

Slovenská Technická Univerzita v Bratislave

Fakulta elektrotechniky a informatiky

Katedra telekomunikácií

Rigorózna práca

Kompresia obrazu pomocou waveletovej transformácie

Marec 1997

Radoslav Vargic

Obsah

Zoznam použitých skratiek, symbolov a pojmov	1
1 Úvod	3
1.1 Transformačné kódovanie	4
2 Banky filtrov a systémy s rôznym taktovaním	6
2.1 Dvojkanálová banka filtrov	6
2.1.1 Riešenie vo forme QMF (quadrature mirror filters)	8
2.1.2 FIR paraunitárne riešenie (ortogonálne riešenie)	8
2.1.3 Biortogonálne riešenie	9
2.1.4 Dvoj pásťmové banky filtrov s hierarchickou štruktúrou	10
2.2 IIR Banky filtrov	10
2.3 Viacrozmerné banky filtrov	11
2.3.1 Dvojrozmerné (2D) banky filtrov	11
2.5 Pyramídálne kódovanie	13
3 Waveletová transformácia	14
3.1 Časovo - frekvenčná analýza a waveletová transformácia	15
3.2 Vybrané vlastnosti waveletov	16
3.3 Analýza s rôznym rozlíšením a ortogonálne wavelety	19
3.4 Interpretácia koeficientov pre zmenu mierky	20
3.5 Rozklad s rôznym rozlíšením a rýchla waveletová transformácia	21
3.6 Biortogonálne wavelety a rozklad signálu	23
3.7 Typy a konštrukcie waveletov	24
3.7.1 Ortogonálne wavelety	24
3.7.2 Biortogonálne wavelety	25
3.7.3 Wavelety a IIR filtre	25
3.7.4 Wavelety na intervale	25
3.7.5 Multiwavelety	25
3.7.6 Viacrozmerné wavelety	26
4 Riešenia waveletovej transformácie pri spracovaní obrazu	27
4.1 Rozšírenia signálu	27
4.2 Rýchla waveletová transformácia	28
4.3 Spôsoby rozkladu obrazu	28
4.3.1 Separovateľné rozklady	28
4.3.2 Neseparovateľné rozklady	30
4.3.3 Adaptívna časovo - frekvenčná lokalizácia	30
4.3.4 Waveletové pakety	30
4.4 Požiadavky na filtre pri kódovaní obrazu	32
5 Subpásťmové a waveletové kódovanie obrazu	35
5.1 Základné kompresné postupy	35
5.1.1 Kvantizácia a alokácia bitov	35
5.1.2 Načítavanie koeficientov a entropický kóder	37
5.2 Pokročilé kompresné metódy	38
5.2.1 Metódy založené na wavelet maxime	38
5.2.2 Stromy núl (zero trees)	38
6 Záver	39
7 Zoznam použitej literatúry	41
Príloha A	44

Zoznam použitých symbolov , skratiek a pojmov

Skratky

1D,2D	Jednorozmerný, Dvojrozmerný
CQF	Konjugované kvadrátne filtre
DCT	Diskrétna kosínusová transformácia
DOT	Diskrétna ortogonálna transformácia
DP	Dolný priepust
DWT	Diskrétna waveletová transformácia
EC	Entropický kóder
EOB	Koniec bloku (end of block)
EZW	Embedded zero-tree wavelet algoritmus
FB	Banka filtrov (Filter bank)
FIR	Konečná impulzová odpoveď (Finite impulse response)
FFT	Rýchla Fourierova transformácia
FWT	Rýchla waveletová transformácia (Fast wavelet transform)
HP	Horný priepust
KLT	Karhunen-Loevova transformácia
IIR	Nekonečná impulzová odpoveď (Infinite impulse response)
JPEG	Joint Photographics Experts Group
JSM	Jednosmerná zložka
MPEG	Moving Picture Experts Group
LOT	Prekryvná ortogonálna transformácia (Lapped orthogonal transform)
MRA	Analýza s rôznym rozlíšením (Multiresolution analysis)
MSE	Stredná kvadratická chyba (Mean square error)
pdf	Funkcia hustoty pravdepodobnosti (Probability density function)
Q	Kvantizátor (Quantizer)
QMF	Kvadrátne zrkadlové filtre (Quadrature mirror filters)
SBC	Subpásmové kódovanie (subband coding)
SRT	Systémy s rôznym taktovaním
STFT	Krátka Fourierova transformácia (Short time Fourier transform)
SWT	Spojité waveletové transformácie
TC	Transformačné kódovanie (transform coding)
VQ	Vektorový kvantizátor
WPT	Waveletová paketová transformácia
WT	Waveletová transformácia

Matematické symboly

Z, R	Množina celých a reálnych čísel
$H(z)$	Prenosová funkcia v Z rovine
$h(n)$	Impulzová charakteristika filtra
$\tilde{h}(n)$	Časová reverzia $h(n)$, t.j.: $\tilde{h}(n) = h(-n)$
$\langle f, g \rangle$	Skalárny súčin $\langle f, g \rangle = \sum_i f(i)g(i)$ $i \in Z$
$\delta(n)$	Kroneckerov impulz $\delta(n) = 1$ pre $n = 0$ $\delta(n) = 0$ pre $n \neq 0$

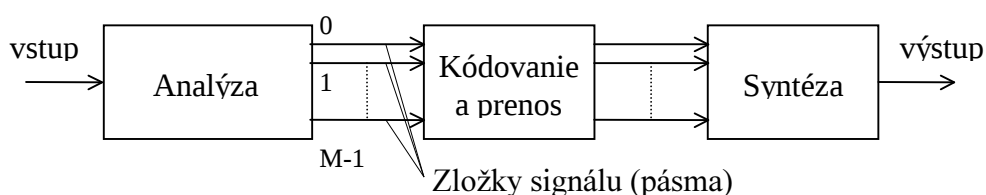
$h(n) * x(n)$	Konvolúcia	$h(n) * f(n) = \sum_k h(k)x(n-k) \quad n, k \in \mathbb{Z}$
$L^2(R)$	vektorový priestor merateľných, po štvorcach integrovateľných funkcií $f(x); x \in R$	
$\tilde{\psi}(t)$	duálna funkcia k funkcii $\psi(t)$	
$L^2(R^2)$	vektorový priestor merateľných, po štvorcach integrovateľných funkcií $f(x, y); x, y \in R$	
$\bar{\psi}(t)$	komplexne združená funkcia k funkcii $\psi(t)$	
$\langle f, g \rangle$	skalárny súčin	$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\bar{g}(t)dt \quad t \in R$
$si(t)$	si funkcia $si(t) = \sin(x)/x$	
$span\{\psi(t-n)\}$	množina všetkých lineárnych kombinácií funkcií $\psi(t-n)$, t.j: $span\{\psi(t-n)\} = \{\sum_{i \in \mathbb{Z}} \alpha_i \psi(t-i); \alpha_i \in R\}$	

Slovník pojmov

Basic wavelet (mother wavelet)	Základný wavelet
Bit allocation	Alokácia bitov
Bit rate	Bitová náročnosť
Coefficient scanning	Načítavanie koeficientov
Compact support	Kompaktná podpora
Conjugate quadrature filters (CQF)	Konjugované kvadráturálne filtre
Decomposition relations	Vzťahy pre rozklad
Dilatation	Zmena mierky
Fast wavelet transform (FWT)	Rýchla waveletová transformácia
Filter Bank (FB)	Banka filtrov
Halfband filter	Polpásmový filter
Inner product	Skalárny súčin
Interscale coefficients	Koeficienty pre zmenu rozlíšenia
Mirror filter	Zrkadlový filter
Multirate systems (SRT)	Systémy s rôznym taktovaním
Multiresolution analysis (MRA)	Analýza s rôznym rozlíšením
Multiresolution decomposition	Rozklad s rôznym rozlíšením
Multiresolution techniques	Metódy rôzneho rozlíšenia
Orthogonal decomposition	Ortogonalný rozklad
Quadrature mirror filters (QMF)	Kvadráturálne zrkadlové filtre
Regularity	Regularita
Scaling function	Funkcia mierky
Scaling coefficient	Koeficient mierky
Signal expansion	Rozšírenie signálu
Subband coding (SBC)	Subpásmové kódovanie
Two scale relations	relácie zmeny rozlíšenia
Wavelet series	waveletové rady
Wavelet packet transform (WPT)	waveletová paketová transformácia

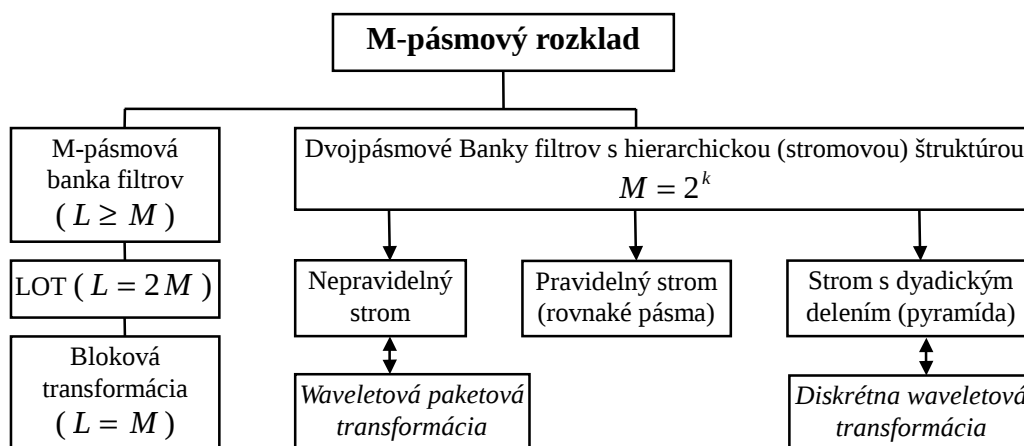
1 Úvod

Kompresia signálov, ktorá je jednou z hlavných aplikácií DSP, používa reprezentácie signálov v rôznych doménach ako hlavný komponent. Zmena reprezentácie signálu je zväčša uskutočnená transformáciou (vtedy hovoríme o transformačnom kódovaní). Keď je zmena reprezentácie ekvivalentná rozkladu v banke filtrov, hovoríme o *zovšeobecnenej transformácii*. Schéma kompresného /dekompresného systému používajúceho tento postup je na Obr. 1.1.



Obr.1.1. Štruktúra systému používajúceho všeobecnú transformáciu

Klasické transformačné postupy používajú diskkrétne ortogonálne transformácie (DOT) ako blokové transformácie bez prekryvu blokov alebo s možným prekryvom blokov (LOT). Oba prípady sú špeciálnym prípadom zovšeobecnenej transformácie, t.j. možno ich nahradiť bankami filtrov[4] (Obr.1.2).



Obr.1.2 Prehľad rozkladov signálu na M pásiem
(L - dĺžka vstupného signálu, M - počet pásiem rozkladu signálu)

Užitočné vlastnosti zovšeobecnenej transformácie sú :

- dekorelačná vlastnosť
- transformačná doména je vhodnejšia na kvantizáciu s ohľadom na perцепčné kritéria
- perцепčné kritérium je zohľadnené pri nízkych výpočtových nárokoch

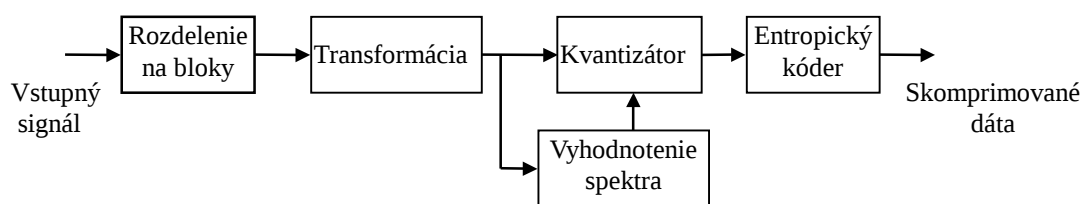
Kóдеры pre kompresiu obrazu odstránia po transformácii zo signálu informáciu nepodstatnú pre ľudský vizuálny systém, t.j. ide o *stratovú kompresiu*.

Waveletová transformácia (WT) a jej modifikácie sú tiež špeciálny prípad zovšeobecnenej transformácie. Banka filtrov má špeciálnu štruktúru a filtre v nej použité musia spĺňať určité dodatočné podmienky (kap. 3). Waveletové kompresné postupy sú v súčasnosti najvýkonnejšie pre oblasť stredných a vysokých kompresíí, kde už najpoužívanejší štandard JPEG zlyháva kvôli silnému *blokovému efektu* [4]. V súčasnosti prebieha vývoj nových štandardov pre kompresiu statického aj pohyblivého obrazu (MPEG IV) používajúcich WT.

Waveletová transformácia vznikla syntézou viacerých oblastí. Je súčasťou systémov s rôznym taktovaním pričom waveletová teória je v matematike silný aparát analogický Fourierovej analýze. Tieto oblasti sú spomenuté v kap. 2, resp. v kap. 3. Špecifiká realizácie WT pri aplikácii na obraz sú uvedené kap. 4. Kompresné postupy založené na bankách filtrov (a waveletoch) sú uvedené v kap. 5.

1.1 Transformačné kódovanie

V transformačnom kódovaní je transformácia len jedným z troch hlavných komponentov. Ďalšie sú kvantizácia a entropické kódovanie. Medzi týmito tromi časťami sú tesné vzťahy, na ktoré treba pri návrhu systému brať ohľad [1][3][7]. Všeobecná schéma transformačného kódera s blokovou transformáciou je nasledovná:



Obr. 1.1: Všeobecná schéma transformačného kódera

Niektoré z ďalších možných odlišných postupov sú uvedené napr. v [3][19].

V transformačnom bloku môžeme použiť rôzne blokové transformácie, uvedené napr. v [1][2]. Optimálna je KLT [3]. Z fixných blokových transformácií je najúspešnejšia DCT, navrhnutá ako aproximácia KLT pre Gauss-Markovovské procesy 1. rádu s veľkým korelačným koeficientom. Pri kompresii obrazu je na nej založený štandard JPEG. Pri blokových implementáciach sa však neodstraňuje medzibloková korelácia a naviac vzniká

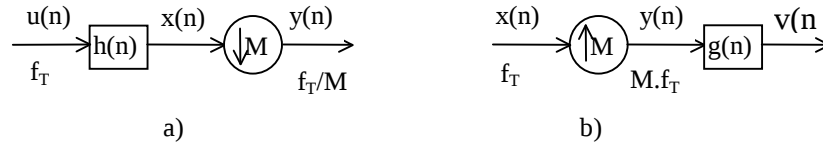
rušivý "blokový efekt". Tento s výhodou odstraňujú Lapped orthogonal transforms (LOT) [4]. Ďalším z riešení ako sa zbaviť uvedených ťažkostí je použiť subpásmové alebo waveletové postupy, ktoré aplikujú metódy rôzneho rozlíšenia. Prirodzene zohľadňujú vlastnosti ľudského vizuálneho systému a preto sa dajú s výhodou použiť pri kompresii obrazu. Princíp metód rôzneho rozlíšenia bol pre obraz zavedený jednoduchou a flexibilnou metódou - pyramidálnym kódovaním Burta a Adelsona. S výhodou sa dá spojiť so subpásmovým a waveletovým kódovaním.

Kvantizácia je mapovanie reálnych hodnôt vzoriek do konečnej diskkrétnej abecedy. Prehľad rôznych foriem kvantizácie - skalárna, vektorová a prediktívna, ako aj výsledky pre optimálne kvantovanie daného signálu sú uvedené napr. v [1][3]. Na kvantizátor je tesne naviazaný problém alokácie bitov, pričom ide o minimalizáciu kritéria (najčastejšie strednej kvadratickej chyby) pri zachovaní rovnakého objemu reprezentácie dát. Problémy alokácie bitov sú riešené napr. v [1][3][7].

Posledným stupňom je *entropický kóder*, ktorý vykonáva reverzibilné mapovanie zdrojových symbolov do novej množiny symbolov, pri súčasnom minimalizovaní bitovej náročnosti. Väčšina súčasných algoritmov je založená na Huffmanovom kódovaní a jeho modifikáciách. Iné postupy sú uvedené napr. v [19].

2 Banky filtrov a systémy s rôznym taktovaním.

V systémoch s rôznym taktovaním (SRT) sú vzorky signálu spracovávané v častiach systému s rôznymi taktovacími frekvenciami. Zmeny taktovacej frekvencie sú uskutočnené operáciami decimácie a interpolácie (Obr. 2.1).



Obr. 2.1: Operácie v SRT a) decimácia a b) interpolácia

Decimácia je proces redukcie vzorkovacej frekvencie celočíselným faktorom M . Najprv je signál filtrovaný antialiasingovým filtrom s impulzovou charakteristikou $h(n)$ a potom je podvzorkovaný. Výsledný signál po decimácii je:

$$y(n) = \sum_k h(Mn - k)u(k) \quad (2.1)$$

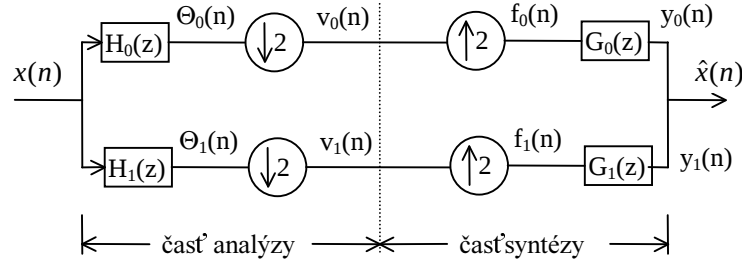
Interpolácia je proces zvýšenia taktovacej frekvencie signálu celočíselným faktorom M . Signál je najprv nadvzorkovaný (vložením $M-1$ núl medzi každé 2 vzorky) a potom interpolovaný filtrom s imp. char. $g(n)$. Výsledný signál po interpolácii je:

$$v(n) = \sum_k g(n - Mk)x(k) \quad (2.2)$$

Na *transformačné kódovanie* sa dá pozerat' ako na špeciálny prípad SRT, v ktorých sa signál rozdelí pomocou baniek filtrov na subpásma a tieto sa potom kódujú primeraným spôsobom (*subpásmové kódovanie* - SBC). Je to dôsledkom možnosti reprezentácie Diskrétny ortogonálnej transformácie (DOT) ako banky filtrov. *Banka filtrov (FB)* je sústava, v ktorej filtre, použité v operáciách decimácie a interpolácie, umožňujú signál rozložiť (analýza) a späť zložiť (syntéza). Ak je výstupný signál identický so vstupným, potom FB má vlastnosť *perfektnéj rekonštrukcie*.

2.1 Dvojkanálová banka filtrov.

V dvojkanálovej banke filtrov (Obr. 2.2) je najprv signál rozdelený na dve pásma pomocou filtrov pre analýzu. Získané signály sú potom podvzorkované. Ich spätným nadvzorkovaním, interpoláciou filtermi pre syntézu a následným sčítaním signál zrekonštruujeme. Cieľom je navrhnuť banky filtrov, ktoré rušia aliasing a dosahujú perfektnú rekonštrukciu. Na kódovacie účely je pritom dôležité zohľadniť viaceré často protichodné požiadavky [7] (kap. 4.4).



Obr. 2.2: Schéma dvojkanálovej banky filtrov

Nech $H_0(z), H_1(z)$ a $G_0(z), G_1(z)$ sú prenosové funkcie filtrov pre analýzu a syntézu v $\mathbf{Z}$ rovine. Konvencia je, že filtre v hornej vetve majú charakter dolného priepustu (DP) a filtre v dolnej vetve charakter horného priepustu (HP). Popisom signálov v hornej vetve dostávame:

$$\begin{aligned} \Theta_0(z) &= H_0(z)X(z) & V_0(z) &= \frac{1}{2} \left[\Theta_0(z^{\frac{1}{2}}) + \Theta_0(-z^{\frac{1}{2}}) \right] \\ F_0(z) &= V_0(z^2) & Y_0(z) &= G_0(z)F_0(z) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Analogickým popisom pre dolnú vetvu a sčítaním bude obraz výsledného signálu v $\mathbf{Z}$ rovine:

$$\begin{aligned} \hat{X}(z) &= \frac{1}{2} [H_0(z)G_0(z) + H_1(z)G_1(z)]X(z) + \frac{1}{2} [H_0(-z)G_0(z) + H_1(-z)G_1(z)]X(-z) \\ &= T(z)X(z) + S(z)X(-z) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Podmienky na perfektnú rekonštrukciu sú [4] :

$$1. \quad S(z) = 0, \text{ pre všetky } z \quad (2.5)$$

$$2. \quad T(z) = cz^{-n_0}, \text{ kde } c \text{ je konštanta} \quad (2.6)$$

Riešením podmienky (2.6) (eliminácia aliasingu) dostávame:

$$G_0(z) = -H_1(-z) \quad g_0(n) = (-1)^{n+1} h_1(n) \quad (2.7)$$

$$G_1(z) = H_0(-z) \quad g_1(n) = (-1)^n h_0(n) \quad (2.8)$$

Na splnenie podmienky (2.6) boli navrhnuté viaceré riešenia a to analýzou najmä:

- v časovej oblasti
- použitím AC (alias cancelling) matic (užitočné vo frekvenčnej oblasti)
- použitím modulačných matic
- polyfázovou dekompozíciou - užitočné v čase aj vo frekvencií

Všeobecné riešenie je aby súčiny $H_0(z)G_0(z)$ a $H_1(z)G_1(z)$ boli prenosové funkcie *polpásmového filtra* [21]. V súčasnosti sa veľa námahy vynakladá na optimalizáciu baniek filtrov z hľadiska maximalizácie zisku kódovania a minimalizácie chýb. V [43] napr. odvádzajú optimálne FB s perfektnou rekonštrukciou, s kritériom minimalizácie aproximačnej chyby. Príklady ortogonálnych (Obr.A.1) a biortogonálnych riešení (Obr.A.2) sú uvedené v Prílohe A ako implementácie waveletových transformácií.

2.1.1 Riešenie vo forme kvadrátúrnych zrkadlových filtrov (QMF).

Nech $h_0(n)$ je impulzová charakteristika DP FIR filtra s reálnymi koeficientami. Potom [4] *zrkadlový* filter je definovaný

$$h_1(n) = (-1)^n h_0(n) \quad (2.9)$$

Takéto filtre majú zrkadlové prenosové funkcie H_0, H_1 okolo $\Omega = \pi/2$. Filtre, ktoré majú túto vlastnosť a sú *energeticky komplementárne*, t.j:

$$|H_0(e^{j\omega})|^2 + |H_1(e^{j\omega})|^2 = 1 \quad (2.10)$$

sa nazývajú *kvadrátúrne zrkadlové filtre (QMF)*.

Takéto filtre boli po prvýkrát použité v r. 1977 (Esteban, Galand) v bankách filtrov dvojpásmového kódera na elimináciu aliasingu (v literatúre sú spomínané aj ako *štandardné QMF banky* filtrov) voľbou:

$$\begin{aligned} H_0(z) &= H(z) & G_0(z) &= H(z) \\ H_1(z) &= H(-z) & G_1(z) &= -H(-z) \end{aligned} \quad (2.11)$$

kde $H(z)$ je prenosová funkcia DP prototypového filtra. Vzťahy (2.11) podmienku (2.6) však iba aproximujú, t.j. banka filtrov nedosahuje perfektnú rekonštrukciu. Vhodnou optimalizáciou však možno dosiahnuť prijateľné riešenia. Najznámejšie sú optimalizácie Johnsona [7]. V [38] je uvažovaný návrh komplexných filtrov s lineárnou fázou s optimalizáciou na minimalizovanie imaginárnych koeficientov s ich následným zanedbaním.

2.1.2 FIR paraunitárne riešenie (ortogonálne riešenie)

Toto riešenie prvý krát použili Smith a Barnwell (1984) vo forme konjugovaných kvadrátúrnych filtrov (CQF). Tieto filtre dosahujú perfektnú rekonštrukciu.

Nech $H_0(z), H_1(z)$ sú prenosové funkcie FIR filtrov, s dĺžkou impulzovej odpovede N , pričom N je párne. Potom [4]:

$$\begin{aligned} H_1(z) &= z^{-(N-1)} H_0(-z^{-1}) & h_1(n) &= (-1)^{(N-1-n)} h_0(N-1-n) \\ H_0(z) &= H(z) & h_0(n) &= h(n) \end{aligned} \quad (2.12)$$

pričom

$$\sum_{k=0}^{N-1} h(k)h(k+2n) = \delta(n) \quad (2.13)$$

Následne (zohľadnením podmienky 2.5) dostaneme impulzové odpovede filtrov pre syntézu:

$$g_0(n) = h_0(N-1-n) \quad g_1(n) = (-1)^n h_0(n) \quad (2.14)$$

Toto riešenie zaručuje, že $H_0(z)$, $H_1(z)$ sú zároveň aj energeticky komplementárne. Filtre pre analýzu a syntézu majú rovnakú veľkosť a sú iba navzájom časovo reverzné.

Riešenie sa nazýva *paraunitárne* vďaka paraunitarite polyfázových matíc filtrov [7]. Riešenie je *ortogonálne*, t.j. filtre spĺňajú podmienky ortogonalít:

$$\begin{aligned} \sum_k h_i(k) h_i(k+2n) &= \delta(n), \quad i = 0, 1 \\ \sum_k h_1(k) h_0(k+2n) &= 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

2.1.3 Biortogonálne riešenie

Vaidyanathan (1985) ukázal, že ortogonálne FIR filtre s lineárnou fázovou charakteristikou nemôžu (okrem 2 triviálnych prípadov) dosahovať perfektnú rekonštrukciu. Biortogonálne riešenie ako alternatívu k paraunitárnemu riešeniu poskytli Vetterli, Herley [7][16][26].

Biortogonálne riešenia umožňujú návrh baniek filtrov s FIR filrami s lineárnou fázou. Umožňujú používať pri analýze a syntéze filtre s rôznou dĺžkou impulzovej odpovede, pričom pri analýze delia spektrum na nerovnako veľké časti. V dôsledku aliasingu pri následnom podvzorkovaní môže kvantizácia subpásiem spôsobiť viac degradácie signálu ako pri paraunitárných riešeniach s takmer lineárnou fázovou charakteristikou.

Rušenie aliasingu sa dosahuje voľbou prenosových funkcií:

$$G_0(z) = -z^{-1} H_1(-z) \quad G_1(z) = z^{-1} H_0(-z) \quad (2.16)$$

Pričom filtre s prenosovými funkciami $H_0(z)$, $H_1(z)$ nie sú vzájomným zrkadlovým obrazom a perfektná rekonštrukcia (2.6) sa dosahuje splnením nasledovných biortogonálnych podmienok, ktoré zavádzajú ortogonalitu pozdĺž analyzačnej a syntetizačnej časti banky filtrov:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{g}_0(n-2k), h_1(n-2l) \rangle &= 0 & \langle \tilde{g}_0(n-2k), h_0(n) \rangle &= \delta(k) \\ \langle \tilde{g}_1(n-2k), h_0(n-2l) \rangle &= 0 & \langle \tilde{g}_1(n-2k), h_1(n) \rangle &= \delta(k) \end{aligned} \quad (2.17)$$

kde operátor $\sim$ znamená časovú reverziu, t.j. napr. $\tilde{h}(n) = h(-n)$. Teda konštrukcia je nasledovná:

Ak máme dané impulzové charakteristiky $h_0(n)$ a $\tilde{g}_0(n)$, ostatné vypočítame ako ich ortogonálne doplnky [33] pomocou vzťahov

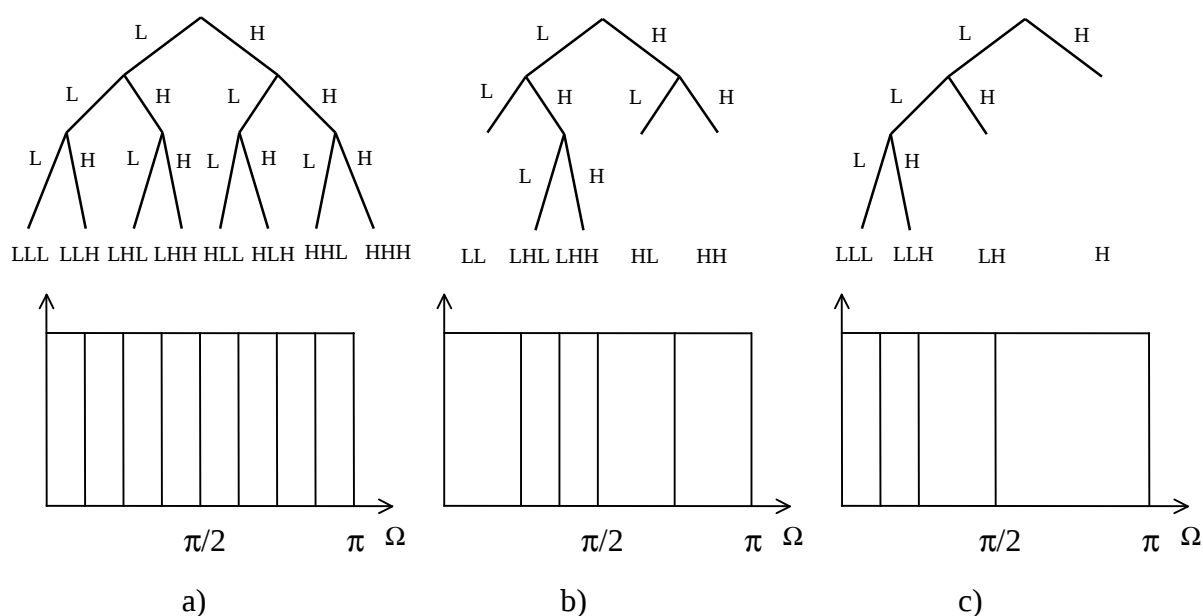
$$h_1(n) = (-1)^n \tilde{g}_0(1-n) \quad \tilde{g}_1(n) = (-1)^n h_0(1-n) \quad (2.18)$$

Pre biortogonálne filtre s lineárnou fázou sú možné tri formy riešenia banky filtrov a to keď pre impulzové charakteristiky $h_0(n)$ a $g_0(n)$ platí:

- obe sú symetrické, nepárnej dĺžky, rozdiel ich dĺžok je mocnina dvoch
- jedna je symetrická, druhá antisymetrická, obe majú párne dĺžky, buď rovnaké alebo líšiace sa mocninou 2
- jedna je nepárnej dĺžky, druhá párnej, obe sú symetrické alebo antisymetrické, alebo jedna je symetrická a druhá antisymetrická

2.1.4 Dvojpásmové banky filtrov s hierarchickou štruktúrou

Kaskádovaním základných blokov dvojpásmovej banky filtrov môžeme realizovať stromové štruktúry, ktoré majú uplatnenie pri rôznych kódovacích postupoch (Obr. 2.3).



Obr.2.3: Rozklad na subpásma pri rôznych hierarchiách dvojpásmových baniek filtrov: a) pravidelný strom b) nepravidelný strom c) dyadický strom (pyramída)

2.2 IIR Banky filtrov

Väčšina zdrojov sa zameriava na FIR banky filtrov. Príčina je v ťažkosti realizácií IIR baniek filtrov s perfektnou rekonštrukciou. Neexistuje stabilné kauzálne paraunitárne riešenie s perfektnou rekonštrukciou ako v prípade FIR filtrov.

Možné riešenia sú:

- Filtre pre syntézu sa budú aplikovať nekauzálne, t.j. filtrovanie sa uskutoční reverziou signálu v čase a aplikovaním kauzálneho filtra - prijateľné pre spracovanie obrazu

(Kronander, ASSP 1988). Ošetrovanie výstupov z IIR filtrov (teoreticky nekonečnej dĺžky) sa v praxi rieši dvoma spôsobmi:

1. Pri analýze sa po dosiahnutí konca vstupného signálu uloží stav filtrov a použije sa ako počiatočný stav pri syntéze.
 2. Využije sa vlastnosť, že po skončení vstupného signálu výstupné hodnoty z analyzačnej banky filtrov rýchlo klesajú a uloží sa teda len konečný počet vzoriek signálu.
- Neuvažuje podmienku perfektnej rekonštrukcie, avšak zachováva koncept paraunitarity. Výstup je bez aliasingu a amplitúdového skreslenia, no toleruje sa isté fázové skreslenie. Je to dosiahnuté energeticky komplementárnymi filrami (Vaidyanathan 1990)

Hlavná výhoda IIR baniek filtrov je dobrá frekvenčná selektivita a malá výpočtová náročnosť. Napriek tomu sú kvôli uvedeným ťažkostiam menej populárne ako FIR. Viac detailov je uvedených napr. v [7].

2.3 Viacrozmerné banky filtrov

Triviálnym riešením problému viacrozmernosti je aplikovanie všetkých metód postupne v jednotlivých rozmeroch. V dvojrozmernom (2D) prípade to znamená, že namiesto $N_1 \times N_2$ bude $N_1 + N_2$ stupňov voľnosti, pričom budú možné len obdĺžnikové delenia spektra.

Neseparovateľné riešenia majú namiesto toho ťažší návrh a vyššiu komplexnosť, pričom existujú dva spôsoby riešenia:

- Používa sa separovateľné vzorkovanie a neseparovateľné filtre.
- Vzorkovanie aj filtre sú neseparovateľné.

Návrh viacrozmerných baniek filtrov môže byť založený na viacerých prístupoch. Najpoužívanejšie sú:

- Priamy návrh pomocou kaskádových štruktúr.
- Transformácia z jedného do viacerých rozmerov:
 1. Metóda separovateľných polyfázových komponentov [7] - perfektná rekonštrukcia nie je vo všeobecnosti dosiahnutá
 2. McClellanova transformácia [7] - aplikovateľná len v biortogonálnom prípade, umožňuje návrh bánk filtrov s lineárnou fázou, spĺňa podmienku perfektnej rekonštrukcie

Oba uvedené postupy zachovávajú nulové body prenosových funkcií filtrov na frekvenciách aliasingu, čo je dôležité pri návrhu viacrozmerných waveletov (kap. 3.7.6).

2.3.1 Dvojrozmerné (2D) banky filtrov

Okrem separovateľných prípadov, 2D banka filtrov nie je jednoduchým rozšírením 1D prípadu. Najznámejšie neseparabilné vzorkovania sú Quincunx a hexagonálne

vzorkovanie (Obr.2.4). V 2D prípade podvzorkovaním zachováame vzorky lokalizované na mriežke, reprezentovanej maticou pre podvzorkovanie D .

Ak je systém separabilný, matica D je diagonálna. Decimačný faktor je určený $M = |\det D|$, čo vo všeobecnosti vedie k M pásmovej banke filtrov. Substitúciami

$$\bar{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} \quad \bar{\Omega} = \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{bmatrix} \quad \bar{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} \bar{d}_1 & \bar{d}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

je periodicitá signálu v 2D prípade vyjadrená

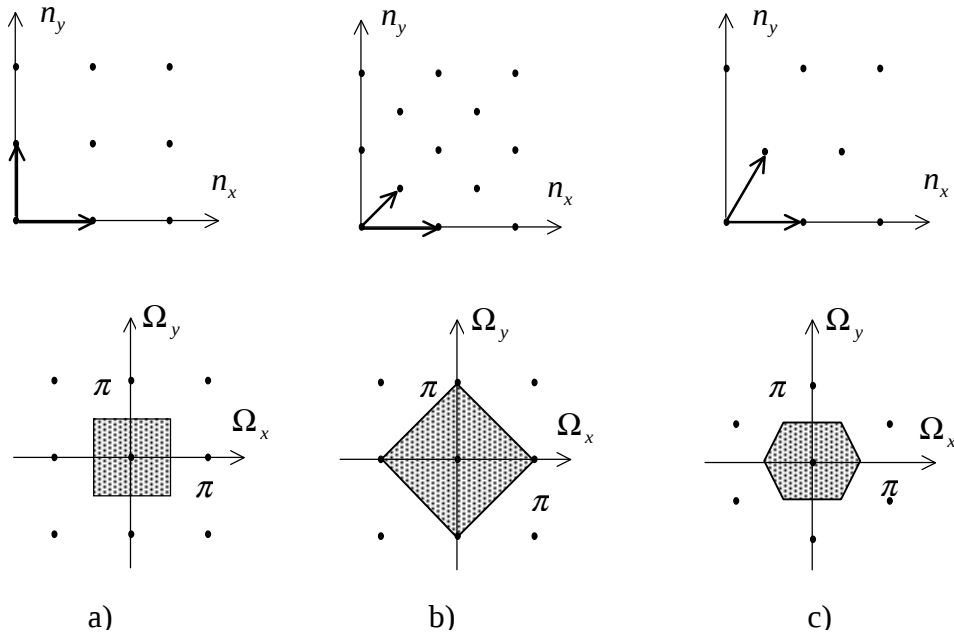
$$x(\bar{n}) = x(\bar{n} + D\bar{r}) ; \forall \bar{r} \quad (2.20)$$

Vektory reprezentované bodmi v periodicky opakovanom regióne sa nazývajú *vektory asociované* s maticou D . Ich počet je M . Pre podvzorkovaný signál potom dostaneme

$$V(\bar{z}) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X(\bar{z}^{D^{-1}} e^{-j2\pi D^{-T} \bar{k}_l}) \quad (2.21)$$

Spektrum podvzorkovaného signálu je tvorené $M-1$ obrazmi pôvodného spektra, ktoré sú mapované do regiónov, obklopujúcich základné pásmo posunutím pomocou $2\pi(D^{-1})^T \bar{k}_l$ (kde $\bar{k}_l$ je množina vektorov asociovaných s D^T).

Podmienky na perfektnú rekonštrukciu môžu byť vyjadrené analogicky ako v 1D prípade. Medzi inými môžu byť realizované aj paraunitárne riešenia (Karlsson, Vetterli 1990)



Obr.2.4: Vzorkovacie mriežky a zodpovedajúce mapovanie spektra pre
a) separovateľné vzorkovanie b) Quincunx c) hexagonálne vzorkovanie

2.5 Pyramídálne kódovanie

Pyramídou sa nazýva hierarchická štruktúra reprezentácie obrazu [7]. Každá vrstva reprezentuje pôvodný obraz s čoraz nižším rozlíšením, čo je dosiahnuté operáciou decimácie pri použití DP filtra. Na úplnú reprezentáciu treba uchovať aj diferencie medzi vrstvami (details). Táto schéma bola zavedená Burtom a Adelsonom (1983). Kvôli Laplaceovskému tvaru pdf interpolačnej chyby, zvykne sa používať názov Laplaceova pyramída.

Výhodou pyramídálnej schémy je, že môžu byť použité nelineárne decimačné a interpolačné operátory. Pre kódovacie účely je však nevýhodou jej nadbytočná reprezentácia.

Táto schéma môže byť však modifikovaná zavedením dotatočných podmienok (ortogonalita, biortogonalita ...) pre operácie interpolácie a decimácie. Takáto reprezentácia signálu je ekvivalentná s rozkladom signálu pri použití dyadickej stromovej štruktúry banky filtrov (Obr. 2.3 c).

3 Waveletová transformácia

Hoci aplikácia waveletov v spracovaní signálov a obrazov je stará iba niekoľko rokov, pohľad do histórie odкрýva mnoho rôznych pôvodov waveletovej analýzy. Ich korene siahajú až k začiatku nášho storočia. Veľa práce sa vykonalo v 30. rokoch (Littlewood, Paley, Franklin, Lusin ...), avšak výsledky sa nejavili ako časti koherentnej teórie, neobjavilo sa slovo wavelet ani zodpovedajúci koncept [14].

Prvý "wavelet" skonštruoval I.Haar v r. 1910 (samozrejme - nevolal ho wavelet) pri konštrukcii alternatívneho ortonormálneho systému k Fourierovmu. V matematike vývoj ďalej pokračoval dyadickým delením Fourierovského spektra (techniky Littlewood-Paleyho v 30. rokoch) s vyústením do harmonickej analýzy (Calderon-Zygmund operátory r.1960) [7]. Všeobecnejší prístup v analýze sa vyvinul v teórii Hardyho priestorov pod názvom "atomická dekompozícia" v r. 1960 - 1980. Prvé ortogonálne wavelety objavil Strömberg začiatkom 80. rokov. Nezávisle od týchto vývojových trendov v harmonickej analýze, bola waveletová transformácia študovaná vo svojej spojitnej podobe, spadajúc takto pod "teóriu rámcov"[18] .

V mnohých oblastiach vedy a techniky sa wavelety objavili na konci 70. rokov. Boli však vyrobené vedcami a inžiniermi "na kolene" - nevznikli nadviazaním na výsledky matematikov.[14]

Prvú syntézu podnietili práce J.Goupillauda, J.Morleta a A.Grossmana (začiatok 80. rokov), od ktorých pochádza aj význam slova "wavelet" . V kontexte geofyziky skúmali alternatívy k Lokálnej Fourierovej analýze, založenej na jedinej prototypovej funkcii, jej posunov a zmeny mierky (pozn: Calderonove dielo obsahovalo ich "revolučné" výsledky už pred 20-imi rokmi). V tom čase začalo byť zrejmé, že prostriedky z teórie Calderona-Zygmunda, predovšetkým reprezentácie Littlewooda-Paleyho, majú diskrétnu analógiu a môžu byť efektívnou náhradou Fourierových radov v numerických aplikáciách. Dôraz sa začal klásť skôr na spôsob reprezentácie samotnej a to, čo predtým spadalo pod rámec teórie Littlewooda a Paleyho, sa odteraz začalo volať waveletová teória[14][18].

Nový štart podnietil S.Mallat (1985), ktorý objavil tesné vzťahy medzi: QMF filtrami pre digitálne prenosové systémy (Crossier, Esteban, Galand), pyramidálnym algoritmom používaným na spracovanie obrazu (Burt, Adleson) a ortonormálnymi waveletovými bázami (Strömberg).

Postupne vznikali konštrukcie waveletov, ktoré tvoria ortonormálne bázy pre mnohé priestory funkcií (Y.Meyer, I.Daubechies, Battle, Lemarie...) [4][7][15].

Formalizáciou týchto konštrukcií do jednotného rámca S.Mallat a Y.Meyer(1988 - 1990) vytvorili "analýzu s rôznym rozlíšením", kde vytvorili vzťahy k metódam používaných v iných odvetviach [7].

3.1 Časovo - frekvenčná analýza a waveletová transformácia

Pri analýze a reprezentácii signálov je častokrát výhodné použiť transformáciu, ktorá reprezentuje signál súčasne v čase aj frekvencii. Štandardná Fourierova analýza rozkladá signál na frekvenčné komponenty. Neposkytuje však informáciu, kedy signál vykazuje dané frekvenčné charakteristiky. Ak sa frekvenčný obsah signálu v čase mení, potom Fourierova transformácia

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \langle f(t), e^{j\omega t} \rangle \quad (3.1)$$

nezaregistruje žiadne lokálne anomálie, lebo jej bázové funkcie pokrývajú celú časovú os.

Gábor (1946) navrhol riešenie vo forme oknovej STFT (Short Time Fourier Transform), ktorá posúva okno fixnej veľkosti pozdĺž signálu a extrahuje frekvenčný obsah v danom intervale

$$F(\omega, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t - \tau)e^{-j\omega t} dt = \langle f(t)g(t - \tau), e^{j\omega t} \rangle \quad (3.2)$$

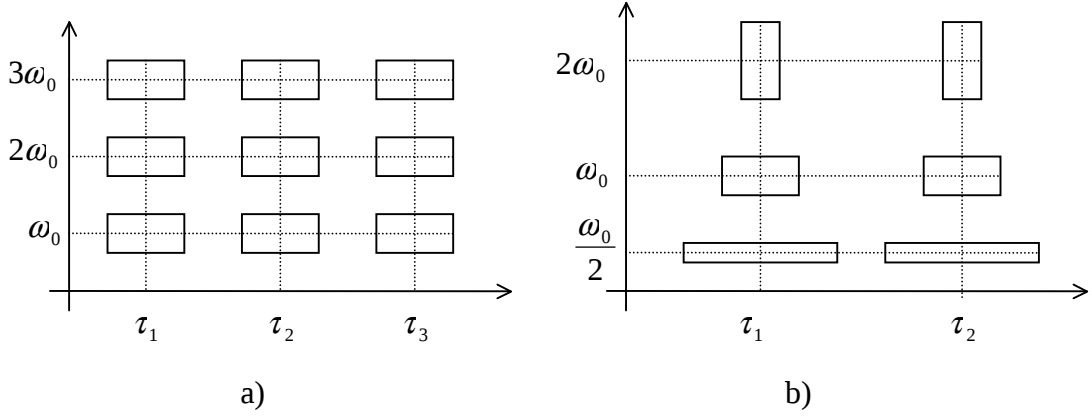
kde $g(t)$ je oknová funkcia a $f(t)$ vstupná funkcia. Ak oknová funkcia je gaussovská funkcia, tak STFT sa volá *Gáborova transformácia*. Bázové funkcie sú generované moduláciou a posunom oknovej (prototypovej) funkcie $g(t)$. STFT má pre danú oknovú funkciu pevné rozlíšenie vo frekvencii. Rozlíšenie v čase a frekvencii pre danú oknovú funkciu je dané *časovo - frekvenčným oknom*, ktorého veľkosti strán sú definované ako disperzie :

$$\sigma_t^2 = \frac{\int t^2 |g(t)|^2 dt}{\int |g(t)|^2 dt} \quad \sigma_\omega^2 = \frac{\int \omega^2 |G(\omega)|^2 d\omega}{\int |G(\omega)|^2 d\omega} \quad (3.3)$$

Princíp neurčitosti (Papoulis 1976) zaručuje, že

$$\sigma_t \cdot \sigma_\omega \geq \sqrt{\frac{1}{2}} \quad (3.4)$$

pričom rovnosť platí, ak $g(t)$ je gaussovská funkcia. Rôzne τ, ω vo vzťahu (3.2) zodpovedajú posunom základného okna v čase a frekvencii (Obr 3.1).



Obr.3.1: Časovo - frekvenčná rovina s príkladom rozloženia časovo - frekvenčných okien pre a) STFT a b) WT.

Waveletová transformácia (WT) má oproti tomu bázové funkcie formované zmenou mierky a posunom *prototypovej funkcie* (základného waveletu) $\psi(t)$.

Spojité waveletové transformácie (SWT) funkcie $f(t) \in L^2(R)$ je definovaná ako zobrazenie $L^2(R) \rightarrow L^2(R^2)$ vzťahom

$$W_f(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi_{ab}}(t) dt = \langle f(t), \psi_{ab}(t) \rangle \quad a \in R^+, b \in R \quad (3.5)$$

kde bázové funkcie ψ_{ab} sú definované zo základného waveletu $\psi(t)$ pomocou parametrov mierky a posunu a, b nasledovne:

$$\psi_{ab}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad \psi(t) \in L^2(R) \quad (3.6)$$

Pre frekvenčné charakteristiky týchto bázových funkcií platí :

$$\frac{\sigma_\omega^2}{\omega} = \text{konšt} \quad (3.7)$$

pričom sa hovorí, že majú rovnakú kvalitu Q (analógia s teóriou rezonančných obvodov). SWT v závislosti od parametra a poskytuje pružné časovo - frekvenčné rozlíšenie, pričom šírka okna sa mení nasledovne:

$$\sigma_{ab_T}^2 = a^2 \cdot \sigma_T^2 \quad \sigma_{ab_\omega}^2 = \frac{1}{a^2} \cdot \sigma_\omega^2 \quad (3.8)$$

Ak je okno pre $\psi(t)$ centrované v časovo - frekvenčnej rovine na (t_0, ω_0) , potom okno pre $\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ je centrované na $(t_0, \omega_0 / a)$ (Obr.3.1).

Táto transformácia je invertovateľná, ak platí

$$C_\psi = \int_0^\infty \left| \frac{\Psi(\omega)}{\omega} \right|^2 d\omega < \infty \quad (3.9)$$

z čoho vyplýva podmienka

$$\Psi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (3.10)$$

t.j. jednosmerná zložka $\psi(t)$ je nulová. Potom existuje inverzná SWT v tvare:

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^\infty W_f(a, b) \cdot \tilde{\psi}_{ab}(t) \frac{da db}{a^2} \quad (3.11)$$

kde $\tilde{\psi}(t)$ je *duálny wavelet* k $\psi(t)$.

Redundancia SWT (oba parametre a, b sú spojité) sa dá odstrániť vzorkovaním a, b . Potom hovoríme o *waveletových radoch*. Pri voľbe vzorkovania sú dôležité otázky kompletnosti, redundancie a minimálnosti výslednej množiny funkcií. Zavedením vzorkovacej mriežky pre $\psi(t)$ (a analogicky pre $\tilde{\psi}(t)$)

$$a = a_0^m \quad b = nb_0 a_0^m \quad (3.12)$$

dostávame

$$\psi_{mn}(t) = a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m} t - nb_0) \quad , \quad m, n \in Z \quad (3.13)$$

Ak sú množiny $\{\psi_{mn}\}, \{\tilde{\psi}_{mn}\}$ kompletne v $L^2(R)$, potom môžeme vyjadriť každú $f(t) \in L^2(R)$ superpozíciou

$$f(t) = \sum_m \sum_n d_{m,n} \tilde{\psi}_{mn}(t) \quad m, n \in Z \quad (3.14)$$

kde $d_{m,n}$ sú *waveletové koeficienty*

$$d_{m,n} = \langle f(t), \psi_{mn}(t) \rangle \quad (3.15)$$

Množiny $\{\psi_{mn}\}$ a $\{\tilde{\psi}_{mn}\}$ sa nazývajú *duálne bázy*. Najbežnejšia voľba vzorkovacej mriežky, tzv. *dyadická*, je $a_0 = 2^{-1}, b = 1$. Potom

$$\psi_{mn}(t) = 2^{m/2} \psi(2^m t - n) \quad \tilde{\psi}_{mn}(t) = 2^{m/2} \tilde{\psi}(2^m t - n) \quad (3.16)$$

a vzťahmi (3.14), (3.15) je definovaná Diskrétna waveletová Transformácia (DWT).

Pár $(\psi, \tilde{\psi})$ spĺňa podmienku *biortogonality*, ak množiny $\{\psi_{mn}\}$ a $\{\tilde{\psi}_{mn}\}$ definované vzťahmi (3.16) tvoria *duálne bázy* a platí:

$$\langle \psi_{jk}, \tilde{\psi}_{lm} \rangle = \delta(j-l) \quad j, k, l, m \in Z \quad (3.17)$$

Ortonormálnu bázu v $L^2(R)$ tvorí taká kompletná množina $\{\psi_{mn}\}$ tzv. *rámec*, pre ktorú by sa odstránením jednej bázeovej funkcie porušila jej kompletnosť a platí

$$\frac{\pi}{b_0 \log(a_0)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = 1 \quad (3.18)$$

Funkcia $\psi \in L^2(R)$ sa nazýva *ortogonálny wavelet*, ak množina $\{\psi_{mn}\}$ definovaná vzťahom (3.16) formuje ortonormálnu bázu priestoru $L^2(R)$. Ak $\psi \equiv \bar{\psi}$, t.j. wavelet má reálnymi funkčné hodnoty, potom platí:

$$\psi \equiv \tilde{\psi} \quad (3.19)$$

$$f(t) = \sum_m \sum_n \langle f(t), \psi_{mn}(t) \rangle \psi_{mn}(t) \quad (3.20)$$

kde

$$\langle \psi_{jk}, \psi_{lm} \rangle = \delta(k-m) \cdot \delta(j-l) \quad j, k, l, m \in Z \quad (3.21)$$

čo charakterizuje ortogonalitu v rovnakých úrovniach rozlíšenia a aj medzi rôznymi úrovňami.

Wavelet $\psi \in L^2(R)$ sa nazýva *semiortogonálny* (nazývaný aj pre-wavelet), ak platí

$$\langle \psi_{jk}, \psi_{lm} \rangle = \delta(j-l) \quad j, k, l, m \in Z \quad (3.22)$$

t.j. je zachovaná ortogonalita len medzi rôznymi úrovňami rozlíšenia [6],[17]. Semiortogonálne wavelety zaviedli nezávisle Auscher, Chui a Wang (1989-1990). Príkladom uvedených waveletov je perspektívna množina splinov a kardinálnych B-splinov [6].

3.2 Vybrané vlastnosti waveletov

1. *Regularita* (Daubechies 1988) poskytuje mieru hladkosti funkcie. Je definovaná ako maximálne číslo r , pre ktoré platí :

$$|\Psi(\Omega)| \leq \frac{c}{(1+|\Omega|)^{r+1}} \quad ; \quad \Omega \in R \quad (3.23)$$

Regularita súvisí s počtom núl prenosovej funkcie generujúceho filtra na $\Omega = \pi$.

2. Vlastnosť *kompaktnej podpory* na intervale $\langle a, b \rangle$ vypovedá o tom, že funkcia (wavelet) má nenulové funkčné hodnoty len na danom intervale, mimo neho je funkčná hodnota nulová.

3.3 Analýza s rôznym rozlíšením a ortogonálne wavelety

V analýze s rôznym rozlíšením (MRA) (Mallat 1985) sa signál $f \in L^2(R)$ vyjadruje ako limita aproximácií signálu. Aproximácie signálu zodpovedajú pri rôznych rozlíšeníach vyhladeným verziám pôvodného signálu. Tieto verzie sa získajú projekciou pôvodného signálu do podpriestorov V_m , ktoré zodpovedajú príslušnému rozlíšeniu.

MRA pozostáva zo sekvencie uzavretých podpriestorov $\{V_m; m \in Z\}$, s vlastnosťami:

1) obsažnosť

$$\dots V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \dots \quad (3.24)$$

rozlíšenie $\leftarrow$ hrubšie jemnejšie $\rightarrow$

2) kompletnosť

$$\bigcap_{m \in Z} V_m = \{0\} \quad \bigcup_{m \in Z} V_m = L^2(R) \quad (3.25)$$

3) vlastnosť zmeny mierky

$$\forall f(x) \in L^2(R) ; f(x) \in V_m \Leftrightarrow f(2x) \in V_{m-1} \quad (3.26)$$

4) existencia bázy

$\exists \phi(x) \in V_0; \forall m \in Z$ množina

$$\{\phi_{mn}(t) = 2^{-m/2} \phi(2^{-m}t - n)\} \quad (3.27)$$

tvorí ortogonálnu bázu pre V_m . Funkcia $\phi(t)$ sa nazýva *funkcia mierky*.

Nech W_m je ortogonálny doplnok V_m do V_{m-1} . Potom platí:

$$V_{m-1} = V_m \oplus W_m \quad \text{a} \quad V_m \perp W_m \quad (3.28)$$

v dôsledku čoho

$$\begin{aligned} L^2(R) &= \dots \oplus W_j \oplus W_{j-1} \dots \oplus W_0 \dots \oplus W_{-j} \oplus W_{-j-1} \dots \\ &= V_0 \oplus W_0 \dots \oplus W_{-j} \oplus W_{-j-1} \dots \end{aligned} \quad (3.29)$$

Vzťah (3.29) sa nazýva *ortogonálny rozklad* priestoru $L^2(R)$. Priestory W_m sa nazývajú *diferenčné* a priestory V_m *sumačné* (dôsledok vzťahu (3.28)).

Nech P_m, Q_m sú projekčné operátory z $L^2(R)$ do V_m resp W_m . Potom vlastnosť (3.2.5) zaručuje $\forall f \in L^2(R); f = \lim_{m \rightarrow -\infty} P_m f$. Z vlastnosti (3.2.4) vyplýva rastúca presnosť aproximácie s klesajúcim m . Použitím vzťahu (3.28) dostávame rovnosť

$$P_{m-1} f = P_m f + Q_m f \quad (3.30)$$

Keď $\phi(t) \in V_0$, z vlastnosti (3.2.7) vyplýva

$$V_0 = \text{span}\{\phi(t-n)\} \quad (3.31)$$

dôsledkom čoho je existencia waveletovej funkcie $\psi(t) \in W_0$, pre ktorú analogicky

$$W_0 = \text{span}\{\psi(t-m)\} \quad (3.32)$$

Množina

$$\{\psi_{mn}(t) = 2^{-m/2} \psi(2^{-m}t - n); m, n \in \mathbb{Z}\} \quad (3.33)$$

potom formuje ortonormálnu bázu definovanú v (3.27) a $\psi(t) \in W_0$ je *ortogonálny wavelet*. Použitím (3.28) a v dôsledku vlastností (3.2.4) platí[6]:

$$\begin{aligned} \phi(t) &= 2 \sum_n h_0(n) \phi(2t-n) \\ \psi(t) &= 2 \sum_n h_1(n) \phi(2t-n) \end{aligned} \quad (3.34)$$

kde $h_0(n), h_1(n)$ sa nazývajú *koefficienty pre zmenu rozlíšenia* a vzťahy (3.34) sa nazývajú *relácie zmeny rozlíšenia* pre danú MRA.

3.4 Interpretácia koeficientov pre zmenu rozlíšenia

Koefficienty pre zmenu rozlíšenia je výhodné interpretovať ako impulzové odpovede filtrov filtračnej banky. (h_0 pre DP filter, h_1 pre HP filter).

Pri použití FIR filtrov (sekvencie $h_0(n), h_1(n)$ majú konečnú dĺžku) sú funkcia mierky $\phi(t)$ a základný wavelet $\psi(t)$ *kompaktné podporované* - t.j. ich funkčná hodnota je nenulová len na istom uzavretom intervale (kap. 3.2).

Nech H_0 a H_1 sú prenosové funkcie filtrov s impulzovými odpoveďami $h_0(n), h_1(n)$. Potom Fourierova transformácia funkcie mierky a základného waveletu je ich nekonečným produktom [4]:

$$\Phi(\Omega) = \Phi(0) \prod_{k=1}^{\infty} H_0\left(e^{j\frac{\Omega}{2^k}}\right) \quad \Psi(\Omega) = H_1\left(e^{j\frac{\Omega}{2}}\right) \Phi(0) \prod_{k=1}^{\infty} H_0\left(e^{j\frac{\Omega}{2^k}}\right) \quad (3.35)$$

Aby vzťahy (3.35) konvergovali, musí pre $H_0(z), H_1(z)$ platiť:

$$H_0(-1) = 0 \quad H_1(1) = 0 \quad (3.36)$$

t.j. $H_0(z), H_1(z)$ musia mať minimálne jednu nulu v bode $z = -1$ resp. $z = 1$.

Podmienka (3.36) je nutná, nie postačujúca. Nutná a postačujúca podmienka na konvergenciu je založená na koncepte regularity (kap. 3.2). Filtre sú *regulárne*, ak

$\phi(t), \psi(t)$ definované podľa (3.35) sú po častiach hladké funkcie.

Funkcia mierky a základný wavelet sú jednoznačne dané filtrami s prenosovými funkciami $H_0(z), H_1(z)$, vzťahmi (3.35). Je žiadúce použiť také filtre, ktoré vedú k hladkým funkciam $\phi(t), \psi(t)$ s kompaktnou podporou v čase a zároveň dostatočnou lokalizáciou vo frekvencii. T.j. je nutné špecifikovať vlastnosti $H_0(z)$ a $H_1(z)$ resp. $h_0(n), h_1(n)$ aby nekonečný produkt (3.35) konvergoval na hladkú funkciu (s čo najväčšou regularitou) a nie na fraktál.

Ak majú $\{\phi_{mn}\}, \{\psi_{mn}\}$ formovať *ortonormálne bázy*, musia platiť *unitárne* podmienky vo frekvencii:

$$\sum_k |\Phi(\Omega + 2k\pi)|^2 = 1 \quad \sum_k |\Psi(\Omega + 2k\pi)|^2 = 1 \quad (3.37)$$

Dá sa dokázať, že filtre s prenosovými funkciami $H_0(z), H_1(z)$, ktoré spĺňajú podmienku (3.37), súčasne spĺňajú podmienky kladené na filtre pri paraunitárnom riešení dvojpásmovej banky filtrov. Z uvedeného vyplýva, že paraunitárne riešenie dvojpásmovej banky filtrov so splnenou podmienkou (3.37) vedie k ortonormálnym waveletovým bázam.

3.5 Rozklad s rôznym rozlíšením a rýchla waveletová transformácia

Analýza s rôznym rozlíšením (kap. 3.3) sa dá s výhodou používať v procese analogickom pyramidálnemu kódovaniu (kap. 2.5), t.j. rozkladu signálu na vrstvy s nižším rozlíšením pri uchovávaní rozdielov medzi vrstvami. Tento proces sa nazýva *rozklad s rôznym rozlíšením* (Multiresolution decomposition). Umožňuje výpočet DWT rýchlym algoritmom, *rýchlou waveletovou transformáciou (FWT)*.

Začíname projekciou signálu $s(t)$ do priestoru V_0 . Označením tejto projekcie $f(t)$ dostávame

$$f(t) = P_0 s \quad ; \quad f \in V_0 \quad (3.38)$$

Za predpokladu (3.31) $f(t)$ môžeme vyjadriť

$$f(t) = \sum_n c_{0,n} \phi(t-n) = \sum_n c_{0,n} \phi_n(t) \quad (3.39)$$

kde

$$c_{0,n} = \langle f, \phi_{0n} \rangle = \int f(t) \phi(t-n) dt$$

Keďže platí (3.28), t.j. $V_0 = V_1 \oplus W_1$, $f(t)$ sa dá vyjadriť ako suma projekcií do týchto priestorov:

$$f(t) = P_1 f + Q_1 f = \sum_n c_{1,n} \phi_{1n}(t) + \sum_n d_{1,n} \psi_{1n}(t) = f_v^1(t) + f_w^1(t) \quad (3.40)$$

kde koeficienty mierky c_{1n} a waveletové koeficienty d_{1n} sú dané vzťahmi:

$$\begin{aligned} c_{1n} &= \langle f_v^1, \phi_{1n} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \int f_v^1(t) \phi\left(\frac{t}{2} - n\right) dt \\ d_{1n} &= \langle f_w^1, \psi_{1n} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \int f_w^1(t) \psi\left(\frac{t}{2} - n\right) dt \end{aligned} \quad (3.41)$$

Použitím (3.41), (3.40) a zovšeobecnením na vzťahy medzi úrovňami l a $l+1$, dostávame vzťahy pre rozklad:

$$\begin{aligned} c_{l+1,n} &= \sqrt{2} \sum_k h_0(k-2n) c_{l,k} \\ d_{l+1,n} &= \sqrt{2} \sum_k h_1(k-2n) c_{l,k} \end{aligned} \quad (3.42)$$

a vzťah pre rekonštrukciu:

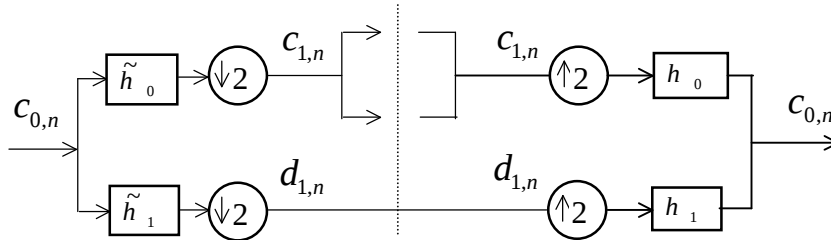
$$c_{l,n} = \sqrt{2} \left[\sum_k c_{l+1,k} h_0(n-2k) + \sum_k d_{l+1,k} h_1(n-2k) \right] \quad (3.43)$$

Ak je vstupný signál diskretný, je výhodné považovať ho za reprezentáciu nejakého signálu v priestore V_0 . Nech vstupný signál $x(n)$ má dĺžku N . Potom:

$$c_{0,n} = x(n) \text{ pre } n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.44)$$

Štruktúra banky filtrov, ktorá realizuje rozklad a rekonštrukciu signálu - ako je definované vzťahmi (3.42) a (3.43) je na Obr.3.2. Aby vzťahy pre rozklad (3.42) boli ekvivalentné s operáciou decimácie (2.1), filtre v analyzačnej časti majú impulzovú charakteristiku časovo obrátenú.

Filtre použité v banke filtrov sú ekvivalentné s paraunitárnym riešením banky filtrov.

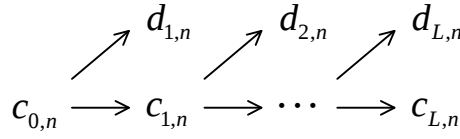


Obr.3.2: Riešenie banky filtrov pri ortogonálnom rozklade

V praxi sa pracuje s konečným rozlíšením, t.j. rozklad signálu sa vykonáva iba po istú uroveň L . Signál je potom reprezentovaný sumou projekcií

$$f(t) = f_v^L(t) + f_w^L(t) + f_w^{L-1}(t) + \dots + f_w^1(t) \quad (3.45)$$

Graficky je situácia znázornená na Obr. 3.3.



Obr.3.3 Rozklad signálu na waveletové koeficienty a koeficienty mierky

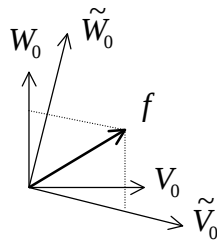
Pri rozklade signálu sa signál decimáciou postupne rozkladá na vysokofrekvenčné zložky $d_{l,n}$ (projekcie do diferenčných priestorov W_m) a na nízko-frekvenčné zložky $c_{l,n}$ (projekcie do sumačných priestorov V_m) (Obr.3.3). Pri rekonštrukcii sú zložky signálu spätne interpolované a sčítané.

3.6 Biortogonálne wavelety a rozklad signálu

Ak základný wavelet a jeho duál $(\psi, \tilde{\psi})$ spĺňajú podmienku *biortogonality*, analogicky k nim existujú funkcie mierky $\phi, \tilde{\phi}$ také, že množiny $\{\phi_{mn}\}$ a $\{\tilde{\phi}_{mn}\}$ tvoria bázy pre podpriestory V_m resp. $\tilde{V}_m$ a množiny $\{\psi_{mn}\}$ a $\{\tilde{\psi}_{mn}\}$ tvoria bázy pre podpriestory W_m resp. $\tilde{W}_m$. V MRA potom existujú dve hierarchie (Cohen, Daubechies, Feauveau):

$$\begin{aligned} \dots V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \dots \\ \dots \tilde{V}_2 \subset \tilde{V}_1 \subset \tilde{V}_0 \subset \tilde{V}_{-1} \subset \tilde{V}_{-2} \dots \end{aligned} \quad (3.46)$$

pričom platí že W_j je komplementárne k V_j v priestore V_{j-1} , ale nie je to ortogonálny komplement. W_j je namiesto toho ortogonálny komplement $\tilde{V}_j$. Analogicky $\tilde{W}_j$ je ortogonálny komplement V_j (Obr.3.4).



Obr.3.4 Priemety funkcie f do biortogonálnych priestorov

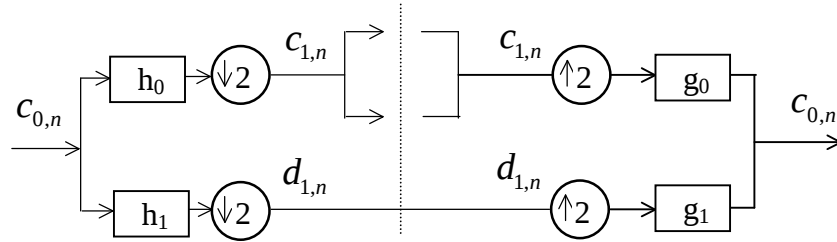
Analogicky k (3.28) platia nasledovné vzťahy:

$$\begin{aligned} V_{j-1} &= V_j \oplus \tilde{W}_j \\ \tilde{V}_{j-1} &= \tilde{V}_j \oplus W_j \end{aligned} \quad (3.47)$$

Relácie zmeny mierky sú dané vzťahmi:

$$\begin{aligned}
\phi(t) &= 2 \sum h_0(n) \phi(2t - n) & \psi(t) &= 2 \sum h_1(n) \phi(2t - n) \\
\tilde{\phi}(t) &= 2 \sum \tilde{g}_0(n) \tilde{\phi}(2t - n) & \tilde{\psi}(t) &= 2 \sum \tilde{g}_1(n) \tilde{\psi}(2t - n)
\end{aligned}
\tag{3.48}$$

kde koeficienty pre zmenu rozlíšenia sú $h_0(n), h_1(n)$ a $\tilde{g}_0(n), \tilde{g}_1(n)$. Rozklad signálu do navzájom biortogonálnych priestorov implementuje biortogonálne riešenie banky filtrov (Obr.3.5). Prenosové funkcie použitých filtrov pri tom musia spĺňať podmienky (3.36), podobne ako tomu bolo v prípade ortogonálnych waveletov.



Obr.3.5 Riešenie banky filtrov pri ortogonálnom rozklade

Ostatné podmienky na konštrukciu filtrov sú identické s biortogonálnym riešením banky filtrov (kap. 2.1.3).

3.7 Typy a konštrukcie waveletov

3.7.1 Ortogonálne wavelety

Okrem triviálnych prípadov waveletov (Haarov wavelet - 1910, Shannonov wavelet) existuje viacero možností prístupov a konštrukcií [4] [6] [7] [15] [17].

- Konštrukcia vo frekvenčnej oblasti [18][6] (Meyerove , spline wavelety) - postupne zjemňujú spektrum $si(t)$ funkcie a následne konštruujú funkcie mierky tvoriace MRA, t.j. so splnenou podmienkou ortogonalít. Z nich sa konštruujú wavelety už standardnými metódami.
- Wavelety odvodené z iterovaných baniek filtrov - konštruované iteráciou impulzových odpovedí číslicových filtrov. (Daubechies 1988)

Medzi ortogonálnymi waveletmi má zvláštne postavenie rodina Daubechies waveletov, ktoré odpovedajú filtrom s *maximálne plochou* prenosovou funkciou.

Príklady waveletov ich funkcií mierky a prenosové funkcie nim odpovedajúcim filtrom sú uvedené v Prílohe A. Strata presnosti aproximácie obrazu pri orezaní subpásom pre rôzne wavelety je v Prílohe B, Obr 8.4.

3.7.2 Biortogonálne wavelety

Biortogonálne wavelety sa môžu konštruovať nasledovnými spôsobmi [7], [9]:

- Vynechaním ortogonalizovania báz pri návrhu ortogonálnych waveletov (napr. Battle-Lemarie wavelet).
- Z začať z biortogonálnych baniek filtrov a používať metódy pre iterované banky filtrov ako v ortogonálnom prípade - s tým, že teraz musia byť iterované filtre pre analýzu aj syntézu.
- Lifting schémou [53]

Ťažkosťou pri návrhu biortogonálnych waveletov je zaručiť regularitu zároveň pre obe duálne bázy. V tom prípade je výhodné použiť funkciu mierky a wavelet s vyššou regularitou v časti syntézy [14].

Príklady biortogonálnych waveletov, funkcií mierky, ich duálov a prenosových funkcií filtrov odpovedajúcej banky filtrov sú uvedené v Prílohe A.

3.7.3 Wavelety a IIR filtre

IIR filtre môžu byť takisto ako FIR filtre použité na generovanie waveletov pomocou iterácií [7],[26]. Okrem ortogonálnych riešení existujú aj biortogonálne. Relácie zmeny mierky (3.34) pri IIR filtroch majú potom v sume nekonečný počet funkcií $\phi(2t - n)$. Existuje trieda waveletov, analogická Daubechies waveletom, ktorá vedie k maximálne plochým IIR filtrom s exponencionálnym poklesom hodnôt impulzovej charakteristiky. Wavelety s najväčšou regularitou, ktoré sú získané touto analógiou, sú založené na klasických Butterworthových filtroch.

3.7.4 Wavelety na intervale

Originálna definícia waveletov používa funkcie definované na celej reálnej osi. Ďalšou možnosťou je definovanie špeciálnych waveletov na intervale: tieto pozostávajú z obvyklých waveletov, ktorých podpora je úplne vnútri intervalu a špeciálnych "okrajových" waveletov. Prvé takéto ortogonálne množiny skonštruoval Y.Meyer z Daubechies waveletov, boli však numericky nestabilné. Ďalšie konštrukcie nasledovali (Cohen, Andersson, Alpert, Auscher). Príklad konštrukcie je uvedený v [18]. V [21] sú riešené hraničné filtre implementujúce ortogonálne aj biortogonálne wavelety. Konštrukcie založené na spline waveletoch zaviedli Chui, Wang [6]. V súčasnosti existujú viaceré konštrukcie pre ortogonálne aj biortogonálne prípady.

3.7.5 Multiwavelety

O multiwaveletoch hovoríme, ak sú použité pri reprezentácii signálu viaceré základné wavelety (z čoho vyplýva existencia viacerých funkcií mierky) [25]. Pre takto navrhnutú

množinu základných waveletov sa dá zostrojiť pyramidálny algoritmus podobne ako s jedným základným waveletom (kap. 3.3). Dosiahnutie symetrie bázových funkcií - t.j. lineárnej fázovej charakteristiky systému je možné.

Multiwavelety sa zameriavajú iba na dekoráciu v časovej oblasti. V [24][25] sú uvedené implementácie pomocou vektorových baniek filtrov.

Multivavelety sú v literatúre označované aj ako *wavelety druhej generácie* [53].

3.7.6 Viacrozmerné wavelety

V kap. 2, venovanej bankám filtrov, bolo ukázané rozšírenie konceptu 1D baniek filtrov na viaceré dimenzie. Vo všeobecnosti sa návrh môže riešiť:

- priamym návrhom
- transformáciou z 1D prípadu

Najjednoduchšou konštrukciou 2D waveletov je použitie tenzorového súčinu ich 1D náprotivkov. Zavedením analogického konceptu ako v kap. 2.3.1, dostávame reláciu zmeny mierky v tvare

$$\phi(\bar{t}) = \sqrt{2} \sum_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^2} h_0(\bar{n}) \phi(D\bar{t} - \bar{n}) \quad (3.49)$$

Návrh viacrozmerných waveletov tesne súvisí s návrhom viacrozmerných baniek filtrov. V prípade waveletov - matice používané na podvzorkovanie majú viac obmedzovacích podmienok a ich úloha je dôležitejšia. Originálny filter, nasledovaný podvzorkovaním, môže konvergovať pre to isté podvzorkovanie (avšak reprezentované rôznymi maticami D) do rôznych limit. Zaujímavý príklad konverencie Haarovho waveletu do fraktálu je uvedený v [7] (konštrukcia podľa Grodeninga a Madicha). Úloha je komplikovaná úsilím vkladať nuly istého rádu na frekvencie aliasingu. Regularita sa dosahuje ťažšie (je ovplyvnená aj maticou D) a dodnes neboli nájdené ortogonálne wavelety s ľubovoľne vysokou regularitou[16].

V biortogonálnom prípade môže byť na návrh použitá transformácia z 1D biortogonálnych baniek filtrov s následnou iteráciou.

Podrobnejšie sú riešenia popísané v [7][26].

4 Riešenia waveletovej transformácie pri spracovaní obrazu

Waveletovú transformáciu je výhodné implementovať bankami filtrov, ako je to explicitne uvedené v kap. 3.5 a 3.6. Keďže vstupný signál (obraz) je konečnej dĺžky je treba ošetriť okraje signálu, t.j. určiť typ konvolúcie (periodická, ...) ktorá bude vykonávať filtráciu v banke filtrov. Prehľad spôsoby ošetrovania okrajov sú uvedené v kap. 4.1. Postup decimácie a interpolácie 1D signálu pri dyadickom rozklade v bankách filtrov, t.j. *rýchlej waveletovej transformácie* je uvedený v kap. 4.2. V kap. 4.3 nájdete druhy rozkladov používané v dvojrozmernom prípade. Prehľad vlastností filtrov používaných pri rozkladoch obrazu je uvedený v kap. 4.4

4.1 Rozšírenia signálu

Pri aplikáciách, kde je potrebné pracovať so signálom konečnej dĺžky - napríklad pri spracovaní obrazu, vzniká problém na začiatku a konci signálu. V kontexte subpásmového kódovania obrazu sa zaoberali v [52] rozšíreniami signálu za účelom návrhu analyzacej a syntetizacej časti FB s FIR aj IIR implementáciami. Výsledky sú smerodajné aj pre DWT implementovanú bankami filtrov.

Používané postupy riešenia sú nasledovné[7][18][52]:

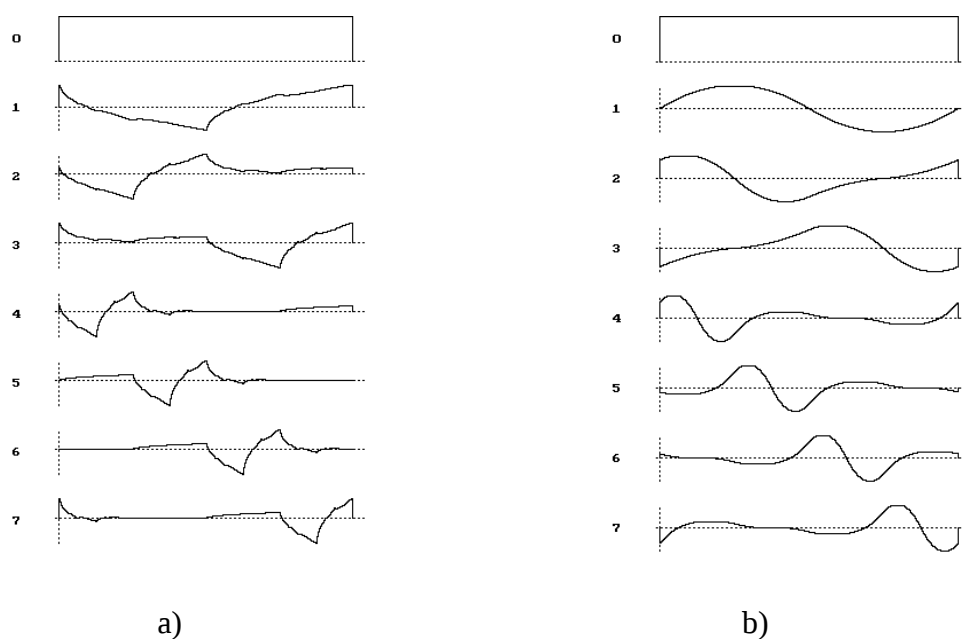
1. *doplňenie nulami* - vnáša diskontinuitu na okrajoch signálu
2. *periodifikácia signálu* - má za následok periodifikáciu analýzy s rôznym rozlíšením (MRA), čo je v praxi implementované kruhovou konvolúciou pri filtrovaní v čase. Výsledky sú lepšie ako v 1. prípade .
3. *symetrické rozšírenie* - je podmienené použitím filtrov s lineárnou fázou [23]. Nutné a postačujúce podmienky pri rôznych druhoch symetrií sú uvedené v [36].
S výhodou sa používajú pri implementáciách biortogonálnych baniek filtrov, kde zvyšujú zisk kódera.
4. *Priama extrapolácia*. Nepredpokladáme *žiadnu symetriu*, pričom okrajové hodnoty mimo hraníc signálu sa vyjadrujú pomocou transformačných koeficientov. V [22] sa uvažuje lineárna závislosť hraničných hodnôt, pričom vo všeobecnosti závislosť môže byť nelineárna, polynomická [21].
5. Netriviálne riešenie, ktoré využíva výhody spôsobu realizácie waveletového rozkladu bankou filtrov, je použitie špeciálnych modifikovaných hraničných filtrov pri filtrácii na okrajoch signálu. Existuje celý priestor ortogonálnych riešení hraničných filtrov, t.j. je pomerne veľký stupeň voľnosti pre optimalizáciu. Z hľadiska baniek filtrov je problematike venovaný priestor v [45].

4.2 Rýchla waveletová transformácia (FWT)

Jej základ tvorí implementácia rozkladu s rôznym rozlíšením (kap. 3.3) pomocou dvojpásmových baniek filtrov (kap. 2.1). Počet operácií je $O(L)$, t.j. FWT je asymptoticky rýchlejšia ako FFT, ktorá požaduje $O(L \cdot \ln L)$ operácií[21].

Pri analýze a syntéze v banke filtrov je signál konvolvovaný s impulzovými charakteristikami filtrov. V dôsledku použitia istého typu ošetrovania hraníc signálu (kap. 4.1) sú базовые funkcie deformované, t.j. poprekryvané. V prípade kruhovej konvolúcie (možnosť 2 v kap. 4.1) sú príklady базовых функций na Obr. 4.1 .

Nová metóda výpočtu je tzv. “lifting”schéma [53]. Môže zredukovať počet operácií pri FWT až na polovicu a to optimálnym využitím podobností medzi DP a HP filtrom.

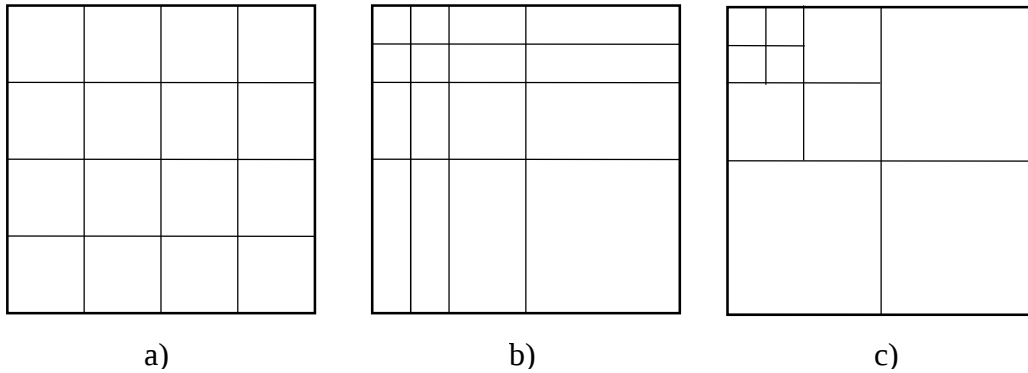


Obr 4.1 Príklad базовых функций при круговой конволуции
(Velkosť bázy je 256, zobrazených je len prvých 8 функций):
a) Daubechies 4 b) Brislawn (10,10)

4.3 Spôsob rozkladu obrazu

4.3.1 Separovateľné rozklady

Základné metódy používajú separovateľné rozklady - t.j. rozklady, kde sa používa separovateľné vzorkovanie. Obvykle sa používajú aj separovateľné filtre . Ak vzorkovanie aj filtre sú separovateľné, implementácia je veľmi efektívna, lebo rozklad sa môže realizovať kaskádou 1D prípadov (jednotlivé riadky a stĺpce). Nevýhodou je možnosť izolácie len obdĺžnikových častí spektra.



*Obr. 4.1 Rozloženie subpásiem pri rôznych typoch rozkladov
a) rovnomerný b) štandardný dyadický c) neštandardný dyadický
(smerom vpravo dole rastie vysokofrekvenčný obsah subpásiem)*

Najčastejšie používané rozklady sú:

- **Rovnomerný rozklad.** Pri subpásmovom kódovaní sa zvykne používať delenie signálu na rovnako veľké pásma ako je naznačené na Obr 4.2 a). Výsledná štruktúra pásiem je analogická pravidelnému stromu (Obr.2.2). Signál sa rekurzívne delí na štyri pásma LL, LH, HL, HH (L - Low, H - High) až po želanú úroveň. V implementácii pomocou dvoj pásmovej banky filtrov sa v jednej úrovni rozkladu obraz rozdelí na dve pásma v jednom smere (napr. po riadkoch) a potom v druhom smere znovu na dve pásma (po stĺpcoch).
- **Dyadický rozklad.** Je analogický 1D rozkladu uvedenému v kap. 3.5. V 2D prípade môže mať však 2 formy:
 - ♦ Štandardný dyadický rozklad
Pri tomto type sa vykoná úplný rozklad (až po zvolenú úroveň) najprv v jednom smere, napr. po riadkoch a potom v smere druhom. Rozloženie subpásiem ukazuje Obr.4.2 b), Obr.B.2. Bázové funkcie sú v tom prípade tvorené jednoducho tenzorovým súčinom 1D bázových funkcií :

$$\phi_0(u) \times \phi_0(v) \quad \phi_0(u) \times \psi_i(v) \quad \psi_j(u) \times \phi_0(v) \quad \psi_i(u) \times \psi_j(v) \quad (4.1)$$

kde $i, j = 1, 2, 3, \dots$

- ♦ Neštandardný dyadický rozklad

V tomto prípade sa namiesto tenzorového súčinu 1D bázových funkcií uvažuje tenzorový súčin ich analýz s viacnásobným rozlíšením (MRA) [15]. Keď definujeme funkciu mierky a tri základné wavelety nasledovne:

$$\begin{aligned} \phi\phi(x, y) &= \phi(x)\phi(y) & \psi\phi(x, y) &= \psi(y)\phi(x) \\ \phi\psi(x, y) &= \phi(x)\psi(y) & \psi\psi(x, y) &= \psi(y)\psi(x) \end{aligned} \quad (4.2)$$

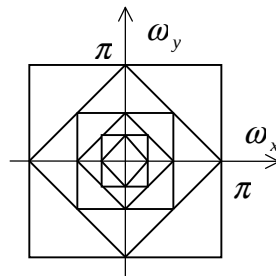
bázové funkcie sú potom tvorené uvedenou funkciou mierky a všetkými možnými posunmi a zmenami mierky základných waveletov. V praxi sa rozklad vykonáva nasledovne: obraz sa rozdelí na štyri pásma podobne ako pri

rovnomernom rozklade, pričom rekurzívne sa ďalej delí iba pásmo LL. Rozloženie subpásiem je na Obr.4.2 c) a v Prílohe B, Obr B.3.

Pri rozklade obrazu sa najviac používa neštandardný dyadický rozklad. Má menší počet potrebných operácií oproti štandardnému rozkladu, pričom po zaradení do kompresného systému poskytuje spravidla aj lepšie výsledky.

4.3.2 Neseparovateľné rozklady.

Z predpokladu rotačnej invariance spektra obrazu vyplýva, že separovateľné systémy nie sú najvhodnejšie na izolovanie DP a HP pásma. Dva najdôležitejšie systémy pre spracovanie obrazu sú založené na Quincunx [7] a hexagonálnom [7] vzorkovaní (kap. 2.3.1). Quincunx je tvarom spektra výhodný pre ľudský vizuálny systém, ktorý je citlivejší na horizontálne a vertikálne frekvencie ako na diagonálne. Túto vlastnosť využíva aj štandard HDTV. Quincunx schéma môže byť v DP kanáli iterovaná, pričom vedie ku frekvenčnej dekompozícii na Obr. 4.3.



Obr.4.3 Delenie spektra pri iterovanom Quincunx systéme

4.3.3 Adaptívna časovo - frekvenčná lokalizácia

Pri tomto spôsobe kompresie [42] sa namiesto klasického frekvenčne orientovaného prístupu pri waveletovom kódovaní navrhuje priestorovo - frekvenčné delenie, aby sa úplne využili výborné lokalizačné vlastnosti waveletov v oboch oblastiach. V praxi to znamená, že vstupný obraz rozdelíme na isté regióny (časové oblasti), kde urobíme samostatné rozklady, so samostatnou alokáciou bitov. Veľké časové bloky sú výhodnejšie na lokalizáciu vo frekvencii a malé bloky na lokalizáciu v čase.

4.3.4 Waveletové pakety

Nazývajú sa nimi ľubovoľné stromové štruktúry pri dekompozícii. Na rozdiel od klasickej waveletovej dekompozície používajúcej dyadické delenie iba DP výstupu banky filtrov, waveletové pakety umožňujú nájsť najvhodnejšiu stromovú štruktúru na reprezentáciu daného obrazu. To je ekvivalentné s hľadaním najlepšej bázy pre dané kritérium z množstva ponúkaných (Wickerhauser, Coifman, Meyer).

Na Obr.4.4 je znázornený príklad možného rozdelenia subpásom pri použití waveletových paketov. Je to analógia postupu nepravidelného tvorenia stromovej štruktúry - ako tomu bolo v 1D prípade (Obr.2.2 c). Hlavný rozdiel oproti DWT dyadickému rozkladu (kap. 3.5) je v tom, že je možné deliť aj diferenčné priestory W_i .

Delenie môže nastať pri splnení zvoleného kritéria. Keď optimalizujeme algoritmus v zmysle skreslenia a bitovej náročnosti, možno pre každý uzol do hĺbky K vyjadriť nákladovú funkciu

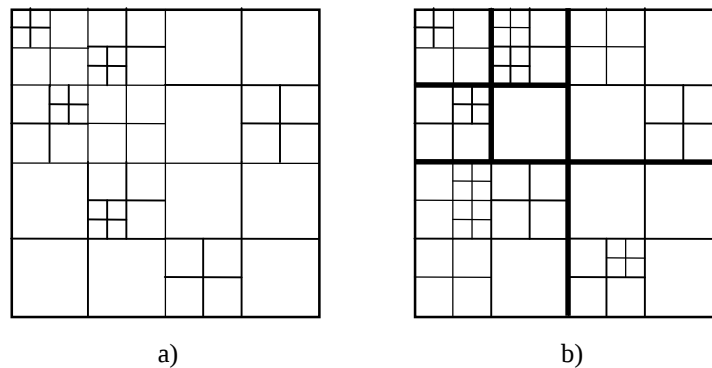
$$L(\lambda) = D + \lambda R \quad (4.3)$$

kde λ je Lagrangeov koeficient, D - skreslenie, R - bitová náročnosť.

Túto môžeme optimalizovať [7] podobne ako je tomu pri probléme alokácie bitov pri kvantizácii. Ak potom pre uzol r a jeho dvoch nasledovníkov c_1, c_2 v strome platí

$$L_r(\lambda) < L_{c_1}(\lambda) + L_{c_2}(\lambda) \quad (4.4)$$

tak sa strom v danom uzle už ďalej nedelí. V literatúre je najčastejšie nákladová funkcia počítaná na základe Shanonovej entropie [40].



Obr.4.4 Rozklad na subpásma použitím waveletových paketov
a) iba frekvenčné delenie b) frekvenčné aj časové delenie

Rozšírením tejto myšlienky je použitie aj časového delenia [42], t.j. v rôznych častiach obrazu je možné použiť rôzne waveletové pakety - analogicky, ako tomu bolo v kap. 4.3.3. Rozloženie subpásom je znázornené na Obr.4.4 (Hrubé čiary predstavujú delenie v čase a tenké vo frekvencii).

Podrobný popis metódy je uvedený v [7][16][40].

4.4 Požiadavky na filtre pri kódovaní obrazu

Pri kódovaní obrazu pomocou rozkladu na pásma, je dôležitých viacero, často protichodných požiadaviek. V ďalšom texte uvádzam ich krátky prehľad, pričom sa zameriavam na požiadavky na filtre pri implementácii DWT (požiadavky pri SBC sú menej prísne, lebo sa neuvažuje rekurzívna filtrácia, ako pri DWT.)

1. **Ortogonalita.** Ortogonálne filtre implementujú unitárne transformácie signálu do subpásim. V dôsledku zachovania energie platí potom pre celkové skreslenie

$$D = \sum_i D_i, \quad i - \text{pre všetky pásma} \quad (4.5)$$

v dôsledku čoho môžu byť použité optimálne algoritmy na alokáciu bitov.

2. **Kompakcia energie.** Nech $\mathbf{v}_x^2$ je variančná a $\mathbf{R}_{xx}$ kovariančná matica vstupných dát. Nech $\mathbf{v}_L^2$ a $\mathbf{v}_H^2$ sú disperzie DP a HP výstupov banky filtrov a impulzovú charakteristiku filtra vo vektorovom tvare. Potom:

$$\mathbf{v}_x^2 = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_L^2 + \mathbf{v}_H^2), \quad \mathbf{v}_L^2 = \mathbf{h}^T \mathbf{R}_{xx} \mathbf{h} \quad (4.6)$$

a zisk banky filtrov

$$G_{FB} = \frac{\mathbf{v}_x^2}{[\mathbf{v}_L^2 \mathbf{v}_H^2]^{1/2}} \quad (4.7)$$

Vidno, že maximalizácia $\mathbf{v}_L^2$ je dostatočná na maximalizáciu zisku.

Ak uvážime, že je bankou filtrov realizovaná transformácia, potom definujeme zisk transformačného kódovania

$$G_{TC} = \frac{\frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} \sigma_j^2}{\left(\prod_{j=0}^{M-1} \sigma_j^2 \right)^{1/M}} \quad (4.8)$$

kde M je počet pásiem a σ_j^2 disperzie jednotlivých pásiem.

G_{TC} udáva pomer rekonštrukčných chýb pri PCM kódovacej schéme a aktuálnom TC pri rovnakom objeme výstupných dát. Vzťah (4.8) platí za predpokladu ortogonalít banky filtrov. V [54] je uvedený vzťah pre prípad biortogonálny.

Vyšší zisk kódovania podmieňuje spravidla vyššia regularita filtrov.

3. **Aliasing energie.** Všetky ortogonálne metódy pre rozklad signálu zabezpečujú podmienky pre rušenie aliasingu. Ak sa však pri syntéze nepoužijú všetky subpásma, alebo v subpásmach je rôzny kvantizačný šum, bude rekonštruovaný signál naďalej obsahovať nežiadúce komponenty (dôsledok aliasingu). Optimálne riešenie má minimalizovať energiu aliasingu, danú vzťahom:

$$\sigma_A^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 S_{xx} |H(e^{j(\omega+\pi)})|^2 d\omega \quad (4.9)$$

kde S_{xx} je spektrálna hustota vstupu, $H(e^{j\omega})$ je prenosová funkcia filtra.

4. **Impulzová charakteristika filtra a "ringing" efekt.** Dobré oddelenie pásiem alebo vysoká regularita požaduje dlhé filtre. Ich nevýhodou je, že šíria kódovacie chyby, čo na hranách v obraze spôsobuje tzv. "zvonivý efekt" (dôsledok striedania znamienok v impulzovej charakteristike filtra). Hrany v obrázku môžu byť približne reprezentované jednotkovým skokom. Cieľom je minimalizovať rozdiel medzi jednotkovým skokom a odpoveďou filtra na jednotkový skok, t.j. minimalizovať chybovú funkciu

$$E_s = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^k [h(n) - 1]^2 \quad (4.10)$$

kde $h(n)$ je impulzová odpoveď filtra

Vzťah medzi odpoveďou na jednotkový skok a aliasingom je analogický vzťahu medzi rozlíšením v čase a frekvencii.

5. **Hornopriepustné filtre s nulovým priemerom impulzovej charakteristiky**

Najviac energie signálov používaných v praxi sa koncentruje okolo jednosmernej (JSM) zložky. Preto by praktické metódy rozkladu mali byť schopné reprezentovať JSM zložku len jednou bazovou funkciou. T.j. treba zabezpečiť, aby:

$$\sum_n (-1)^n h_1(n) = 0. \quad (4.11)$$

To je ekvivalentné podmienke, aby prenosová funkcia filtra mala aspoň jednu nulu pri $\Omega = \pi$, čo je zároveň aj nutnou podmienkou existencie regulárnych waveletov, t.j. na konvergenciu vzťahu (3.35).

6. **Dekorelované subpásma.** Kvalitná metóda rozkladu do subpásiem pre kódovacie aplikácie by mala poskytovať de Korelované subpásma. Mierou de Korelácie je kross-korelácia subpásiem v tvare

$$E\{y_L(n), y_H(n)\} = R_{LH}(0) = \sum_n \sum_l (-1)^l h(l) h(n-l) R_{xx}(n) \quad (4.12)$$

kde R_{xx} je autokorelačná funkcia vstupu, y_L, y_H sú signály na DP a HP výstupoch banky filtrov.

7. **Lineárna fáza.** Je dôležitá pri minimalizácii vizuálne rušivého fázového skreslenia na hranách v obraze. V dvojpásmových bankach filtrov s perfektnou rekonštrukciou je ju možno dosiahnuť iba pri zavedení konceptu biortogonalít. V ostatných prípadoch je pri optimálnom dizajne dôležitá miera nelinearity fázy definovaná ako

$$E_p = \sum_n [h(n) - h(2N-1-n)]^2 \quad (4.11)$$

8. **Zohľadnenie štatistiky vstupu.** Pre optimálny dizajn niektorých predchádzajúcich vlastností je nutné poznať autokorelačnú funkciu zdroja. Pre reálne obrazy je dostatočná

aproximácia autoregresívnym AR(1) modelom s korelačným koeficientom $\rho = 0.95$. Potom je autokorelačná funkcia daná:

$$R_{xx}(m) = \rho^m \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.12)$$

9. **Regularita.** Regularita (kap. 3.2) môže zvýšiť zisk kódovania a degradácia obrazu môže pôsobiť menej rušivo, t.j. pri rovnakom MSE je kvantizácia menej poznateľná ako pri menej regulárnych filtroch. Z analýzy (Rioul [47]) vyplýva, že istá regularita je potrebná, avšak ďalšie zvyšovanie regularity kompresiu podstatne nezlepšuje. V biortogonálnych systémoch (kap. 3.6, 3.7.2), nie je možné dosiahnuť regularitu pri analýze aj syntéze. V tomto prípade je lepšie použiť regulárnu syntézu, zabrániť tým tzv. *šachovnicovému efektu*.
10. **Posun subpásiem.** Pri waveletovom kódovaní sú zložky v jednotlivých subpásiem prislúchajúce jednej oblasti v pôvodnom obraze navzájom *poposúvané*, v závislosti od ich polohy. Je to v dôsledku vlastnosti, že DWT nie je invariantná voči časovým posunom. Tieto posuny záležia od použitého filtra.

V [37] sú uvedené objektívne aj subjektívne porovnania výkonnosti vyše 20 typov waveletov s lin. fázovou charakteristikou na kódovanie obrazu. Vyplýva z nich, že regularita nie je dôležitá v porovnaní s voľbou tvaru waveletu, použitého pre syntézu, ktorý určuje viditeľnosť kódovacích chýb.

V [41] sú navrhnuté filtre, ktoré nevytvárajú posun subpásiem. Návrh spočíva v tom, že sa vypočítajú koeficienty pre všetky kruhové posuny vstupných dát. Z nich sa následne vyberie najvhodnejšia reprezentácia pomocou vhodnej nákladovej funkcie. Ako príklad je uvedená aplikácia v geoakustike, kde podstatne redukuje MSE skomprimovaných dát. Filtre, ktoré nevytvárajú posun pásom sú takisto použité v FBI štandarde na kompresiu otláčkov prstov [41].

V [46] je uvedený prehľad a porovnanie (vzhľadom na regularitu, odpoveď na jednotkový skok a impulz) 4300 filtrov, prichádzajúcich do úvahy pre kódovanie obrazu (dĺžka filtra < 36), s možnosťou vybrať si vhodný typ na požadovaný typ aplikácie. Rioul [47] skúmal efekt regularity verus frekvenčná selektivita, z ktorej vyplýva, že regularita je viac smerodatná a to špeciálne pre filtre s krátkou imp. charakteristikou.

V [7] sú požiadavky zhrnuté: pre kódovanie obrazu treba relatívne krátke a "hladké" filtre s určitou regularitou.

V biortogonálnom prípade v [21] navrhujú voliť HP filtre s krátkou impulzovou charakteristikou kvôli minimalizácii "ringing" efektu a DP filtre naopak s dlhou impulzovou charakteristikou kvôli lepšej reprezentácii plochých regiónov v obraze.

Príklady aproximačných vlastností rôznych waveletových ortogonálnych filtrov pri reprezentácii obrazu obmedzeným počtom vzoriek po rozklade v banke filtrov sú v Prílohe B, Obr 8.4.

5 Subpásmové a waveletové kódovanie obrazu

Subpásmové (SBC) a waveletové kóдеры majú v poslednom čase narastajúcu popularitu najmä v oblasti kódovania obrazu. Ich opodstatnenie je už v samotnej psychofyziológii videnia, kde sa na processing v zrakovom nerve(cortex) najlepšie uplatňujú mnohokanálové modely [29]. Pod názvom *waveletové kódovanie* sa v súčasnosti rozumejú metódy tesne zviazané so subpásmovým kódovaním, pričom sú použité filtre špeciálne navrhované na istú regularitu. Hlavný rozdiel medzi nimi a pyramidálnym kódovaním je, že používajú kriticky vzorkovanú schému a často ortogonálnu dekompozíciu (kap. 3).

Úvod do kompresie obrazu pomocou subpásmového kódovania je uvedený napr. v [21]. Zovšeobecnenie subpásmového a waveletového rozkladu na 2D prípad je nenáročné, špeciálne v separovateľnom prípade [7]. Aplikácie na kompresiu obrazu sa stali populárnymi [28][34], pre farebný obraz [35] ako aj pre dvojúrovňový obraz [64]. Použitím Quincunxu [7] a hexagonálneho vzorkovania sa s výhodou uplatňujú aj neseparovateľné dekompozície. V [28] sú analyzované viaceré kompresné algoritmy.

Spojením fraktálovej a waveletovej kompresie sa zaoberajú autori v [39]. Pri fraktálovom kódovaní, ktoré je obvykle v časovej oblasti, vzniká blokový efekt. Navrhovaná koncepcia využíva vlastnosť podobnosti subpásiem, vzniknutých po waveletovej dekompozícii obrazu, pričom je založená na predikcii subpásiem s vysokofrekvenčným obsahom z nízkofrekvenčných subpásiem. Výsledkom je zníženie blokového efektu a zlepšenie MSE rekonštruovaného obrazu.

Waveletové kompresné postupy sú štandardizované pre kompresiu otláčkov prstov (*FBI fingerprint standard*) [21], kde zvíťazili nad konkurenčným algoritmom JPEG, ktorý zlyháva pri kompresiách 15:1 - 20:1 (príliš veľký blokový efekt).

5.1 Základné kompresné postupy

Prvá generácia kompresných postupov používajúcich DWT má väčšinou podobnú štruktúru ako transformačný kóder (Obr.1.1). Namiesto doprednej a spätnej transformácie sa používajú rozklady signálu bankami filtrov (kap. 2). Je pri tom možné použiť aj adaptívne metódy rozkladu (waveletové pakety, adaptívna časovo-frekvenčná lokalizácia). Vlastnosti filtrov použitých na rozklad sú diskutované v kap. 4.4. Špecifiká ďalších častí kompresného postupu sú uvedené v nasledujúcich častiach.

5.1.1 Kvantizácia a alokácia bitov

Všeobecné charakteristiky kvantizácie sú uvedené v kap. 1.1. Podľa [7] zmenou banky filtrov pre syntézu s ohľadom na použitý kvantizátor sa dajú odstrániť všetky chyby závislé od signálu, t.j. chyba rekonštruovaného signálu bude náhodná, nekorelovaná so signálom. Pri stredných a nízkych bitových rýchlostiach výstupu je vizuálny systém človeka

menej citlivý na vysoké frekvencie. Ak sa pásma nebudú starostlivo váhovať, dochádza k rozostreniu obrazu (blurring efekt). Preto je výhodné voliť viac kvantizačných úrovní pre nízke a stredné pásma na úkor pásiem vyšších [21]. Podľa [7] sa používajú dva základné prístupy kvantizácie:

- nezávislá kvantizácia subpásiem

Subpásma sú skutočne nezávislé len v prípade, ak je vstupom náhodná premenná gaussovského charakteru a filtre signál de Korelujú. Predpoklad nezávislosti je kvôli jednoduchosti. Pritom sa využívajú nasledovné vlastnosti:

- ◊ najnižšie pásmo má charakter pôvodného obrázku, t.j. môžu byť použité tradičné kódovacie metódy (DMCP,...)
- ◊ najvyššie pásma majú zanedbateľnú energiu, preto môžu byť zrušené bez evidentnej straty kvality obrazu

Ako kvantizátory sa môžu použiť:

1. Loydove kvantizátory
2. uniformné kvantizátory s tzv. "mrtvou zónou", ktorá mapuje originálne hodnoty na nulu
3. vektorové kvantizátory [32]
4. adaptívne kvantizátory - rozlišujú dôležité a nedôležité regióny v subpásmach. Dôležitá úvaha pri tom je relatívna dôležitosť rôznych subpásiem, čo vedie k váhovaniu MSE pre rôzne subpásma.

- kvantizácia pozdĺž pásma

Je založená na tom, že pásma nie sú nezávislé a môže sa teda použiť vektorová kvantizácia medzi pásmami namiesto vnútri pásiem. Problém je v tom, že pokiaľ napr. hrana je v subpásmach vizuálne zachovaná, presné hodnoty v rôznych pásmach silne závisia na polohe hrany a teda je ich ťažko predikovať z pásma do pásma. Pomoc pri riešení predstavuje voľba filtrov uvedená v kap. 4.4.

Porovnanie kvantizačných techník používaných v TC a SBC obrazu ako skalárne kvantovanie, pyramidálne vektorové kvantizátory (VQ), váhované pyramidálne VQ, zovšeobecnené VQ, je uvedené v [44].

Kvantizácia môže byť riadená algoritmom alokácie bitov, ktorej cieľom je optimálne prerozdeliť pásmam daný objem bitov. Ak sú filtre ortogonálne, môžu sa použiť štandardné metódy alokácie bitov, kde celkové skreslenie je sumou skreslenia v subpásmach. Riešenia, vrátane optimálnych sú uvedené v [1], [2], [3],[21].

Podľa [21] môžeme uvažovať riešenie alokácie bitov s kritériom minimalizácie kvantizačného skreslenia použitím uniformného kvantizátora. Pre danú priemernú bitovú náročnosť R_c zistíme optimálne priradenie bitov pásmam. Nech:

- | | |
|--|---|
| N - počet bitov originálneho obrazu | b_k - počet bitov vzorky k-teho pásma |
| M - počet pásiem | σ_k^2 - disperzia pásma |
| $\alpha_k = N_k / N$ relatívna veľkosť pásma | w_k - váhovací koeficient (vizuálne) |

Potom

$$b_k = \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{2w_k \sigma_k^2 \log_e 2}{\tilde{\lambda}} \right) \quad (5.1)$$

kde
$$\tilde{\lambda} = 2^{\left[\sum_{k=1}^M \alpha_k \log_2 \left((2 \log_e 2) w_k \sigma_k^2 \right) - 2 R_c \right]} \quad (5.2)$$

Pre malé R_c a pre pásma s malou disperziou môže vyjsť b_k záporné. V tom prípade sú tieto pásma vynechané a výpočet je treba zopakovať. Iteračný algoritmus je:

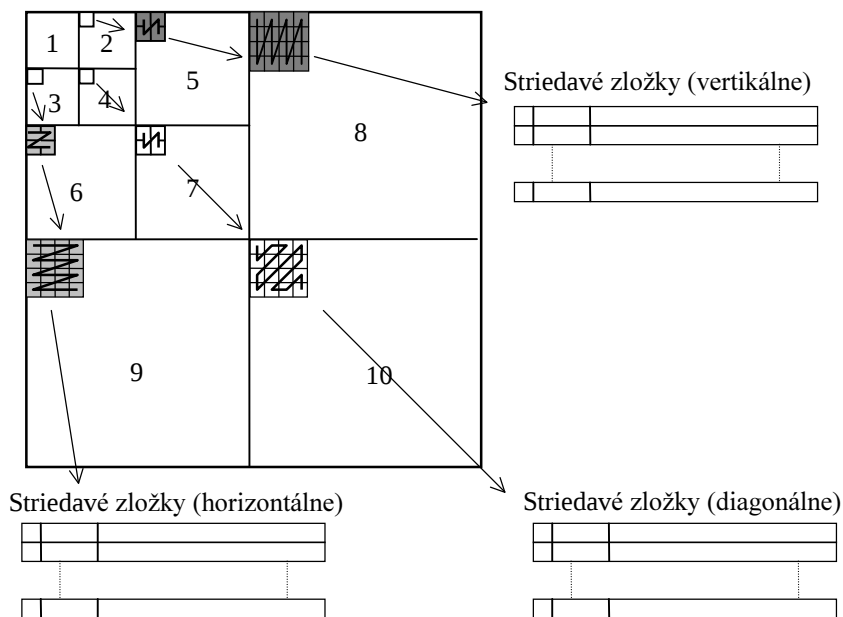
1. Pomocou (5.1) zisti priradenie bitov pásmam b_k
2. Zredukuj počet pásiem (pre negatívne b_k odstráň príslušné pásmo)
3. Nastav nové $R_c = \sum_{k=1}^M a_k b_k$. Opakuj krok 1 pokiaľ $\forall k ; b_k \geq 0$

Kvantizačný krok sa potom priradzuje jednotlivým pásmam podľa zisteného b_k .

5.1.2 Načítavanie koeficientov a entropický kóder

Aby sme využili vlastnosť DWT, je výhodné použiť načítavanie koeficientov podľa Obr.5.1. Pritom sa využíva korelácia medzi pásmami, ktoré sú vzájomnými aproximáciami pri rôznych mierkach (napríklad pásma 2,5,8).

Na získané sekvencie striedavých koeficientov sa potom aplikuje Run-Lenght kód, použitím EOB stratégie s následným Huffmanovým kódom. Podobný postup bol použitý aj pri JPEG štandarde.



Obr. 5.1: Načítavanie koeficientov pri DWT

Problém voľby entropického kódera súvisí s voľbou načítavania koeficientov a je analogický ako v kap. 1.1. Ak sa v kódovacom postupe použije načítavanie podľa Obr 5.1 výsledný kóder sa zvykne nazývať “baseline” kóder. Používajú sa rôzne modifikácie Huffmanovho kódu, napr. vektorový Huffmanov kód. Takisto sa používajú aj adaptívne entropické kódy - kvôli zmene štatistiky obrazu.

Ako príklad je v Prílohe B (Obr. B.1) uvedené porovnanie waveletového kompresného postupu WBC (wavelet baseline coder) s JPEG štandardom.

5.2 Pokročilé kompresné metódy

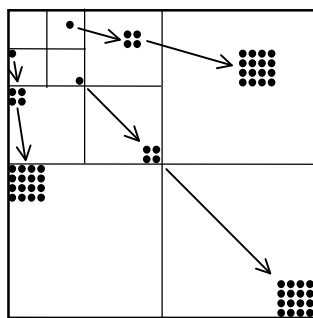
5.2.1 Metódy založené na wavelet maxime

Sú nazývané aj ako *druhá generácia* waveletových kóderov. Princípom je, že sa snažia extrahovať a zachovať isté charakteristiky obrazu, ktoré považujú za smerodajné. Keďže hrany v obrázkoch sú kritické pre ich vnímanie, je tu silná motivácia najst' kompresné schémy, ktoré obsahujú hrany ako hlavné informácie. Týmto spôsobom pracuje algoritmus Mallata a Zhonga [6], ktorý je založený na kódovaní obrazu pomocou maxím v reprezentácii signálu, transformovaného waveletovou transformáciou.

Použitá dekompozícia je redundantná a aproximuje spojitú waveletovú transformáciu. Ak je DP filter navrhnutý na detekciu hrán, dostávame po transformácii reprezentáciu hrán vo všetkých mierkach pomocou zvolených maxím a miním. Rekonštrukcia sa vykonáva pomocou iteračných procedúr založených na striedavých projekciách do konvexných množín a je možná vďaka použitiu redundantnej reprezentácie signálu. Algoritmus je výpočtovo náročný, najmä kvôli iteračným algoritmom rekonštrukcie. Ak sa v obraze vyskytujú textúry, je nutné ich oddelené kódovanie. Podrobnejší popis metódy sa dá nájsť v [6][29].

5.2.2 Stromy núl (zero trees)

Pre väčšinu obrazov s klesajúcim spektrom je nepravdepodobný výskyt významnej energie vo VF časti spektra, ak v tom istom regióne v NF pásme je energie málo. Tieto pozorovania vedú k metóde pre waveletové kódovanie s názvom “zero trees”, ktorá je alternatívou k zig-zag naberaniu koeficientov a EOB stratégii (JPEG). Hlavná myšlienka spočíva v definovaní stromu núl taktiež nulovým koreňom, označeným EOB symbolom. Vidíme, že počet núl v strome rastie s mocninou 4.



Obr. 5.2 Príklad rozloženia stromov núl v subpásmach pri EZW kóderi

Spojením s kódovaním bitových rovín vzniká tzv. EZW algoritmus (Shapiro [49]). Koeficienty môžu byť označené ako korene stromu, keď sú nevýznamné vzhľadom k danému prahu T , t.j. $|x| < T$. Predpoklad je, že aj všetky nasledovné body v strome budú nevýznamné. Pri kódovaní sa postupuje z nižších pásiem do vyšších, pričom sa vynechávajú oblasti už stromu priradené. Podrobnejší popis metódy je uvedený napr. v [7], [49].

6 Záver

Kompresia obrazu použitím waveletov sa javí ako perspektívny spôsob stratovej kompresie obrazu. Špeciálne to platí pre oblasť stredných a vysokých kompresíí, kde JPEG štandard zlyháva v dôsledku veľkého blokového efektu. Niektoré nové kompresné postupy ako napr. fraktálové kompresné postupy taktiež nevykazujú (pre obraz s bežnou štatistikou) dostatočný výkon. Medzi hlavné výhody kompresie pomocou waveletov patrí aj zavedenie konceptu rôzneho rozlíšenia obrazu, ktorý predstavuje najvhodnejší spôsob reprezentácie obrazu vzhľadom na ľudský vizuálny systém.

Táto práca sa zaoberala popisom waveletovej transformácie, jej pôvodom a vzťahom k aparátu používanom v kontexte DSP a konkrétnymi spôsobmi implementácie v transformačných kódéroch pre kompresiu obrazu. V prvej kapitole je ukázaný vzťah waveletov k bankám filtrov a k ortogonálnym transformáciám. Taktiež je zhrnutý klasický transformačný kompresný postup. V druhej kapitole sú popísané banky filtrov s dôrazom na časti tesne sa týkajúce waveletov. V tretej kapitole je spracovaný úvod do waveletovej teórie s uvedenými linkami vedúcimi k bankám filtrov. Zároveň je uvedený prehľad používaných typov waveletov s dôrazom na ortogonálne a biortogonálne wavelety. Vo štvrtej kapitole sú popísané praktické spôsoby realizácie waveletovej transformácie, pričom priestor je venovaný najmä typom rozkladov používaných pri spracovaní obrazu a analýze vlastností potenciálne pozitívnych filtrov. V piatej kapitole je uvedený prehľad v súčasnosti používaných kompresných postupov využívajúcich WT, prípadne analogické postupy so zachovaným konceptom rôzneho rozlíšenia.

Súčasný trendy v kompresii obrazu jednoznačne rátajú so zachovaním konceptu rôzneho rozlíšenia, ktorý je implicitne podporovaný waveletovými kompresnými postupmi. Tieto trendy sú silne podmienené vývojom v teoretickej matematike (vývoj nových skupín waveletov so špecifickými vlastnosťami, formalizácia aparátu, ...) a aj stavom a požiadavkami existujúcich DSP technológií. Zahrňujú najmä oblasti :

- ♦ vývoj týkajúci sa samotnej transformácie
 - návrh a optimalizácie waveletových filtrov (viacrozmerné wavelety, komplexné filtre, filtre pre wavelety na intervale, filtre netvoriace priestorový posun pásem ...)
 - vývoj neštandardných postupov na rozklad signálu (waveletové paketové transformácie, optimalizácie rozkladu s hľadiska časovo - frekvenčného delenia, ...)
 - návrhy ošetrovania hraníc vstupného signálu (wavelety na intervale, rôzne rozšírenia signálu)
 - hľadanie nových metód za istých podmienok urýchľujúcich výpočet WT (napr. lifting schéma)
 - vývoj a aplikácie multiwaveletov, semiortogonálnych waveletov, vektorových baniek filtrov
- ♦ vývoj kompresných postupov ako celku

- vývoj postupov zameraných na následné stupne kvantizátora a entropického kódera pričom sa používajú rôzne prídavné dátové manipulácie, najmä zmena spôsobu načítavania (EZW algoritmus, “baseline” algoritmus, ...).
- kompresné postupy extrahujúce dôležité črty v obraze s ich adekvátnym kódovaním
- kombinácie waveletových kompresných postupov s inými používanými postupmi (wavelety - fraktály, wavelety - neurónové siete)

V ďalšej práci by som chcel sledovať uvedené trendy s dôrazom na transformáčnú časť kódera. Okruhy práce môžem formulovať nasledovne:

- Skúmanie vzťahov medzi rôznymi typmi waveletovej transformácie a klasickými ortogonálnymi transformáciami.
- Zaviesť viac stupňov voľnosti do samotnej transformácie pri zachovaní (aspoň približného) konceptu rôzneho rozlíšenia podobne ako je tomu napr. pri multiwaveletoch a semiortogonálnych waveletoch. Získať čo najviac z prípadnej neortogonalita transformácie.
- Na nedeckorelované spektrá navrhnúť štatisticky čo najprispôsobenejšie kódery.
- Skúmať vplyv metód preprocessingu a následného postprocessingu, prípadne iné prídavné manipulácie s dátami za účelom čo najlepšej kompresie (napr. aplikovať princíp Burrows - Wheelerovho algoritmu na triedenie blokov, ...).

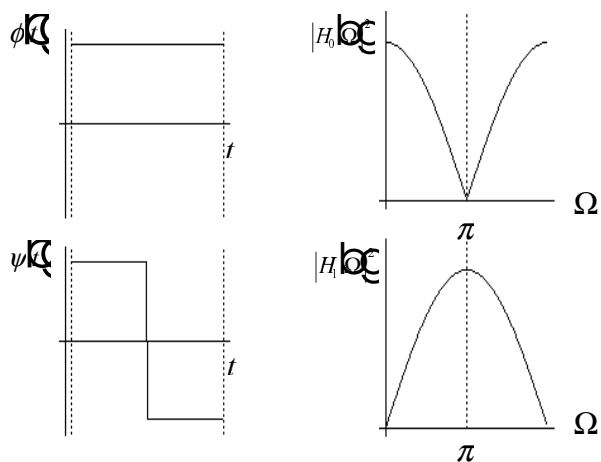
7 Zoznam použitej literatúry

- [1] Pratt,W.,K.: Digital Image Processing, John Wiley & Sons, New York, 1978.
- [2] Rosenfeld, A., Kak, A., C.: Digital Picture Processing, Vol. I, Academic Press, London, 1982 .
- [3] Gersho,A., Gray, R.M.: Vector quantization and signal compression, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1992.
- [4] Akanasu, A.N., Haddad, Richard, A.: Multiresolution signal decomposition, Academic press, 1992.
- [5] Fischer, Y., editor: Fractal Image compression, Springer-Verlag, 1994.
- [6] Chui, Charles, K.: An introduction to wavelets, Academic press, New York, 1992.
- [7] Vetterli, M., Kovačević, J.: Wavelets and Subband Coding, Prentice Hall, 1995.
- [8] Chui, Charles, K. editor: Wavelets: A tutorial in Theory and Applications, Academic Press, 1992.
- [9] Cohen, A.: Wavelets and multiscale Signal processing, Chapman & Hall, 1995.
- [10] Newland, D.E.: An introduction to Random vibrations, spectral and wavelet analysis, Longman Scientific & Technical, 1993.
- [11] Kaliský, R.: Wavelet analýza signálov, diplomová práca na KTL FEI STU, 1992.
- [12] Erlenbacher, G., editor: Wavelets: theory and applications, Oxford University Press, 1996.
- [13] Benedetto, J., Frazier, M., W.: Wavelets: mathematics and applications, CRC, 1994.
- [14] Meyer, Y.: Wavelets: algorithms and applications, SIAM, 1993.
- [15] Daubechies, I.: Ten lectures on wavelets, SIAM, 1992.
- [16] Ruskai, M., B.: Wavelets and their applications, Jones and Barlett, Boston-London, 1992.
- [17] SIGGRAPH '95 Course Notes: Wavelets and their Applications in Computer Graphics, organized by Fournier, A., University of British Columbia, Preprint.
- [18] Jawerth, B., Sweldens, W.: An overview of wavelet based multiresolution analyses, Preprint.
- [19] Polec, J., Pavlovičová J., Oravec, M.: Vybrané metódy kompresie dát, Faber, Bratislava 1996.
- [20] Kotuliaková, J., Rozinaj, G.: Číslíkové spracovanie signálov I, Faber, Bratislava 1996.
- [21] Strang, G., Nguyen, Truong.: Wavelets and Filter Banks, Wellesley-Cambridge Press, 1996.
- [22] Bradley, Jonathan, N., Faber V.: Perfect Reconstruction with Critically Sampled Filter Banks and Linear Boundary Conditions IEEE transactions on signal processing, Vol. 43, april 1995.
- [23] Brislawn, Ch., N.: Preservation of Subband Symmetry in Multirate Signal Coding, IEEE transactions on signal processing, Vol 43, december 1995.
- [24] Xia, Xiang-gen, Suter, B., W.: Vector-Valued Wavelets and Vector Filter Banks, IEEE Transactions on signal processing, Vol. 44, marec 1996.
- [25] Xia, Xiang-gen, Geronimo, J., S., Hardin, P., Suter, B., W.: Design of Prefilters for Discrete Multiwavelet Transforms, IEEE Transactions on signal processing, Vol. 44, januar 1996.

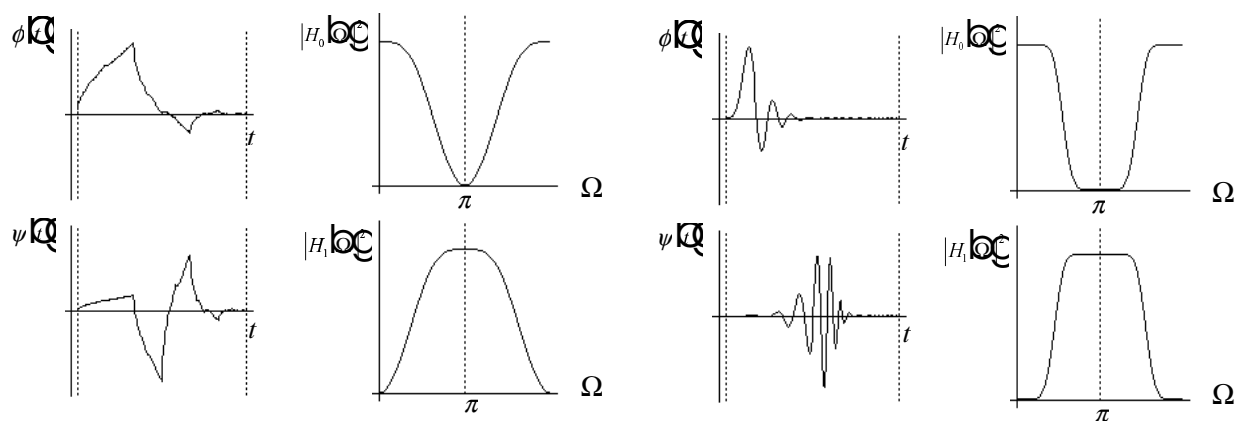
- [26] Herley,C., Vetterli,M.: Wavelets and Recursive Filter Banks, IEEE Transactions on signal processing, Vol. 41, August 1993.
- [28] De Vore,R.,A. Jawerth B. Lucier B.,J.: Image compression Through Wavelet Transform Coding, IEEE transaction on Information theory, Vol. 38, maret 1992
- [29] Mallat,S.,G.: Multifrequency Channel Decompositions of Images and Wavelet Models, IEEE Transactions on Acoustic, speech, and signal processing, Vol. 37, december 1989.
- [32] Barlaud,M., Sole,Patrick., Gaidon,T., Antonini,M., Mathieu,P.: Pyramidal Lattice Vector Quantization for Multiscale Image Coding, IEEE Transactions on image processing, Vol.3, jul 1994.
- [33] Gubner,A.,John, Chang Wei-Bin: Wavelet transforms for discrete-time periodic signals, Signal processing, Vol 42, 1995,167-180.
- [34] Argenti F., Cappellini,V., Benelli,G., Venetsanopoulos,N.: IIR implementation of piecewise polynomial wavelet representation with application to image coding, Signal processing, Vol. 39, 1994, 333-346 .
- [35] Kim,,C.,S., Smith M.,J.,T., Mersereau,R.,M.: Two-Stage Multirate coding of Color Images, Signal processing:Image Communication, Vol. 2, 1990, 79-89.
- [36] Kiya,H. Nishikawa,K. Iwahashi M.: A development of symmetric Extension Method for Subband Image Coding, IEEE transactions on signal processing, Vol. 3,january 1994.
- [37] Da Silva,E.,A.,B., Ghanbari,M.: On the Performance of linear Phase Wavelet Transforms in Low Bit-Rate Image Coding, IEEE transactions on image processing, Vol. 5, may 1995.
- [38] Belzer,B.m Lina Jean-Marc, Villasenor,J.: Complex, Linear-Phase Filters for Efficient Image Coding, IEEE transactions on signal processing, Vol. 43. October 1995.
- [39] Krupnik,H., Malah D., Karnin E.: Fractal representation of Images via the discrete wavelet transform, Preprint.
- [40] Coifman R.,R., Wickerhauser M.,V.: Entrophy-Based Algorithms for Best Basis Selection, IEEE Transaction on Information theory, Vol. 38, maret 1992.
- [41] Goh,S.,S.: Displacement in wavelet decomposition of images, Signal Processing, Vol. 44, 1995.
- [42] Wong,P.,W., Noyes,S.: Space-Frequency Localized Image compression, IEEE Transactions on image processing, Vol. 3, May 1994.
- [43] Tsatsanis,M.,K., Giannakis G.,B.: Principal Component Filter Banks for Optimal Multiresolution Analysis, IEEE Transactions on signal processing, Vol. 43, august 1995.
- [44] Blain M.,E., Fischer,T.,R: A comparison of vector quantization techniques in transform and subband coding of imagery, Signal Processing: Image Communication, Vol. 3, 1991, 91-105.
- [45] Herley,C., Vetterli,M.: Orthogonal Time-Varying Filter Banks and Wavelet Packets, IEEE Transactions on signal processing, Vol.42, october 1994.
- [46] Villasenor J.,D., Belzer,B., Liao,J.: Wavelet filter evaluation for Image compression, IEEE Transactions on image processing, Vol.4, august 1995.
- [47] Rioul,O.: Regular wavelets: A discrete-Time Approach, IEEE Transactions on signal processing,, Vol. 41, december 1993.

- [48] Herley,C., Kovačević,J., Ramchandran,K., Vetterli,M.: Tilings of the Time-Frequency Plane: Construcion of Arbitrary Orthogonal Bases and Fast Tiling Algorithms, IEEE Transactions on signal processing, Vol. 41, december 1993.
- [49] Shapiro J.,M.: Embedded Image Coding Using Zerotrees of Wavelet Coefficients, IEEE Transactions on signal processing, Vol. 41, december 1993.
- [50] Averbuch,A., Lazar,D., Izraeli,M.: Image Compression Using Wavelet Transform and Multiresolution Decomposition, IEEE Transactions on image processing, Vol.5 january 1996.
- [51] Woods,J.,W., O'Neil,S.: Subband Coding of Images, IEEE transaction on Acoustic, speech, and signal processing, Vol. 34, oktober 1986.
- [52] Smith,Mark J.,T., Eddins, Steven L.: Analysis/Syntesis Techniques for subband Image Coding, IEEE Transactions on Acoustic, speech, and signal processing, Vol. 38, august 1990.
- [53] Sweldens WIM.: Wavelets and Lifting scheme : A five Minute Tour, Preprint.
- [54] Desarte,P., Macq,B.: Signal-Adapted Multiresolution Transform for Image Coding, IEEE Transaction on information theory, Vol. 38, No. 2, march 1992.
- [55] Hudecova, M., Polec, J., Vargic, R.:Discrete Orthogonal Transforms in Homomomorphic Filtering of Image, Image processing and Neural Networks '93, Conference with International Participation, Liptovsky Mikulas, 1993
- [56] Polec, J., Vargic, R.: Decreasing of Information Redundance n-dimensional Signal with $(n+1)$ - dimensional Discrete Orthogonal Transform, International Conferance on Digital Signal Processing '93, Kosice, 1993
- [57] Polec, J., Pavlovicova J., Vargic, R.:New ordering sequences and bases Functions of Discrete Fourier and Discrete Hartley Transforms for Transforms Coders, International Workshop on Image Processing, June 1994, Journal on Communications, Vol.XLV, July - August 1994, Budapest, 1994, 75-76
- [58] Vargic, R.:Kompresia obrazu pomocou ortogonálnych a biortogonálnych waveletových transformácií, Zborník súťažných prác Druhého ročníka Slovenkso - Českej súťaže Nadácie Jozefa Murgaša pre telekomunikácie, Bratislava 1996
- [59] Polec, J., Vargic, R.: Interpolative Methods with Orthogonal Transforms for Image, Proceedings of 2nd International Workshop of TEMPUS-TELECOMNET Project, Smolenice, February 1997, Editing

Príloha A

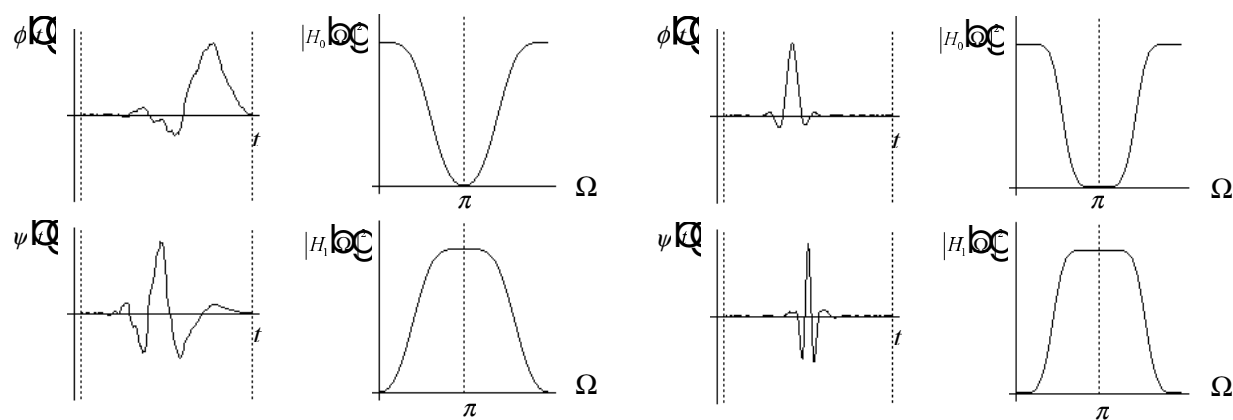


a) Haar



b) Daubechies 4

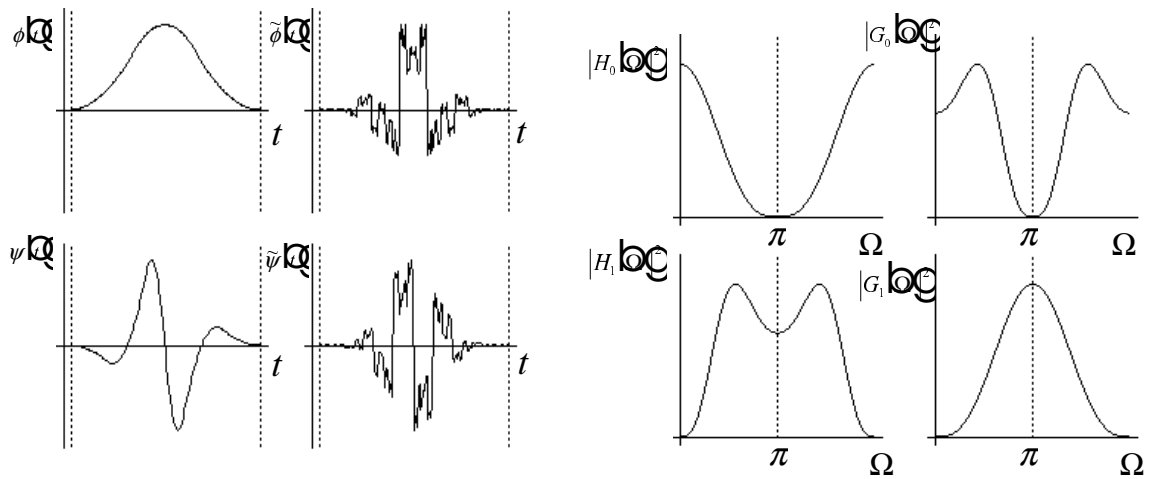
c) Daubechies 20



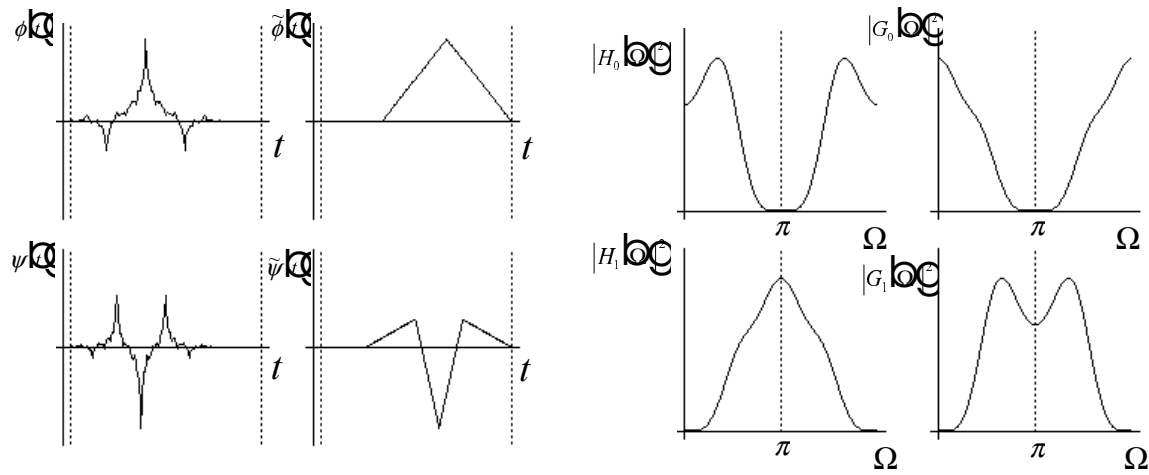
d) Coiflet 6

e) Coiflet 18

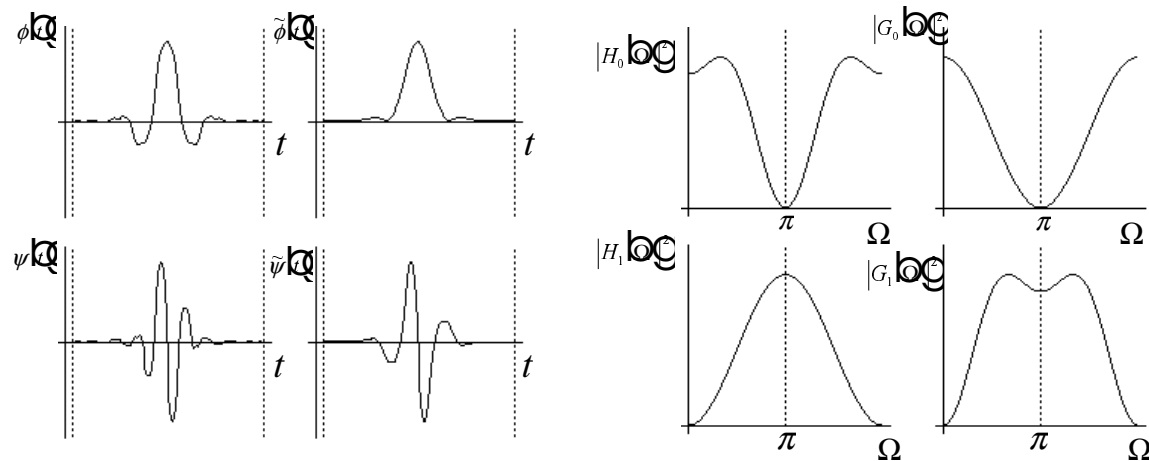
Obr A.1 Príklady ortogonálnych waveletov, ich funkcií mierky a prenosových funkcií filtrov odpovedajúcej banky filtrov (pozri Tab.A.1)



b) Spline (4,8)



c) Spline(6,4)



c) Brislawn(10,10)

Obr A.2 Príklady biortogonálnych waveletov, funkcií mierky, ich duálov a prenosových funkcií filtrov odpovedajúcej banky filtrov (pozri Tab.A.2)

Typ filtra	$h_0(n)$
Haar	0.7071067812 0.7071067812
Daubechies 4	0.4829629131445341, 0.8365163037378077, 0.2241438680420134, -0.1294095225512603
Daubechies 20	0.026670057901, 0.188176800078, 0.527201188932, 0.688459039454, 0.281172343661, -0.249846424327, -0.195946274377, 0.127369340336, 0.093057364604, -0.071394147166, -0.029457536822, 0.033212674059, 0.003606553567, -0.010733175483, 0.001395351747, 0.001992405295, - 0.000685856695, -0.000116466855, 0.000093588670, -0.000013264203
Coiflet 6	0.0385807777, -0.1269691254, -0.771615555, 0.6074916414 0.7456875589 0.2265842652
Coiflet 18	-0.0016918510194918, -0.00348787621998426, 0.019191160680044, 0.021671094636352, -0.098507213321468, -0.056997424478478, 0.45678712217269, 0.78931940900416, 0.38055713085151, -0.070438748794943, -0.056514193868065, 0.036409962612716, 0.0087601307091635, -0.011194759273835, -0.0019213354141368, 0.0020413809772660, 0.00044583039753204, -0.00021625727664696

Tab A.1 Koeficienty impulzových charakteristik filtrov pre vybrané ortogonálne waveletov

Spline (4,8)	$h_0(n)$	0.1767766953, 0.5303300859, 0.5303300859, 0.1767766953
	$\tilde{g}_0(n)$	0.0662912607, -0.1988737822, -0.1546796084, 0.9943689110, 0.9943689110, -0.1546796084, -0.1988737822, 0.0662912607
Spline (6,4)	$h_0(n)$	-0.1767766953, 0.3535533906, 1.0606601718, 0.3535533906, -0.1767766953, 0.0
	$\tilde{g}_0(n)$	0.0, 0.3535533906, 0.7071067812, 0.3535533906
Brislawn (10,10)	$h_0(n)$	0.026913419, -0.032303352, -0.241109818, 0.054100420, 0.899506092, 0.899506092, 0.054100420, -0.241109818, -0.032303352, 0.026913419
	$\tilde{g}_0(n)$	0.019843545, 0.023817599, -0.023257840, 0.145570740, 0.541132748, 0.541132748, 0.145570740, -0.023257840, 0.023817599, 0.019843545
Villasenor (9,7)	$h_0(n)$	3.782845550699535e-02, -2.384946501937986e-02, -1.106244044184226e-01, 3.774028556126536e-01, 8.526986790094022e-01, 3.774028556126537e-01, -1.106244044184226e-01, -2.384946501937986e-02, 3.782845550699535e-02
	$\tilde{g}_0(n)$	-6.453888262893856e-02, -4.068941760955867e-02, 4.180922732222124e-01, 7.884856164056651e-01, 4.180922732222124e-01, -4.068941760955867e-02, -6.453888262893856e-02
Antonini (9,7)	$h_0(n)$	3.782845550699535e-02, -2.384946501937986e-02, -1.106244044184226e-01, 3.774028556126536e-01, 8.526986790094022e-01, 3.774028556126537e-01, -1.106244044184226e-01, -2.384946501937986e-02, 3.782845550699535e-02
	$\tilde{g}_0(n)$	-6.453888262893856e-02, -4.068941760955867e-02, 4.180922732222124e-01, 7.884856164056651e-01, 4.180922732222124e-01, -4.068941760955867e-02, -6.453888262893856e-02

Tab A.2 Koeficienty impulzových charakteristik filtrov pre vybrané biortogonálne wavelety

Príloha B

a) Originál "Nella.pic", 8 bpp,
velkosť 256x256 (65536 B)

b)WBC: MSE 39.55
CR 20:1 (3278 B)

b)WBC: MSE 119.17
CR 65:1 (1010 B)

b)WBC: MSE 170.8
CR 102:1 (643 B)

*Obr B.1: Výsledky kompresie obrazu pomocou waveletov a porovnanie s JPEG.
Pozn.: bpp - počet bitov na bod, CR - kompresný pomer, v zátvorke je velkosť
výstupu v bytoch, WBC - Wavelet Baseline Coder 3.0 (G. Davis 1996) používajúci
biortogonálne wavelety, "baseline" algoritmus načítavania, algoritmus optimálnej
alokácie bitov a aritmetický kóder.*

b) JPEG 5.2 (volby: quality 15,
optimize, baseline, dct float)
CR 21:1 (3182 B)

b) JPEG 5.2 (volby: quality 4,
optimize, baseline, dct float)
CR 58:1 (1137 B)

*Obr.B.2: Štandardný diadický rozklad
použitím Daubechies 4 waveletu*

*Obr.B.3: Neštandardný diadický rozklad
použitím Daubechies 4 waveletu*

a) Haar

b) Daubechies 4

c) Coiflet 18

d) DCT

*Obr. B.4: Degradácia obrazu pri orezaní 95 % spektrálnych koeficientov pre vybrané
ortogonálne wavelety a Diskrétnu kosínusovú transformáciu*