakteristík filtrov v biortogonálnej FB so symetrickými filterami.

Riešenie filtrov	analýza	syntéza
symetrické	$\tilde{h}(n) = (1, 2, 1)$ $\tilde{g}(n) = (-1, -2, 6, -2, -1)$	$h(n) = (-1, 2, 6, 2, -1)$ $g(n) = (-1, 2, -1)$
Antisymetrické (Kvadratický spline, rbio2.2)	$\tilde{h}(n) = (1, 3, 3, 1)$ $\tilde{g}(n) = (-1, -3, 3, 1)$	$h(n) = (-1, 3, 3, -1)$ $g(n) = (-1, 3, -3, 1)$

Maticový tvar 2kanálovaj FB

Pre 2-pásmovú banku filtrov môžeme operácie decimácie (pri analýze) a interpolácie (pri syntéze) rozpísať ako:

$$\begin{aligned}c(n) &= \sum_k \tilde{h}(2n - k)x(k) & d(n) &= \sum_k \tilde{g}(2n - k)x(k) \\ \hat{x}(n) &= \sum_k h(n - 2k)c(k) + \sum_k g(n - 2k)d(k)\end{aligned}$$

Tieto vzťahy môžeme prepísať do maticového tvaru ako transformácie:

$$\bar{X} = T_a \bar{x} \quad \hat{\bar{x}} = T_s \bar{X}$$

, kde $\bar{x}$, $\bar{X}$, $\hat{\bar{x}}$ sú stĺpcové vektory vstupného, transformovaného, výstupného signálu a T_a , T_s sú transformačné matice pre analýzu, resp. pre syntézu.

Predpokladajme konečnú dĺžku vstupného signálu a kruhovú konvolúciu vo FB.

Potom $\bar{x}$, $\bar{X}$, $\hat{\bar{x}}$, T_a , T_s môžeme vyjadriť v tvare:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= (x(0), x(1), \dots, x(N-1))^T \\ \bar{X} &= (c(0), c(1), \dots, c(N/2-1), d(0), d(1), \dots, d(N/2-1))^T\end{aligned}$$

$$\mathbf{T}_a = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{H}} \\ \tilde{\mathbf{G}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{h}(0) & \tilde{h}(-1) & \dots & \dots & \dots & \tilde{h}(1) \\ \dots & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(0) & \tilde{h}(-1) & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(0) & \tilde{h}(-1) \\ \tilde{g}(0) & \tilde{g}(-1) & \dots & \dots & \dots & \tilde{g}(1) \\ \dots & \tilde{g}(1) & \tilde{g}(0) & \tilde{g}(-1) & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \tilde{g}(1) & \tilde{g}(0) & \tilde{g}(-1) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}_s = (\mathbf{H} \quad \mathbf{G}) = \begin{pmatrix} h(0) & \vdots & \dots & \vdots & g(0) & \vdots & \dots & \vdots \\ h(1) & h(-1) & \dots & \vdots & g(1) & g(-1) & \dots & \vdots \\ \vdots & h(0) & \dots & \vdots & \vdots & g(0) & \dots & \vdots \\ \vdots & h(1) & \dots & h(-1) & \vdots & g(1) & \dots & g(-1) \\ \vdots & \vdots & \dots & h(0) & \vdots & \vdots & \dots & g(0) \\ h(-1) & \vdots & \dots & h(1) & g(-1) & \vdots & \dots & g(1) \end{pmatrix}$$

Matice $\tilde{\mathbf{H}}, \tilde{\mathbf{G}}$ sú rozmerov $N \times N/2$. Ich riadky sú tvorené kruhovým posunom impulzových charakteristík príslušných filtrov. V maticiach $\mathbf{H}, \mathbf{G}$ sú kruhovým posunom impulzových charakteristík tvorené stĺpce, pričom matice sú rozmerov $N/2 \times N$.

Pri úplnej rekonštrukcii bez oneskorenia platí $\hat{\bar{x}} = \bar{X}$. Potom platí

$$\mathbf{T}_a \mathbf{T}_s = \mathbf{I}_N = \mathbf{T}_s \mathbf{T}_a$$

Vyjadrame:

$$\mathbf{I}_N = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{N/2} & \mathbf{0}_{N/2} \\ \mathbf{0}_{N/2} & \mathbf{I}_{N/2} \end{pmatrix} = \mathbf{T}_a \mathbf{T}_s = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{H}} \\ \tilde{\mathbf{G}} \end{pmatrix} (\mathbf{H} \quad \mathbf{G}) = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{H} \\ \tilde{\mathbf{G}} \end{pmatrix} (\mathbf{H} \quad \mathbf{G}) = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{H} & \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{G} \\ \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{H} & \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{G} \end{pmatrix}$$

z čoho vyplýva:

$$\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{H} = \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{G} = \mathbf{I} \quad \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{G} = \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{H} = \mathbf{0}$$

T.j. impulzové charakteristiky filtrov sú ortogonálne k párnym posunom svojich duálov a ortogonálne navzájom „nakříž“ = *vyjadrenie biortogonality*.

Naopak :

$$\mathbf{I}_N = \mathbf{T}_s \mathbf{T}_a$$

vyjadruje podmienky pre *elimináciu aliasingu* v časovej oblasti.

K spôsobu tvorenia matíc $\tilde{\mathbf{H}}, \tilde{\mathbf{G}}$ a $\mathbf{H}, \mathbf{G}$

I. $\tilde{\mathbf{H}}, \tilde{\mathbf{G}}$ sú *decimačné matice* - najprv je signál konvolvovaný, potom podvzorkovaný (ukážeme na príklade $\tilde{\mathbf{H}}$):

a) vyjadrením konvolúcie v maticovom tvare dostaneme

$$\tilde{\mathbf{H}}_{konv} = \begin{pmatrix} \tilde{h}(0) & \dots & \dots & \tilde{h}(3) & \tilde{h}(2) & \tilde{h}(1) \\ \tilde{h}(1) & \tilde{h}(0) & \dots & \dots & \tilde{h}(3) & \tilde{h}(2) \\ \tilde{h}(2) & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(0) & \dots & \dots & \tilde{h}(3) \\ \tilde{h}(3) & \tilde{h}(2) & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(0) & \dots & \dots \\ \dots & \tilde{h}(3) & \tilde{h}(2) & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(0) & \dots \\ \dots & \dots & \tilde{h}(3) & \tilde{h}(2) & \tilde{h}(1) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \tilde{h}(3) & \tilde{h}(2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

b) následným podvzorkovaním výstupu dostaneme

$$\bar{\mathbf{c}} = \left(\tilde{\mathbf{H}}_{konv} \bar{\mathbf{x}} \right) \downarrow 2 = \left(\tilde{\mathbf{H}}_{konv} \downarrow_{\text{riadky}} 2 \right) \bar{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{x}}$$

t.j. $\tilde{\mathbf{H}}$ vytvoríme odstránením každého druhého riadku $\tilde{\mathbf{H}}_{konv}$

II. $\mathbf{H}, \mathbf{G}$ sú *interpoláčné matice*- signál je najprv nadvzorkovaný, potom konvolvovaný, pre DP vetvu potom:

$$\hat{\mathbf{x}}_c = (\mathbf{H}_{konv})(\bar{c} \uparrow 2) = \left(\mathbf{H}_{konv} \downarrow_{stĺp} 2 \right) \bar{c} = \mathbf{H} \bar{c}$$

,kde

$$H_{konv} = \begin{pmatrix} h(0) & \dots & \dots & h(3) & h(2) & h(1) \\ h(1) & h(0) & \dots & \dots & h(3) & h(2) \\ h(2) & h(1) & h(0) & \dots & \dots & h(3) \\ h(3) & h(2) & h(1) & h(0) & \dots & \dots \\ \dots & h(3) & h(2) & h(1) & h(0) & \dots \\ \dots & \dots & h(3) & h(2) & h(1) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & h(3) & h(2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

t.j. $\mathbf{H}$ vytvoríme odstránením každého druhého stĺpca $\mathbf{H}_{konv}$