

1 Hilbertove priestory a rozklady signálov

Definícia 1.1: *Vektorový priestor* E nad komplexnými C alebo reálnymi číslami R je množina vektorov E spolu s operáciou sčítania a skalárneho násobenia, pre ktoré $(E, +, \cdot)$ je *lineárny priestor* nad poľom C alebo R .

Definícia 1.2: *Podpriestor vektorového priestoru* E je taká podmnožina $M \subset E$, pre ktorú platí:

1) $\forall x, y \in M; x + y \in M$

2) $\forall x \in M$ a pre $\alpha \in C$ alebo $\alpha \in R$ platí, že $\alpha x \in M$

M je *uzavretý*, ak obsahuje aj všetky limity ľubovoľných postupností vektorov z M .

Definícia 1.3: *Lineárny obal* $L(M)$ množiny $M \subset E$ s prvkami x_i je *podpriestorom* E a platí

$$L(M) = \left\{ \sum_i \alpha_i x_i ; \alpha_i \in C \text{ alebo } R, x_i \in M \right\}$$

Definícia 1.4: *Bázou* vektorového priestoru E nazývame neprázdnu podmnožinu $B \subset E$ práve vtedy, ak $L(B) = E$ a B je množina lineárne nezávislých vektorov.

Definícia 1.5: *Hilbertov priestor* E je vektorový priestor E , ktorý je *kompletný* (obsahuje aj všetky limity ľubovoľných postupností vektorov z E) a na ktorom je definovaný *skalárny súčin* ktorý označujeme $\langle \cdot, \cdot \rangle$

Definícia 1.6: *Veľkosť vektora* x (označujeme $\|x\|$) je v Hilbertových priestoroch daná skalárnym súčinom $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Definícia 1.7: *Nech* $M_1 = \{x_i\}$ a $M_2 = \{y_j\}$ sú podpriestory Hilbertovho priestoru E :

- a) x_i a y_j sú *ortogonálne* ($x_i \perp y_j$) ak $\langle x_i, y_j \rangle = 0$
- b) x_i a M_2 sú *ortogonálne* ($x_i \perp M_2$) ak $\forall y_j; \langle x_i, y_j \rangle = 0$
- c) M_1 a M_2 sú *ortogonálne* ($M_1 \perp M_2$) ak $\forall x_i, \forall y_j; \langle x_i, y_j \rangle = 0$

Definícia 1.8: Nech M_i sú podpriestory Hilbertovho priestoru E . Ak každý vektor $x \in E$ môžeme jednoznačne vyjadriť v tvare $x = x_1 + x_2 + \dots + x_k$ pričom $x_i \in M_i$, potom E je *priamou sumou porpiestorov* M_i . Píšeme $E = M_1 \oplus M_1 \oplus \dots \oplus M_k$

Definícia 1.9: Nech M je podpriestor Hilbertovho priestoru E . Potom *ortogonálny doplnok* k M v E je množina $M^\perp = \{x \in E; x \perp M\}$.

Veta 1.1: Nech podpriestor $M \subset E$ je uzavretý. Potom pre daný vektor $z \in E$ existuje $x \in M$ a $y \in M^\perp$ také, že $z = x + y$. T.j. platí: $E = M \oplus M^\perp$.

1.1 Separovateľné Hilbertove priestory

Hilbertove priestory obsahujú spočítateľné bázy vtedy a len vtedy, ak sú separovateľné. Príklady takýchto priestorov sú:

Komplexné / reálne priestory

Komplexný priestor C^n je množina všetkých n -tíc $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ s **konečnými hodnotami** x_i na množine C . *Skalárny súčin* je definovaný ako:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i^* \quad x, y \in C^n$$

Analogická definícia platí aj pre R^n . Kvôli jednoznačnosti budeme používať aj klasickú notáciu $\bar{x} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T$.

Priestor $l_2(Z)$

Vektormi x v priestore $l_2(Z)$ sú sekvencie $x(n) \in C$, $n \in Z$, s konečnou energiou $\|x\| < \infty$. Zvyčajne reprezentujú signály diskkrétne v čase. *Skalárny súčin* je definovaný ako:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n)^* \quad x, y \in l_2(Z)$$

Priestor $L_2(R)$

Vektormi x v priestore $L_2(R)$ sú funkcie $x(t) \in C$, $t \in R$, ktoré sú po štvorcoch integrovateľné, t.j. $\|x\| < \infty$. *Skalárny súčin* je definovaný ako:

$$\langle x, y \rangle = \int_{t \in R} x(t)y(t)^* dt \quad x, y \in L_2(R)$$

Pozn.: Analogicky pre funkcie n premenných môžeme definovať priestory $L_2(R^n)$

1.2 Ortonormálne bázy

Množina $B = \{x_i\}$ je *ortonormálny systém* ak

$$\forall x_i, x_j \in M_1; \quad \langle x_i, x_j \rangle = \delta(i - j)$$

$B = \{x_i\}$ je bázou priestoru E , ak všetky $y \in E$ môžeme vyjadriť

$$y = \sum_k \alpha_k x_k$$

kde α_k sú spektrálne koeficienty

$$\alpha_k = \langle x_k, y \rangle.$$

Pre takýto systém platí *Parsevalova rovnosť*

$$\|y\|^2 = \sum_i |\langle x_i, y \rangle|^2 \quad \forall y \in E$$

Analogické tvrdenia platia aj pre *ortogonálne systémy*, vo vzťahoch je iba pridaná normalizačná konštanta.

1.3 Biortogonálne bázy

Nech množiny $B = \{x_i\}$ a $\tilde{B} = \{\tilde{x}_i\}$ sú bázami priestoru E . Tieto bázy sú navzájom *duálne* resp. *biortogonálne*, ak:

a) $\forall i, j \in Z ; \langle x_i, \tilde{x}_j \rangle = \delta(i - j)$

b) existujú kladné konečné konštanty $C, D, \tilde{C}, \tilde{D}$, že pre $\forall y \in E$ platí:

$$C\|y\|^2 \leq \sum_k |\langle x_k, y \rangle|^2 \leq D\|y\|^2 \quad \tilde{C}\|y\|^2 \leq \sum_k |\langle \tilde{x}_k, y \rangle|^2 \leq \tilde{D}\|y\|^2$$

Potom signál $y \in E$ môžeme vyjadriť ako

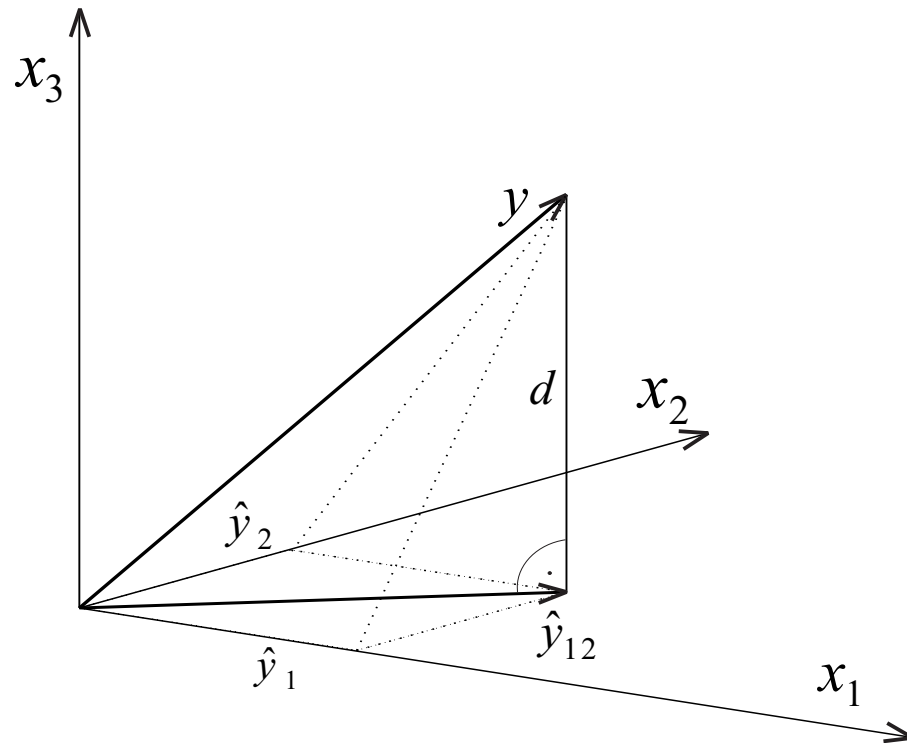
$$y = \sum_k \langle x_k, y \rangle \tilde{x}_k = \sum_k \langle \tilde{x}_k, y \rangle x_k$$

Parsevalova rovnosť má tvar:

$$\|y\|^2 = \sum_i \langle x_i, y \rangle^* \langle \tilde{x}_i, y \rangle \quad \forall y \in E$$

1.4 Ortogonálna projekcia a aproximácia signálu

Definícia: *Ortogonalna projekcia(priemet)* vektora x do vektora s je zložka vektora x v smere vektora s nazývaná a_s s veľkosťou $\|a_s\| = \langle a, s \rangle / \|s\|$.



Obr. 1.1: Projekcia v $E = R^3$: projekcia vektora y do podpriestoru daného $L(\{x_1, x_2\})$.
Platí $y - \hat{y}_{12} \perp L(\{x_1, x_2\})$.

Aproximujme $y \in E$ v uzavretom podpriestore S_k s bázou $B_k = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$. Označme $\hat{y}$ ortogonálnu projekciu $y \in E$ do S_k .

Platí $(y - \hat{y}) \perp S_k$ a zároveň

$$\|y - \hat{y}\| = \min \|y - s\| \quad \forall s \in S_k$$

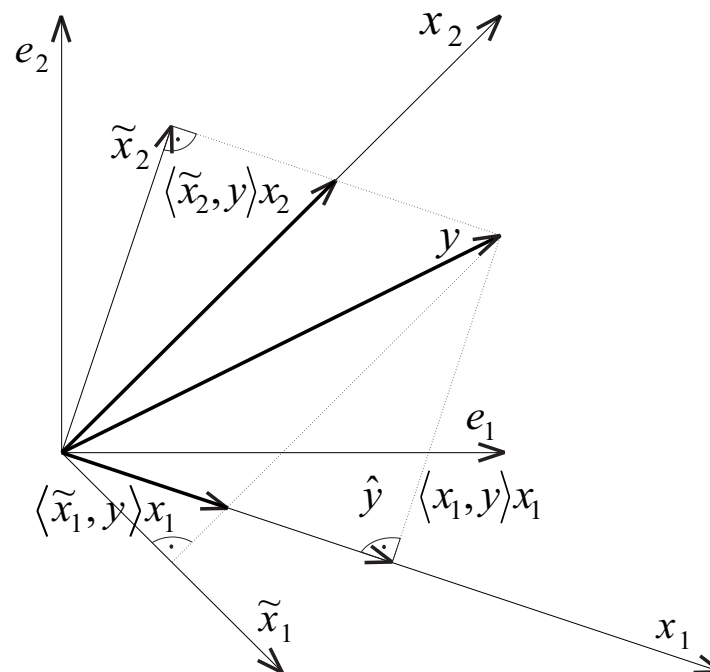
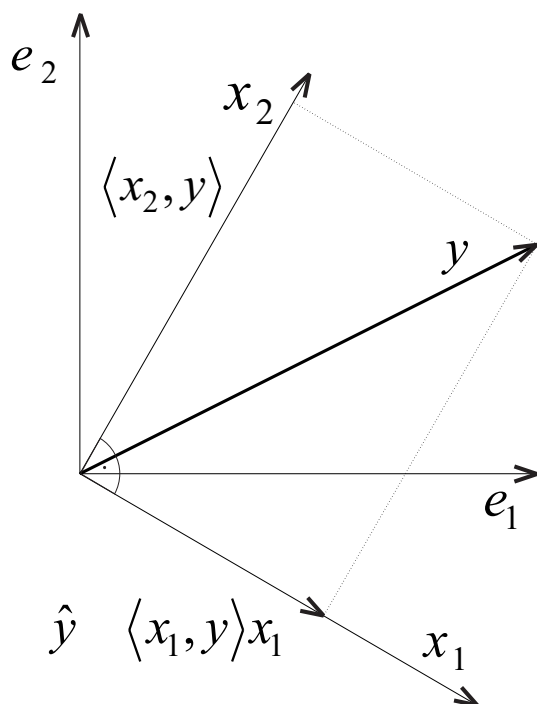
T.j. aproximácia ortogonálnou projekciou je najlepšia v zmysle najmenších štvorcov.

Postupná aproximácia:

- A) Nech B_k je *ortonormálna* báza S_k . Označme ortogonálnu projekciu $y \in E$ do S ako $\hat{y}^{(k)} = \sum_i \langle x_i, y \rangle x_i$. Keďže x_i sú vzájomne ortogonálne (stačí aby báza B_k bola ortogonálna), zachováva sa vlastnosť najlepšej aproximácie v zmysle najmenších štvorcov. Platí vlastnosť *postupnej aproximácie*, t.j.:

$$\hat{y}^{(k+1)} = \hat{y}^{(k)} + \langle x_{k+1}, y \rangle x_{k+1} .$$

- B) Keď B_k , báza S_k nie je ortogonálna, neplatí *vlastnosť postupnej aproximácie*, t.j. *aproximáciu* v S_{k-1} nemôžeme priamo použiť, je nutné celú aproximáciu prepočítať znovu.



a) Ortonormálna báza B

$$B = \{x_1, x_2\} = \{(1.5, -0.5), (1, 1)\}$$

b) B je neortogonálna

$$B = \{x_1, x_2\} = \left\{ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0.5 \right), \left(0.5, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\}$$

$$\tilde{B} = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2\} = \{(0.5, -0.5), (0.25, 0.75)\}$$

Obr: 1.2. Príklad reprezentácie signálu v $y = \{1, 0.5\}$ v $E = \mathbb{R}^2$ v báze B : a) B je ortonormálna b) B je neortogonálna pri rôznych bázach. Všimnime si použiteľnosť aproximácie $\hat{y}$ v podpriestore s k -1 báзовými funkciami.

1.5 Zmena súradníc pri prechode k inej báze v C^n .

Nech $B_1 = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ a $B_2 = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ sú bázy Hilbertovho priestoru C^n . Prepísaním do maticovej notácie dostaneme štvorcové matice hodnosti n :

$$\mathbf{B}_1 = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n) \quad \mathbf{B}_2 = (\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n)$$

kde, $\bar{e}_i = e_i^T$ a $\bar{f}_i = f_i^T$ sú stĺpcové vektory.

Definícia: Každý vektor z B_2 môžeme jednoznačne vyjadriť ako lineárnu kombináciu vektorov bázy B_1 , t.j. platí $B_2 = B_1 P_{12}$. Maticu P_{12} nazývame *maticou prechodu* od bázy B_1 k báze B_2 . Analogicky označme P_{21} maticu prechodu od B_2 k B_1 . Potom platí:

$$P_{21} = P_{12}^{-1}.$$

Veta: Nech $\bar{x} \in C^n$ má v báze B_1 súradnice $\bar{x}(B_1) = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ a v B_2 súradnice $\bar{x}(B_2) = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$. Potom platí:

$$\bar{s}(B_2) = P_{12}^{-1} \bar{s}(B_1) = P_{21} \bar{s}(B_1).$$

V praxi sú naše vstupné vektory reprezentáciou diskretných signálov v **čase**. Potom:

$$B_1 = I \quad P_{12} = B_2^{-1}$$

, kde I je jednotková matica.

Doprednou transformáciou signálu $x(n) = \bar{x} \in C^n$ potom budeme rozumieť zmenu vektora $\bar{x}$ na vektor $\bar{y} = \bar{x}(B_2)$. Označme $T = P_{12} = B_2^{-1}$:

$$\bar{y} = T\bar{x}$$

Signál $\bar{x}$ *rekonštruujeme (spätnou transformáciou)*:

$$\bar{x} = T^{-1} \bar{y} = B_2 \bar{y} = \begin{pmatrix} f_{11} & \dots & f_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & \dots & f_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \bar{f}_1 y_1 + \bar{f}_2 y_2 + \dots + \bar{f}_n y_n$$

Pre ortonormálne bázy $B = \{b_i\}$, platí $T^{-1} = B \quad T = B^{-1} = B^{*T}$

Pre biortogonálne bázy $B = \{b_i\}, \tilde{B} = \{\tilde{b}_i\}$, platí $T^{-1} = B \quad T = \tilde{B}^T$

Platí: Ak chceme vyjadriť nejaký vektor $\bar{y}$ vo vektorovom priestore s bázou B , robíme jeho ortogonálnu projekciu do vektorov *duálnej* bázy $\tilde{B}$ k báze B .

Označme: $\mathbf{B} = (\bar{x}_1 \ \bar{x}_2)$, $\tilde{\mathbf{B}} = (\tilde{x}_1 \ \tilde{x}_2)$

Dualita: $\tilde{\mathbf{B}}^T = \mathbf{B}^{-1}$, T.j: $\tilde{\mathbf{B}}^T \mathbf{B} = \mathbf{I} = \mathbf{B} \tilde{\mathbf{B}}^T$

Dôsledky: 1) $\langle \tilde{x}_1, x_1 \rangle = \langle \tilde{x}_2, x_2 \rangle = 1$

2) $\langle \tilde{x}_1, x_2 \rangle = \langle \tilde{x}_2, x_1 \rangle = 0$

$$\bar{y}(B) = \tilde{\mathbf{B}}^T \bar{y}(I) = \begin{pmatrix} \langle \tilde{x}_1, y(I) \rangle \\ \langle \tilde{x}_2, y(I) \rangle \end{pmatrix}$$

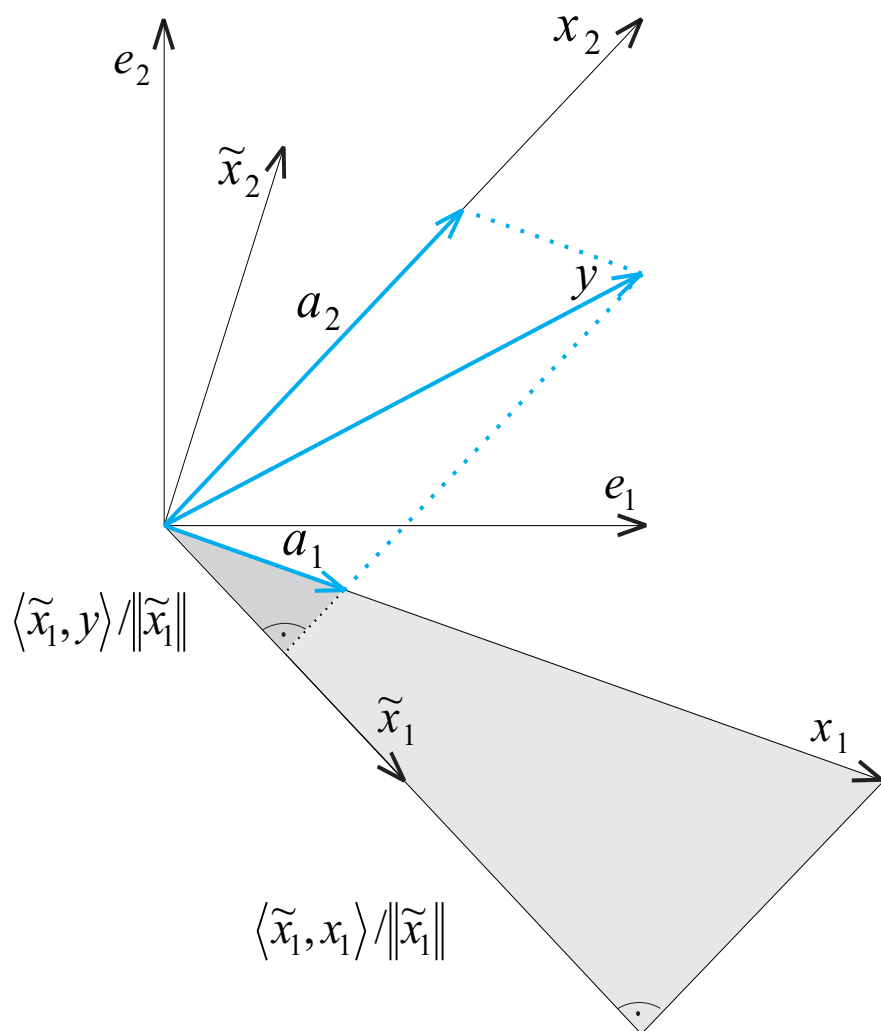
$$\bar{y}(I) = \mathbf{B} \bar{y}(B) = \begin{pmatrix} \langle \tilde{x}_1, y(B) \rangle \\ \langle \tilde{x}_2, y(B) \rangle \end{pmatrix} = \langle \tilde{x}_1, y \rangle \bar{x}_1 + \langle \tilde{x}_2, y \rangle \bar{x}_2$$

Geometrická reprezentácia(dôsledok 2)

Platí: $y = a_1 + a_2$. Ako získame a_1 ?

1) spravíme projekciu y a x_1 do $\tilde{x}_1$

2) z podobnosti trojuholníkov a použitím dôsledku 1 získame $\|a_1\|$ a a_1



1.6 Rámce

Definícia: *Rámcom* vo vektorovom priestore E nazývame neprázdnu podmnožinu $B = \{\psi_i\}$, $B \subset E$ práve vtedy, ak $L(B) = E$ a $\forall f \in E$ existujú kladné konečné konštanty C, D také, že platí:

$$C\|f\|^2 \leq \sum_{m,n} \left| \langle f, \psi_{m,n} \rangle \right|^2 \leq D\|f\|^2$$

Rámce:

- nie su nutne lineárne nezávislé množiny
- reprezentácia vektoru pomocou rámcov môže byť redundantná a nejednoznačná
- ak $A = B$, rámec sa nazýva *tesný* a navyiac ak $\|\psi_{m,n}\|=1$, potom A udáva mieru redundancie rámca oproti báze (ak $A=2$, potrebujeme 2x viac vektorov na vyjadrenie f).
- ak $A = B = 1$, $\|\psi_{m,n}\|=1$ rámec $\{\psi_{m,n}\}$ tvorí *ortonormálnu bázu* E