Operácie v SRT a) decimácia b) interpolácia

Decimácia $$y(n)=\sum_k h(Mn-k)u(k)$$

Interpolácia $$v(n)=\sum_k g(n-Mk)x(k)$$

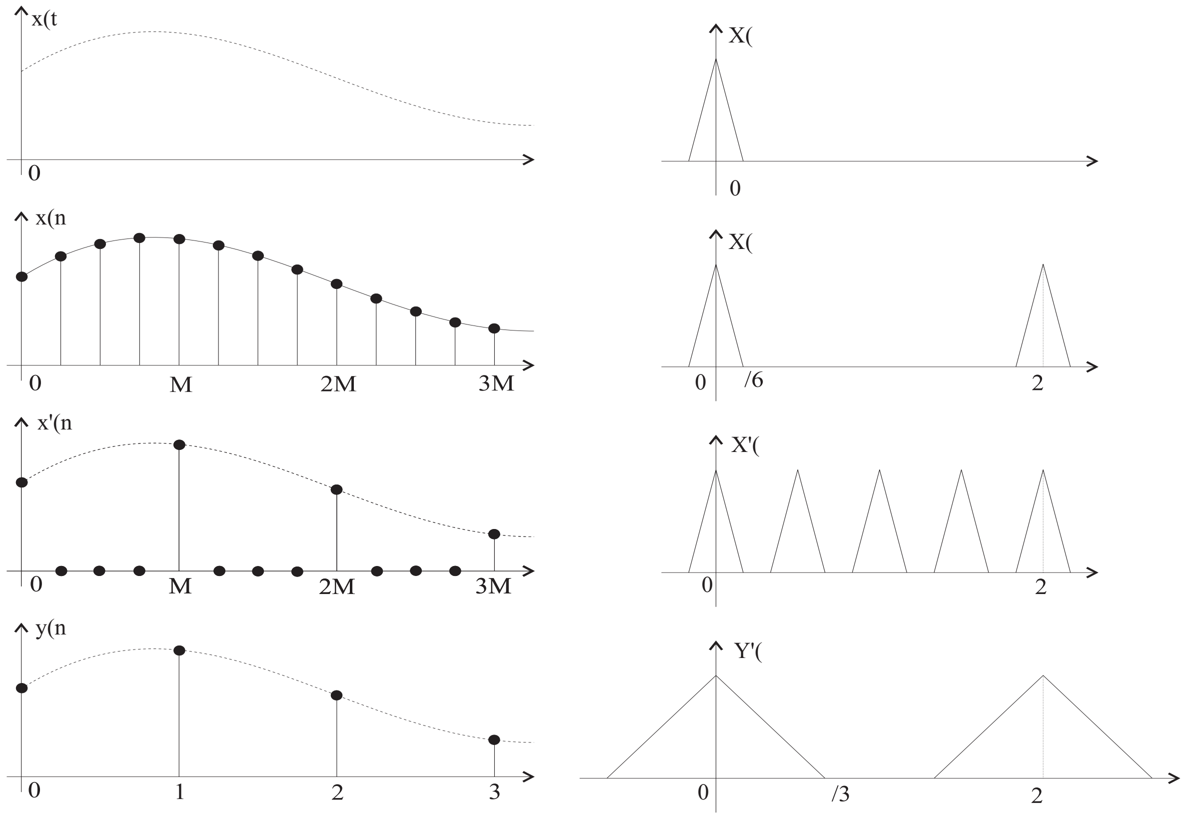
Podvzorkovanie signálu

$$y(n)=x(Mn)$$

A) $$X'(z)=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}X\left(zW^k\right) \qquad X'(\Omega)=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}X\left(\Omega-\frac{2\pi}{M}k\right),\ W=e^{-j2\pi/M}$$

B) $$Y(z)=\sum_{k=-\infty}^{k}x'(k)\left(z^{\frac{1}{M}}\right)^{-k}=X'\left(z^{\frac{1}{M}}\right)$$

$$Y(z)=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}X\left(z^{\frac{1}{M}}W^k\right) \qquad Y(\Omega)=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}X\left(\frac{\Omega-2k\pi}{M}\right)$$



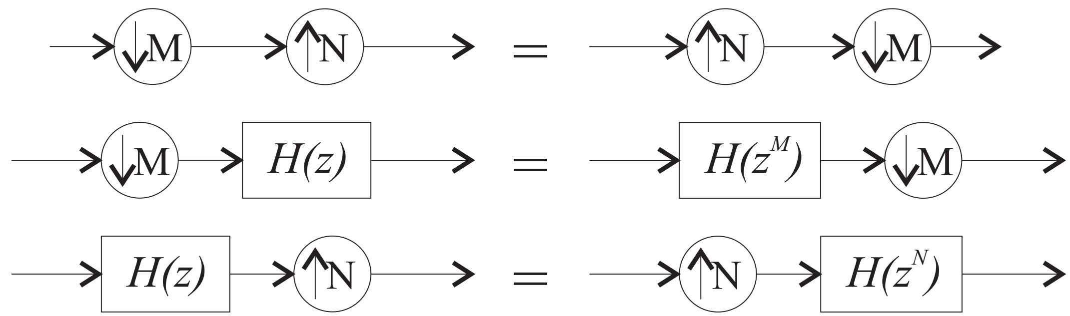
Proces podvzorkovania $x(n)$

Nadvzorkovanie signálu.

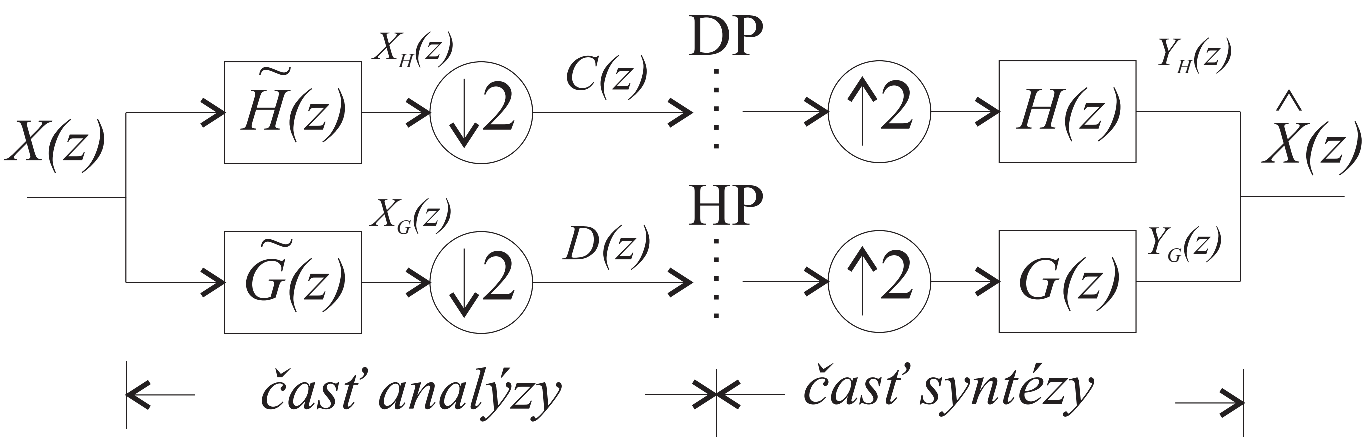
$$y(n) = x(n/M) \qquad Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n/M) z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{k} x(k)\left(z^{M}\right)^{-k} = X\left(z^{M}\right) \quad Y(\Omega) = X(M\Omega)$$

Ekvivalentné štruktúry v SRT

M, N nesúdeliteľné



Dvojkanálové banky filtrov



Popisom signálov v oboch vetvách FB dostávame:

$$X_H(z) = X(z)\widetilde{H}(z) \qquad X_G(z) = X(z)\widetilde{G}(z)$$

$$C(z) = \frac{1}{2}\left[X_H\left(z^{\frac{1}{2}}\right) + X_H\left(-z^{\frac{1}{2}}\right)\right] \qquad D(z) = \frac{1}{2}\left[X_G\left(z^{\frac{1}{2}}\right) + X_G\left(-z^{\frac{1}{2}}\right)\right]$$

$$Y_H(z) = C\left(z^2\right)H(z) \qquad Y_G(z) = D\left(z^2\right)G(z)$$

$$\hat{X}(z) = Y_H(z) + Y_G(z) = \ldots = \frac{1}{2}\left[R_p(z)X(z) + R_a(z)X(-z)\right]$$

$R_p(z)$ charakterizuje celkový prenos sústavou a $R_a(z)$ aliasing

$$R_p(z) = \widetilde{H}(z)H(z) + \widetilde{G}(z)G(z) \qquad R_a(z) = \widetilde{H}(-z)H(z) + \widetilde{G}(-z)G(z)$$

Postačujúce podmienky na úplnú rekonštrukciu sú:

1) eliminácia aliasingu $R_a(z) = 0$, $\forall z$

2) prenos je nanajvýš oneskorením $R_p(z) = 2z^{-l}$, $l \in Z$

Riešením 1. podmienky - eliminácie aliasingu dostaneme napr.:

$$H(z) = \pm c z^m \widetilde{G}(-z) \qquad G(z) = \mp c z^m \widetilde{H}(-z),\ m \in Z$$

Pri riešení 2. podmienky dostaneme

$$P_H(z) + P_H(-z) = 2 \qquad \text{ak} \quad P_H(z) = \widetilde{H}(z)H(z)$$

Polpásmový filter

Polpásmový filter s prenosovou funkciou $P(z)$ je FIR filter pre ktorý platí:

$$P(z) = P(z^{-1}) \qquad\qquad P(z) + P(-z) = 2$$

resp.

$$P(e^{j\Omega}) = P(e^{-j\Omega}) \qquad\qquad P(e^{j\Omega}) + P(e^{j(\pi-\Omega)}) = 2$$

$$p(n) = p(-n) \qquad\qquad p(n) + (-1)^n p(n) = 2\delta(n)$$

T.j $P(e^{j\Omega})$ je reálna párna funkcia Ω s nepárnou symetriou okolo bodu $[\pi/2, 1]$
a pre odpovedajúcu impulzovú charakteristiku $p(n)$ platí:

$$p(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \ je \ párne \\ p(n) & ináč \end{cases}$$

Energeticky komplementárne filtre
Filtre s $H(z)$ a $G(z)$ sú *energeticky komplementárne* ak platí:

$$\left|H(e^{j\Omega})\right|^2 + \left|G(e^{j\Omega})\right|^2 = 2$$

Riešenie vo forme kvadratúrnych zrkadlových filtrov(QMF)

$$H(z)=\widetilde{H}(z) \qquad \widetilde{G}(z)=\widetilde{H}(-z) \qquad G(z)=-\widetilde{H}(-z)$$

Ortogonálne (paraunitárne) riešenie

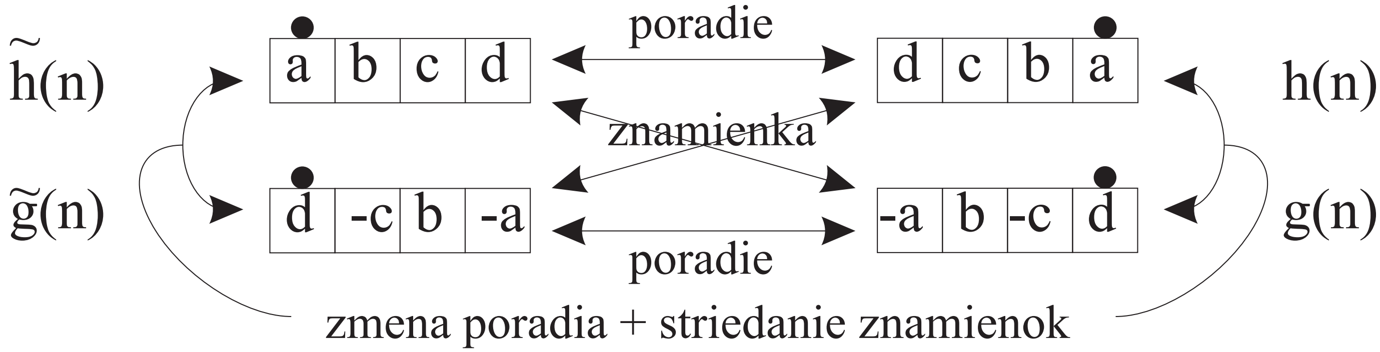
BF odvodená s $H_0(z)$ nasledovne:

$$\widetilde{H}(z)=H_0(z) \qquad H(z)=\pm z^{2l-1}\widetilde{G}(-z)=\widetilde{H}\left(z^{-1}\right)$$

$$\widetilde{G}(z)=\mp z^{-(2l-1)}\widetilde{H}\left(-z^{-1}\right) \qquad G(z)=\mp z^{2l-1}\widetilde{H}(-z)=\widetilde{G}\left(z^{-1}\right)$$

dosahuje úplnú rekonštrukciu za podmienky, že pre $h_0(n)$ platí:

$$\sum_n h_0(n)h_0(n-2k)=\delta(k) \qquad \sum_n h_0(n)=\sqrt{2}$$



Biortogonálne riešenie

Aliasing musí byť nulový:

$$H(z) = \pm z^m \tilde{G}(-z) \qquad G(z) = \mp z^m \tilde{H}(-z), \quad m \in Z$$

Filtre v jednotlivých vetvách musia formovať polpásmové filter:

$$P(z) = \tilde{H}(z) H(z) \qquad P(-z) = \tilde{G}(z) G(z)$$

$\tilde{h}(n)$	a | b | c	striedanie	p | -q | r | -s | t	h(n)
$\tilde{g}(n)$	p | q | r | s | t	znamienok	-a | b | -c	g(n)

Riešenie filtrov	analýza	syntéza
symetrické	$\tilde{h}(n)$=(1, 2, 1) $\tilde{g}(n)$=(-1, -2, 6, -2, -1)	$h(n)$=(-1, 2, 6, 2, -1) $g(n)$=(-1, 2, -1)
Antisymetrické (Kvadratický spline, rbio2.2)	$\tilde{h}(n)$=(1, 3, 3, 1) $\tilde{g}(n)$=(-1, -3, 3, 1)	$h(n)$=(-1, 3, 3, -1) $g(n)$=(-1, 3, -3, 1)