SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA BRATISLAVA
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra telekomunikácií

Ing. Radoslav Vargic

Kompresia statického obrazu s využitím waveletovej transformácie a lifting schémy

Doktorská dizertačná práca

Február 1999

Poďakovanie

Ďakujem svojej školiteľke, Doc.Ing. Jane KOTULIAKOVEJ, Csc., za cenné rady a vedenie pri vypracovaní dizertačnej práce. Zároveň ďakujem svojej rodine za podporu a trpezlivosť počas obdobia vypracovávania dizertačnej práce.

Obsah

Kapitola 1

Úvod

V súčasnej dobe rozmachu informačných technológií treba zabezpečiť prenos a archiváciu čoraz väčšieho množstva obrazových dát. Jeden zo spôsobov ako odľahčiť prenosové cesty resp. archivačné média je kompresia obrazu (t.j. vylúčenie nadbytočnej informácie, v dôsledku čoho sa nám zníži počet bitov potrebný na reprezentáciu obrazu) [4]. V niektorých oblastiach je potrebné komprimovať dáta bezstratovo v iných však môžme na zlepšenie kompresie využiť nedokonalosť *ľudského vizuálneho systému* (LVS), t.j. povolíme istú degradáciu obrazu.

Efektivita mnohých metód kompresie obrazu (najmä stratových metód) je založená na tom, že používajú reprezentáciu obrazu odlišnú od pôvodnej (t.j. rozložia obraz na komponenty, ktoré majú pre nás výhodné vlastnosti). Ak bola reprezentácia zmenená transformáciou [1], potom zvykneme hovoriť o *transformačnom kódovaní* (TC) resp. transformačných kompresných postupoch [4] [21]. Pri zmene reprezentácie pomocou *banky filtrov* (FB) zvykneme hovoriť o subpásmovom kódovaní (SBC) obrazu [11].

Najznámejším štandardom na kompresiu a kódovanie statického obrazu je štandard JPEG (pre stratovú aj bezstratovú kompresiu) [5]. V štandarde JPEG pre stratovú kompresiu bola použitá *bloková transformácia* (BT), v dôsledku čoho vznikal pri vyšších kompresiách výrazný blokový efekt. V súčasnosti je venovaného veľa úsilia sformovaniu nového štandardu JPEG 2000, ktorý by nedostatky predošlého štandardu nemal. Medzi dôležité požiadavky pritom patrí aj možnosť *progresívneho prenosu informácií* [67].

V posledných rokoch našla svoje využitie pri kompresii obrazu *waveletová transformácia* (WT) [7]-[19], ktorá umožnuje obraz reprezentovať vzhľadom na ľudský vizuálny systém prirodzenejšie ako klasické BT. WT požitá pri kompresii obrazu svojou matematickou podstatou a praktickou realizáciou zjednocuje princípy TC a SBC. Kompresné postupy používajúce WT sú v súčasnosti jedny z najúčinnejších, pričom umožňujú progresívny prenos informácií [88][92][86]. Realizácia WT pomocou postupu známeho ako lifting schéma [72]-[75] umožnuje jednoduché vytvorenie celočíselnej WT a jej použitie na bezstratovú kompresiu obrazu [81][76][82].

Táto práca sa zaoberá aplikáciou waveletovej transformácie na kompresiu obrazu. Sú odvodené a vytvorené viaceré modifikácií WT, ktorých vlastnosti a účinnosť pri kompresii obrazu sú otestované na reálnych obrazoch. Väčšina uvedených modifikácií WT využíva lifting schému, čím je umožnená bezstratová kompresia a jednoduchá hardwerová realizácia.

Práca je rozdelená do štyroch kapitol. V 2.kapitole je uvedená história a prehľad súčasného stavu v problematike transformačných kompresných postupov. Dôraz je pritom kladený na waveletovú transformáciu (časť 2.2), jej realizáciu lifitng schémou (časť 2.3) a využitie v súčasných metódach kompresie obrazu (časť 2.4). V závere 2.kapitoly sú vytýčené ciele dizertačnej práce (časť 2.5).

Ťažisko riešenej problematiky je sústredené v kapitolách 3 až 9. Kapitola 3 sa venuje použitiu blokových transformácií vo waveletových progresívnych kóderoch. Príspevky týkajúce sa samotnej Waveletovej transformácie po formálnej stránke resp. jej rozšireniu hybridizáciou sú v kapitolách 4 a 5. Príspevky týkajúce sa lifting schémy a vplyvu symetrizácie resp. normalizácie WT implementovanej lifting schémou pri použítí algoritmu SPIHT sú v kapitole 6. Návrh rámca na realizáciu neseparovateľných 2D WT použitím vzorkovania quincunx a realizácia dvoch skupín waveletov (izotropných a smerových) je v kapitole 7. Realizácii separovateľnej WT s maximálnou schopnosťou polynomicej predikcie dát a jej použitiu pri kompresii obrazu kapitole je venovaná kapitola 8. Príspevok k využitiu priečkových štruktúr lifting schémy neštandardným spôsobom, konkrétne na výpočet jednoducho invertovateľných DP filtrácií je uvedený v kapitole 9.

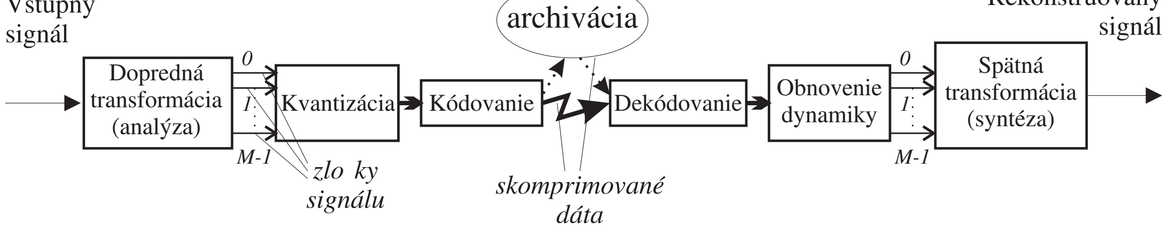
Vyhodnotenie dosiahnutých výsledkov je v kapitole 10. Sú tu uvedené pôvodné prínosy práce ako aj východzie body k ďalšej práci v diskutovanej oblasti.

Kapitola 2

Prehľad súčasného stavu

Použitie waveletovej transformácie (resp. diskrétnej waveletovej transformácie - DWT) pri kompresii obrazu spadá do oblasti transformačných kompresných postupov. V klasickom ponímaní sa transformačnými kompresnými postupmi nazývajú tie postupy, ktoré používajú diskrétnu lineárnu transformáciu (DLT), ktorá je zpravidla ortogonálna. Keďže každú DLT môžme nahradiť bankou filtrov [7] subpásmové kódovanie tesne súvisí s transformačným kódovaním. Rozklad signálu bankou filtrov sa zvykne nazývať ako subpásmová transformácia (SBT) [14][11]. Koncept WT predstavuje syntézu oboch prístupov, filtračného aj transformačného.

Moderné metódy kompresie obrazu používajú čoraz častejšie na zmenu reprezentácie signálu aj nelineárne modifikácie uvedených prístupov, prípadne iné prístupy odpovedajúce nelineárnej transformácii (napr. celočíselné [80] a adaptívne [83] transformácie, časovo premenné banky filtrov [36], fraktálová reprezentácia signálu [41]).



Obr. 2.1: Všeobecná schéma transformačného kompresného/dekompresného postupu

Všeobecná schéma transformačného kompresného/dekompresného postupu je na Obr.2.1. Najprv je vykonaná transformácia vstupného signálu (obrazu), aby sme ho mohli reprezentovať množinou takých M jeho komponentov, ktoré potom môžme efektívne kvantovať (t.j. mapovať komponenty do menšej množiny diskrétnych symbolov, čo má za následok stratu informácie). Úlohou transformácie je predovšetkým dekorelovať obraz (oddelit významnú zložku od nevýznamnej) a uľahčiť zohľadnenie percepčných kritérií pri následnej kvantizácii, kde potom môžu byť použité jednoducho realizovateľné typy kvantizátorov. Pri bezstratových kompresných postupoch sa kvantizácia vynecháva, ale vyžadujeme, aby samotná transformácia produkovala množinu diskétnych symbolov (celočíselná transformácia). V opačnom prípade je nutné kódovať desatinnú časť osobitne [81].

Posledným stupňom transformačného kódera je kóder symbolov, ktorý vykonáva reverzibilné mapovanie zdrojových symbolov do výstupného prúdu symbolov resp. bitov, pri súčasnom minimalizovaní bitovej náročnosti. Tento stupeň sa snaží odstrániť zbytkové korelácie prítomné medzi zdrojovými symbolmi. S výhodou sa tu používajú najmä entropické kódery [4] s prípadnou adaptáciou na štatistiku zdroja.

Základné spôsoby rozkladu signálu a spôsob ich použitia pri transformačnom kódovaní sú diskutované v časti 2.1. Dôraz je pritom kladený na rozklad bankami filtrov (a predovšetkým 2-kanálovej FB), ktoré sú prostriedkom na výpočet DWT.

Samotná WT je zavedená v časti 2.2 a to vo všetkých svojich najviac používaných tvaroch a zovšeobecneniach, sú ukázané jej výhody oproti Fourierovej analýze a spojitosti s konceptom FB ústiace do realizácie rýchlej waveletovej transformácie (FWT). V závere sú zhrnuté vlastnosti WT (a odpovedajúcich bánk filtrov) dôležité pri použití na kompresiu obrazu.

V časti 2.3 je zavedená lifting schéma ako rýchla metóda výpočtu DWT použitím faktorizovaných FB. Táto metóda spája princípy trasformačného a predikčného kódovania, pričom okrem zjednodučenia a urýchlenia výpočtu umožnuje realizovať aj viaceré obmedzenia klasických transformačnyh prístupov.

Spôsoby použitia waveletovej transformácii a lifting schémy používané v súčasných metódach kompresie obrazu sú zhrnuté v časti 2.4.

Tézy dizertačnej práce stanovené na základe štúdia celej uvedenej problematiky sú uvedené v časti 2.5.

2.1 Spôsoby rozkladu signálov

Najbežňejsím spôsobom rozkladu signálu v kontexte spracovania signálu je rozklad pomocou diskrétnych lineárnych transformácií (DLT), kde sú priestory, v ktorých sa pracuje, tvorené lineárnou kombináciou bázových vektorov. Diskrétne signály môžeme použitím DLT vyjadriť v tvare:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{M-1} \langle x(n), a_k(n) \rangle b_k(n) \tag{2.1}$$

kde $x(n) \in \mathcal{C}^M$ je vstupný signál, $a_k(n)$ sú bázové vektory formujúce bázu $\mathcal{C}^M$ a $b_k(n)$ bázové vektory formujúce duálnu bázu $\mathcal{C}^M$. Pre $a_k(n)$, $b_k(n)$ musí byť spnená podmienka biortogonality:

$$\langle b_j(n), a_i(n) \rangle = \delta(i-j) \tag{2.2}$$

Prepísaním (2.1) do maticového tvaru dostaneme:

$$\bar{x} = \mathbf{BA}\bar{x} = \mathbf{B}\bar{X} \tag{2.3}$$

$$\bar{X} = \mathbf{A}\bar{x} \tag{2.4}$$

kde $\bar{x}$ je stĺpcový vektor $\bar{x}^T = [x(0), x(1), \ldots, x(M-1)]$ a $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ sú transformačné matice. Sú to štvorcové matice rozmerov $M \times M$, kde $a_k^*(n)$ tvoria riadky matice $\mathbf{A}$ a $b_k(n)$ tvoria stĺpce matice $\mathbf{B}$. Stĺpcový vektor $\bar{X}$ môžeme považovať za (doprednú) transformáciu (2.4) signálového vektoru $\bar{x}$. Podľa (2.2)(2.3) platí:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{I}_M = \mathbf{BA} \tag{2.5}$$

Ak je báza ortogonálna (resp. ortonormálna) t.j. matica $\mathbf{B}$ je ortogonálna($\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}^{*T}$), je vzťahmi (2.3)(2.4) definovaná diskrétna ortogonálna transformácia (DOT). Potom platí:

$$b_i(n) = a_i(n) \qquad \mathbf{A} = \mathbf{B}^{*T} \qquad \bar{X} = \mathbf{B}^{*T}\bar{x} \tag{2.6}$$

Nech $x(n_1, n_2)$ je dvojrozmerný (2D) signál (napríklad obraz) reprezentovaný maticou $\mathbf{x}$ rozmerov $M \times M$. Potom pre jeho 2D separovateľnú transformáciu (reprezentovanú maticou $\mathbf{X}$) rozšírením (2.3)(2.4) dostávame:

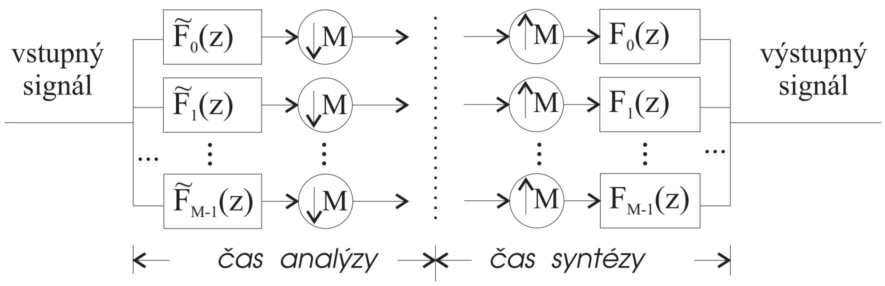
$$\mathbf{X} = \mathbf{AxA}^T \qquad \mathbf{x} = \mathbf{BAxA}^T\mathbf{B}^T = \mathbf{BXB}^T \tag{2.7}$$

Kľúčovým problémom je voľba bázy DLT tak, aby sme získali efektívnu reprezentáciu vstupného signálu. Ak transformácie pracujú so signálom v dávkach resp. po blokoch hovoríme o blokových transformáciách (BT). Optimálna je KLT [3], ktorá však nie je fixná a treba ju konštruovať pre daný signál, resp. triedu signálov. Z fixných BT je najúspešnejšia DCT, navrhnutá ako aproximácia KLT pre Gauss-Markovovské procesy 1. rádu s veľkým korelačným koeficientom (použitá v štandarde JPEG).

Nedostatkom mnohých implementáciach BT je, že neodstraňujú medziblokovú koreláciu a naviac vzniká rušivý "blokový efekt". Tento s výhodou odstraňujú transformácie s prekryvom blokov (LOT [6] a jej zovšeobecnenia GenLOT, GLBT [67]) prípadne transformácie pracujúce na princípe viacúrovňového rozlíšenia signálu (napr. DWT). Všetky spomenuté transformácie sú špeciálnym prípadom použitia FB na rozklad signálu (časť 2.1.1) . Základom realizácie waveletová transformácia su 2-pásmové banky filtrov ktorých riešenia sú zhrnuté v časti 2.1.2.

2.1.1 Rozklad signálov bankami filtrov

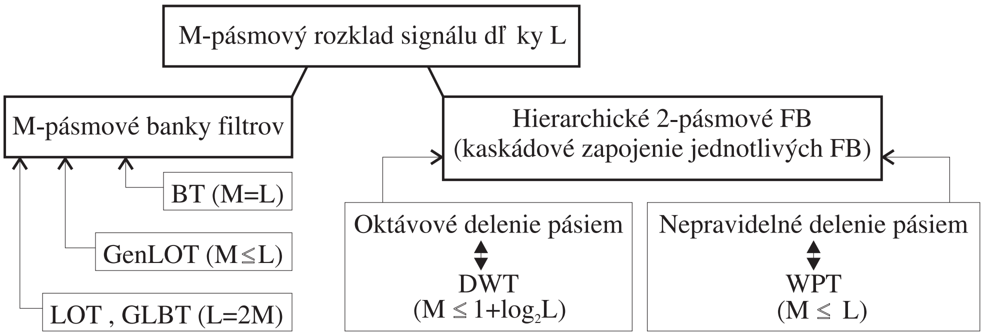
V banke filtrov (Obr.2.2) je signál rozdelený filtrami pre analýzu $\tilde{F}_k$ na M častí (subpásiem) a následne podvzorkovaný. Signál zrekonštruujeme spätným nadvzorkovaním týchto dvoch častí, interpoláciou filtrami pre syntézu F_k a nakoniec sčítaním. Základom je navrhnúť banku filtrov s rušením aliasingu a úplnou rekonštrukciou signálu, ktoré možno formulovať ako podmienky na prenosové funkcie analyzačných $\tilde{F}_k(z)$ resp. synetizačných filtrov $F_k(z)$ [7] [11].



Obr. 2.2: Všeobecná schéma M-pásmovej banky filtrov s kritickým podvzorkovaním

Každá diskrétna lineárna transformácia je ekvivalentná rozkladu v M-pásmovej FB, v ktorej časovo reverzné impulzné odpovede jednotlivých filtrov pre analýzu a syntézu odpovedajú jednotlivým bázovým vektorom DLT. Prehľad rôznych druhov transformácií realizovateľných bankami filtrov je na Obr.2.3. Základom na realizáciu WT (na

Obr.2.3 sú jej najznámejšie varianty DWT a WPT) sú 2-pásmové banky filtrov v hierarchickom kaskádovom usporiadaní podobne ako pri pyramidálnom kódovaní Burta a Adelsona (princíp viacstupňového rozlíšenia signálu t.j. pyramídy) [7]. Riešeniam 2-pásmových FB sa budem v ktrátkosti venovať v nasledovnej časti.



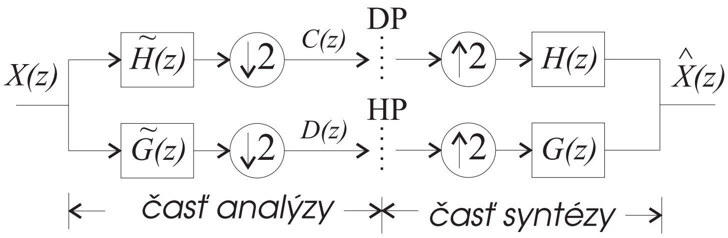
Obr. 2.3: Spôsoby rozkladu signálu na M pásiem použitím FB a ich ekvivalenty

Pri reprezentovaní transformácií sa využívajú aj viaceré rozšírenia FB, ako napríklad viacrozmerné FB [11], prípadne vektorové FB [13] (časť 2.2.5).

Použitím konceptu FB sa dajú jednoducho realizovať aj nelineárne transformácie, či už pomocou časovo premenných adaptívnych filtrov [36] alebo štrukturovaním bánk filtrov a využítím nelineárnych operácií pri filtračných postupoch (časť 2.3).

2.1.2 Dvojkanálová banka filtrov a uplná rekonštrukcia

V dvojkanálovej banke filtrov (Obr.2.4) je signál rozdelený filtrami pre analýzu na dve časti, pričom jeden z nich má zvyčajne DP a druhý HP charakter. V nasledujúcom texte sú diskutované základné požiadavky na rušenie aliasingu a úplnú rekonštrukciu signálu . Pre 2-pásmové FB použité v transformačných kóderoch je potrebné okrem toho zohľadniť viaceré ďalšie požiadavky (časť 2.2.6).



Obr. 2.4: Schéma 2-kanálovej banky filtrov

Nech $\tilde{H}(z)$, $\tilde{G}(z)$ resp. $H(z)$, $G(z)$ sú prenosové funkcie filtrov pre analýzu resp. syntézu. Potom výstup banky filtrov sa dá vyjadriť ako:

$$\hat{X}(z) = \frac{1}{2}[R_p(z)X(z) + R_a(z)X(-z)] \tag{2.8}$$

kde $R_a(z)$ charakterizuje aliasing a $R_p(z)$ celkový prenos sústavou

$$R_p(z) = \tilde{H}(z)H(z) + \tilde{G}(z)G(z) \qquad R_a(z) = \tilde{H}(-z)H(z) + \tilde{G}(-z)G(z) \tag{2.9}$$

Podmienky na úplnú rekonštrukciu sú [7]:

$$R_a(z) = 0, \forall z \tag{2.10}$$

$$R_p(z) = 2z^{-n_0}\,,\; n_0 \in \mathcal{Z} \tag{2.11}$$

Riešením podmienky eliminácie aliasingu (2.10) dostaneme [11]:

$$H(z) = -cz^{m_0}\tilde{G}(-z) \qquad G(z) = cz^{m_0}\tilde{H}(-z)\,, \qquad m_0 \in \mathcal{Z} \tag{2.12}$$

Riešenie podmienok (2.10), (2.11) ako celku je zložitejšie. Boli navrhnuté viaceré riešenia s rôznym stupňom všeobecnosti. V ďalšom texte sa zameriame na riešenia, ktoré používajú KIO filtre. Riešenia v prípade NIO filtrov sa dajú nájsť napr. v [7], [11]

Riešenie vo forme kvadratúrnych zrkadlových filtrov(QMF)

Nech h_0 je impulzová charakteristika DP KIO filtra s reálnymi koeficientami. Nech platí:

$$h_(0)(n) = (-1)^n h_0(n) \qquad |H_0(e^{j\omega})|^2 + |H_1(e^{j\omega})|^2 = 1 \tag{2.13}$$

kde $H_0(z)$, $H_1(z)$ sú prenosové funkcie filtrov. Potom filtre sa nazývajú *kvadratúrne zrkadlové filtre*(QMF). Vo FB boli prvýkrát použité v r.1977 (Esteban, Galand). Pre prenosové funkcie filtrov vo FB potom platí:

$$\tilde{H}(z) = H(z) = H_0(z) \qquad \tilde{G}(z) = H_0(-z) \qquad G(z) = -H_0(-z) \tag{2.14}$$

Tieto filtre podmienku (2.11) iba aproximujú, t.j. nedosahujú úplnú rekonštrukciu . Vhodnou optimalizáciou možno dosiahnuť prijateľné riešenia (aj s lineárnou fázou)[11].

Ortogonálne (paraunitárne) riešenie

Nech H_0 je prenosová funkcia a $h_0(n)$ impulzová charakteristika (párnej dĺžky $N = 2l$, $l \in \mathcal{Z}$) prototypového DP KIO filtra. Nech Potom FB z neho odvodená vzťahmi:

$$\tilde{H}(z) = H_0(z) \qquad \tilde{G}(z) = z^{-(2l-1)}\tilde{H}(-z^{-1}) \tag{2.15}$$

$$H(z) = -z^{2l-1}\tilde{G}(-z) \qquad G(z) = z^{2l-1}\tilde{H}(-z) \tag{2.16}$$

dosahuje úplnú rekonštrukciu [7],[11] za podmienky, že pre $h_0(n)$ platí:

$$\sum_{k=0}^{N-1} h_0(k)h_0(k+2n) = \delta(n) \qquad \sum_{k=0}^{N-1} |h_0(k)|^2 = 1 \tag{2.17}$$

Takáto sústava má nulové oneskorenie avšak sú v nej nekauzálne časti. Filtre pre analýzu a syntézu majú impulzové charakteristiky časovo obrátené, t.j. platí:

$$\tilde{H}(z) = H(z^{-1}) \qquad \tilde{G}(z) = G(z^{-1}) \tag{2.18}$$

Vynásobením pravej strany vzťahov (2.16) členom z^{-n_0}, kde $n_0 = 2l - 1$ dostávame kauzálnu FB s oneskorením n_0 [11].

Riešenie sa nazýva ortogonálne, lebo filtre pre analýzu (a analogicky aj syntézu) vo FB spĺňajú podmienky ortogonality, t.j. sú ortogonálne navzájom a aj voči svojim párnym posunom:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{h}(k)\tilde{h}(k+2n) = \delta(n), \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{g}(k)\tilde{g}(k+2n) = \delta(n), \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{h}(k)\tilde{g}(k+2n) = 0 \tag{2.19}$$

Príklad prenosových funkcií v ortogonálnej banke filtrov je uvedený na Obr.2.5.

Biortogonálne riešenie

Biortogonálne riešenie umožňuje návrh 2-kanálových bánk filtrov s KIO filtrami s lineárnou fázou a rôznymi dĺžkami impulzovej charakteristiky filtrov pri analýze a syntéze. Príklad frekvenčných charakteristík v banke filtrov pri biortogonálnom riešení je uvedený na Obr.2.5.

Všeobecné riešenie (2.10)(2.11) je aby súčiny $\tilde{H}(z)H(z)$, $\tilde{G}(z)G(z)$ formovali polpásmový filter [13], pre ktorého prenosovú funkciou $P_p(z)$ platí:

$$P_p(z) = \tilde{H}(z)H(z) \qquad P_p(-z) = \tilde{G}(z)G(z) \tag{2.20}$$

Podmienka, aby filter bol polpásmový je ekvivalentná [12]:

$$P_p(z) + P_p(-z) = 2z^{-n_0} \qquad n_0 \in \mathcal{Z} \tag{2.21}$$

Rušenie aliasingu sa dosahuje voľbou prenosových funkcií [11]:

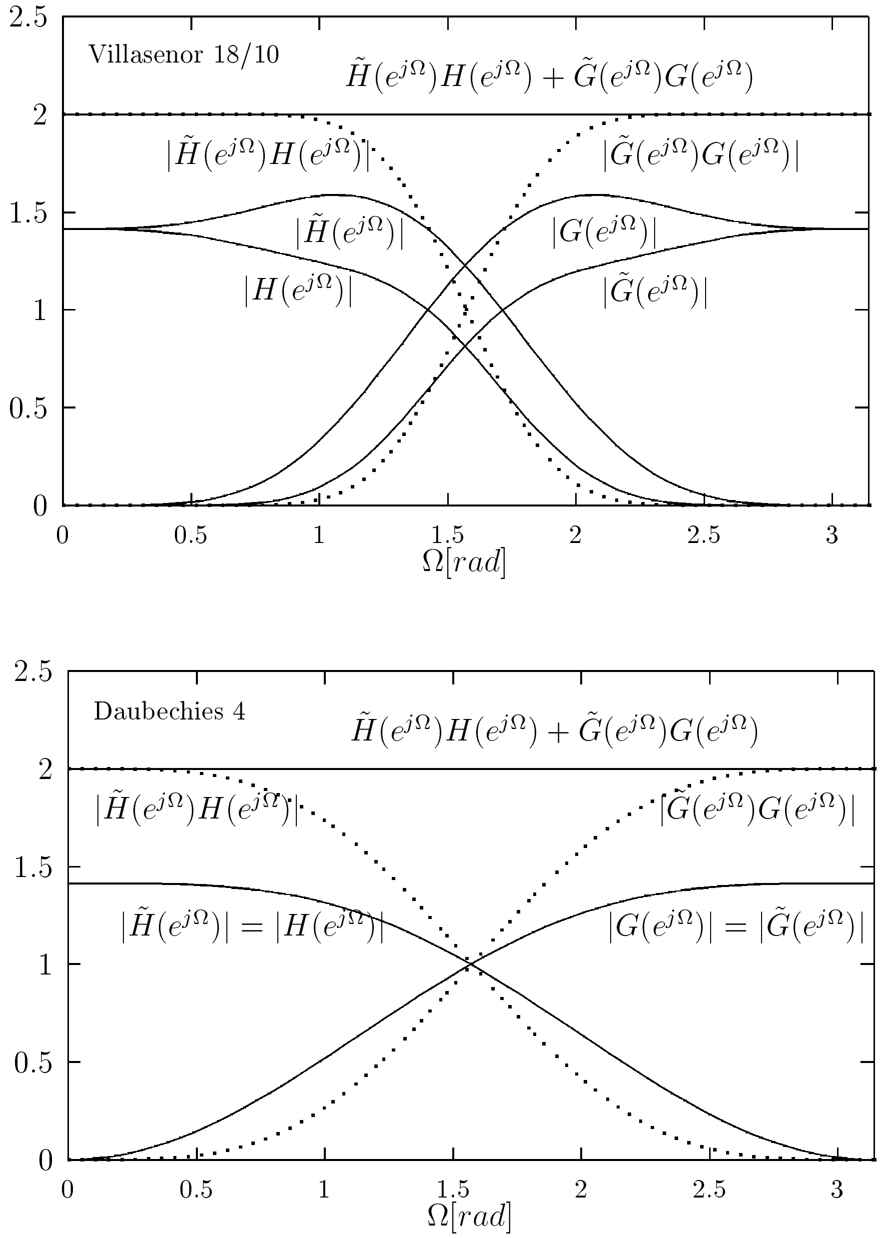
$$H(z) = -z^{2l-1}\tilde{G}(-z) \qquad G(z) = z^{2l-1}\tilde{H}(-z) \qquad l \in \mathcal{Z} \tag{2.22}$$

Filtre vo FB musia spĺňať podmienky biortogonality [7], t.j. byť ortogonálne k párnym posunom svojich duálov (2.23) a ortogonálne navzájom "nakríž"(2.24), t.j. $\forall m, n \in \mathcal{Z}$:

$$\sum_k h(k)\tilde{h}(2n-k) = \delta(n) \qquad \sum_k g(k)\tilde{g}(2n-k) = \delta(n) \tag{2.23}$$

$$\sum_k \tilde{h}(2m-k)g(k+2n) = 0 \qquad \sum_k \tilde{g}(2m-k)h(k+2n) = 0 \tag{2.24}$$

Možno ukázať, že nekauzálne ortogonálne riešenie je špeciálny pripad biortogonálneho riešenia, pričom sú splnené predpoklady (2.15)(2.17).



Obr. 2.5: Príklady frekvenčných charakteristík prenosových funkcií a magnitúdových frekvenčných charakteristík dvojpásmovej banky filtrov v ortogonálnom (Daubechies 4) a biortogonálnom (Villasenor 10-18) prípade.

2.2 Waveletová transformácia

Hoci v oblasti číslicového spracovania signálov sa začala waveletová transformácia používať iba v posledných rokoch, v matematike (predovšetkým v oblasti harmonickej analýzy) sa podobné princípy používali už dlhšie, pričom počiatky sa dajú vysledovať až do začiatku nášho storočia (konštrukcia Haarovej bázy v r. 1910). Využitie WT pre spracovanie číslicových signálov odštartovalo až objavenie tesných vzťahov medzi ortogonálnymi waveletovými bázami, pyramidálnym algoritmom používaným pri spracovaní obrazu a bankami filtrov (Mallat 1985). V súčasnosti predstavuje WT mocný nástroj na analýzu a reprezentáciu signálu a to najmä kôli svojim časovo-frekvenčným vlastnostiam.

V tejto časti sú zhrnuté výhody waveletovej transformácie (časť 2.2.1), jej matematické základy (časť 2.2.2), spôsob výpočtu rýchlej waveletovej transformácie bankami filtrov resp. spojitosti medzi uvedenými konceptmi (časť 2.2.4) a v súčasnosti najčastejšie sa vyskytujúce rozšírenia WT (časť 2.2.5). Na záver sú opísané vlastnosti WT (a odpovedajúcich bánk filtrov) dôležité pri použití na kompresiu obrazu (časť 2.2.6).

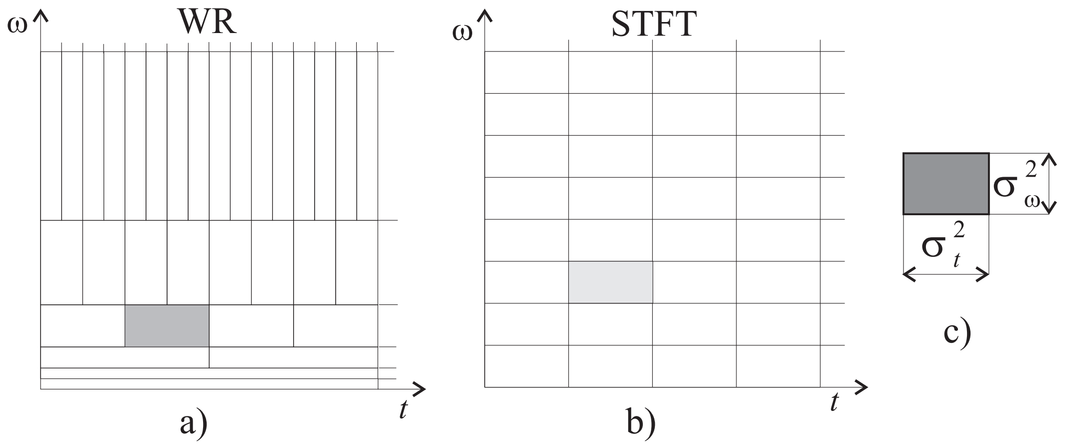
2.2.1 Waveletová transformácia a časovo-frekvenčná analýza

Pri analýze a reprezentácii signálov je častokrát výhodné použiť transformáciu, ktorá reprezentuje signál súčasne v čase aj frekvencii. V časovo - frekvenčnej rovine odpovedá báze transformácie rozdelenie do časovo - frekvenčných okien. Ich poloha resp. rozmery vypovedajú o maxime resp. rozptyle energie (σ_t^2, σ_ω^2) jednotlivých bázových funkcií v čase a frekvencii [7]. Miera prekrývania (prípadne nedotýkania sa) okien charakterizuje redundanciu alebo prípadnú neúplnosť bázy.

Štandardná Fourierova analýza rozkladá signál na frekvenčné komponenty. Neposkytuje však informáciu, *kedy* signál vykazuje dané frekvenčné charakteristiky, lebo jej bázové funkcie prekrývajú celú časovú os. Gábor (1946) navrhol riešenie vo forme *Krátkej Fourierovej transformácie (STFT)*, ktorá posúva okno konštantnej veľkosti pozdĺž signálu a extrahuje frekvenčný obsah v danom intervale:

$$F(\omega,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t-\tau)e^{-j\omega t}dt = \langle f(t)g(t-\tau), e^{j\omega t}\rangle \qquad (2.25)$$

kde $g(t)$ je oknová a $f(t)$ vstupná funkcia. Bázové funkcie sú generované moduláciou a posunom oknovej (prototypovej) funkcie $g(t)$. STFT má pre danú oknovú funkciu pevné rozlíšenie vo frekvencii (Obr.2.6b).



Obr. 2.6: Delenie časovo - frekvenčnej roviny do okien(c): a)Waveletový rad b)Krátka Fourierova transformácia

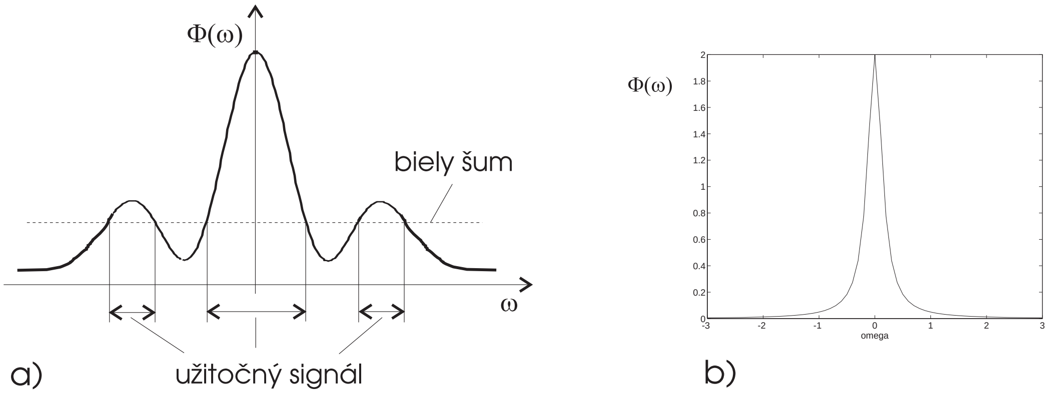
Waveletová transformácia má bázové funkcie formované zmenou mierky a posunom základného waveletu $\psi(t)$. Konkrétne napr. pre časovo - frekvenčné okná bázových funkcií waveletových radov (a analogicky aj WT) $\psi_{m,n}(t)$ platí:

$$\sigma^2_{m,n_t} = 2^m \sigma^2_t \qquad \sigma^2_{m,n_\omega} = \frac{1}{2^m}\sigma^2_\omega \tag{2.26}$$

kde σ^2_t a σ^2_ω charakterizujú $\psi(t)$, m mierku $\psi(t)_{m,n}$ a n posun $\psi(t)_{m,n}$ v čase. Situácia je zobrazená na Obr.2.6a. Vidíme, že WT poskytuje pružné časovo - frekvenčné delenie signálu, ktoré je výhodné vzhľadom na charakteristiky ľudského vizuálneho systému. Zároveň efektívnejšie reprezentuje singularity v dátach (hrany v obraze), ktoré ovplyvňujú menej spektrálnych koeficientov. Efektívnejšia reprezentácia je umožnená najmä tým, že bázové funkcie majú kompaktnú podporu (časť 2.2.6, vlastnosť 1) a báza ako celok je výrazne štrukturovaná.

Realizácia WT je založená na koncepte bánk filtrov (časť 2.1.2), v ktorých je spektrum signálu postupne delené na individuálne subpásma. Ak ako model signálu použijeme napr. gaussovský zdroj s pamäťou (jeho PSD $\Phi(\omega)$ je na Obr.2.7a), subpásmový prístup nám umožňuje efektívne oddelenie a individuálne spracovanie užitočných a neužitočných častí spektra.

Pri reprezentácii signálov požadujeme čo najväčiu plochosť psd v jednotlivých časovo-frekvenčných oknách (resp. odpovedajúcich frekvenčných subpásmach). Ak uvážime psd autoregresívneho AR(1) [7] modelu obrazu (Obr.2.7b), vyhovuje nám exponenciálny charakter závislosť veľkosti okien σ^2_ω od ω, ktorý vykazuje waveletová transformácia [39]



Obr. 2.7: Závislost výkonovej spektrálnej hustoty signálu od frekvencie pre dva často používané modely signálu

2.2.2 Definícia waveletovej transformácie

Spojitá waveletová transformácia (SWT) funkcie $f(t) \in L^2(\mathcal{R})$ je definovaná ako zobrazenie $L^2(\mathcal{R}) \rightarrow L^2(\mathcal{R}^2)$ vzťahom [11]:

$$\mathbf{SWT}_f(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi_{a,b}^*(t)dt = \langle f(t), \psi_{a,b}(t)\rangle \qquad a,b \in \mathcal{R} \tag{2.27}$$

kde bázové funkcie $\psi_{a,b}$ sú definované zo *základného waveletu* $\psi(t)$ pomocou parametrov mierky a posunu a, b nasledovne

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi(\frac{t-b}{a}) \qquad \psi(t) \in L^2(\mathcal{R}) \tag{2.28}$$

Inverznú SWT potom môžeme vypočítať ako:

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} SWT_f(a,b)\psi_{a,b}(t)\frac{da\,db}{a^2} \tag{2.29}$$

kde

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|}d\omega < \infty \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)dt = 0 \tag{2.30}$$

Ak je SWT ortonormálna $\psi(t)$ sa nazýva *ortonormálny wavelet* a platí:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(t)|^2dt = \int_{-\infty}^{\infty}|\psi_{a,b}(t)|^2dt = 1 \tag{2.31}$$

SWT je redundantná, redundanciu môžeme odstrániť navzorkovaním a, b :

$$a = 2^m \qquad b = n2^m \qquad m,n \in \mathcal{Z} \tag{2.32}$$

potom $\forall f(t) \in L^2(\mathcal{R})$ platí

$$f(t) = \sum_m \sum_n d_{m,n}\psi_{m,n}(t) \qquad d_{m,n} = \langle f(t), \psi_{m,n}(t)\rangle \tag{2.33}$$

kde pre $\psi_{m,n}(t)$ platí:

$$\psi_{m,n}(t) = 2^{-\frac{m}{2}}\psi(2^{-m}t - n) \quad \langle\psi_{j,k}(t), \psi_{l,m}(t)\rangle = \delta(j-l)\delta(k-m) \tag{2.34}$$

pre $j, k, l, m \in \mathcal{Z}$. Vzťahom (2.33) sú definované ortonormálne *waveletové rady* (WR), pričom množina $\{\psi_{m,n}(t)\}$ tvorí ortonormálnu bázu $L^2(\mathcal{R})$. Koeficienty $d_{m,n}$ nazývame *waveletové koeficienty*. Efektívne sa dajú vypočítať diskrétnym Mallatovým algoritmom implementovaným 2-pásmovými bankami filtrov (časť 2.2.4). Využíva sa pritom koncept viacúrovňového rozlíšenia signálu (časť 2.2.3), ktorý zároveň umožňuje prejsť k *Diskrétnej waveletovej transformácii* (DWT) a jej rýchlej implementácii.

2.2.3 Analýza signálu viacúrovňovým rozlíšením

Signál pri analýze viacúrovňovým rozlíšením (MRA) rozkladáme do systému hierarchických podpriestorov, pričom každý z podpriestorov charakterizuje rôzne rýchle zmeny v signále.

MRA pozostáva zo sekvencie uzavretých podpriestorov priestoru $L^2(\mathcal{R})$

$$\ldots V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \ldots \tag{2.35}$$

$$\overset{\text{lepšia}}{\longleftarrow} \quad \text{aproximácia} \quad \overset{\text{horšia}}{\longrightarrow}$$

S vlastnosťami:

- *Kompletnosť*

$$\bigcup_{m\in\mathcal{Z}} V_m = L^2(\mathcal{R}) \qquad \bigcap_{m\in\mathcal{Z}} V_m = \{0\} \tag{2.36}$$

- *Invariancia vzhľadom na posun v čase a zmenu mierky*

$$f(t) \in V_m \Leftrightarrow f(2^m t) \in V_0, \quad f(t) \in V_0 \Rightarrow f(t-m) \in V_0, \quad \forall m, n \in \mathcal{Z} \tag{2.37}$$

- *Existencia bázy* Existuje $\varphi \in V_0$ také, že množina

$$\{\varphi(t-n), \quad n \in \mathcal{Z}\} \tag{2.38}$$

je *ortonormálnou* bázou V_0. Funkciu $\varphi(t)$ nazývame *funkcia mierky*

Nech W_m je ortogonálny doplnok V_m do V_{m-1}. Potom analogicky k (2.38) existuje wavelet $\psi \in W_0$ taký, že množina $\{\psi(t-n),\ n \in \mathcal{Z}\}$ je ortonormálnou bázou podpriestoru W_0. Platia nasledovné relácie:

$$V_{m-1} = V_m \oplus W_m \qquad W_m \perp V_m \tag{2.39}$$

$$L^2(\mathcal{R}) = \underbrace{\underbrace{\ldots \oplus W_3 \oplus W_2}_{V_{-1}} \oplus W_1}_{V_0} \oplus W_0 \oplus W_{-1} \oplus W_{-2} \ldots \tag{2.40}$$

Vzťahom (2.40) je vyjadrený ortogonálny rozklad $L^2(\mathcal{R})$. Podpriestory V_m majú sumačný (resp. aproximačný) charakter, pričom W_m obsahujú detaily pri rôznych úrovniach rozlíšenia.

Z vlastností (2.35), (2.37) vyplýva, že bázové funkcie priestoru V_0 môžu byť vyjadrené lineárnou kombináciou bázových funkcií V_{-1}. S využitím (2.37), (2.38) a vzťahu V_m k ortogonálnym doplnkom (2.39) dostávame *relácie zmeny rozlíšenia*:

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n) \varphi(2t-n) \tag{2.41}$$

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{mr}(n) \varphi(2t-n) \tag{2.42}$$

kde $n \in \mathcal{Z}$. Koeficienty $h_{mr}(n)$, $g_{mr}(n)$ charakterizujú vzťahy medzi bázami na susedných úrovniach rozlíšenia a nazývajú sa *koeficienty pre zmenu rozlíšenia*. Fourierovou transformáciou vzťahov (2.41)(2.42) dostaneme:

$$\Phi(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Phi(0) \prod_{k=1}^{\infty} H_{mr}(e^{j\frac{\Omega}{2k}}) \quad \Psi(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} G_{mr}(e^{j\frac{\Omega}{2}}) \Phi(0) \prod_{k=1}^{\infty} H_{mr}(e^{j\frac{\Omega}{2k}}) \tag{2.43}$$

Aby vzťahy (2.43) konvergovali a boli splnené vzťahy (2.30)(2.31) musí platiť [7], [11]:

$$|H_{mr}(z)|_{z=1} = |G_{mr}(z)|_{z=-1} = \sqrt{2}, \qquad |H_{mr}(z)|_{z=-1} = |G_{mr}(z)|_{z=1} = 0 \tag{2.44}$$

t.j. $H_{mr}(z)$ a $G_{mr}(z)$ možno interpretovať prenosové funkcie DP resp. HP filtrov s impulzovými charakteristikami $h_{mr}(n)$ resp. $g_{mr}(n)$. Zohľadnením podmienky ortogonality (2.34) a vzťahov ortogonality v MRA (2.37)(2.39) dostaneme výsledky analogické podmienkam pre filtre pri ortogonálnom riešení FB (2.17)(2.19). Takouto interpretáciou je umožnený rýchly výpočet WR a DWT bankami filtrov. Algoritmus výpočtu je uvedený v časti (2.2.4).

Rekurzívnymi rovnicami (2.41)(2.42) môžeme po úprave generovať funkcie mierky tzv. kaskádovým algoritmom [13]:

$$\varphi(t) = \lim_{i\to\infty} \varphi^{(i)}(t) \qquad \varphi^{(i+1)}(t) = \sqrt{2}\sum_n h_{mr}(n)\varphi^{(i)}(2t-n) \tag{2.45}$$

kde $\int \varphi^{(0)}(t)dt = 1$. Odpovedajúce wavelety dostaneme použitím vzťahu (2.42). Približný výpočet môžme uskutočniť aj na celočíselnom definičnom obore ($t = k$, $k \in \mathcal{Z}$), kde inicializáciu vykonáme napr. $\varphi^{(0)}(k) = \delta(k)$. Odpovedajúce filtre s impulzovými charakteristikami $h(n) = h_{mr}(n)$, $g(n) = g_{mr}(n)$ môžeme nazvať *generujúcimi filtrami* funkcií mierky resp waveletov [11].

2.2.4 Výpočet DWT a Waveletových radov bankami filtrov

Nech $f(t) \in V_m$. Potom $f(t)$ môžeme vyjadriť ako:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_m(n)2^{\frac{m}{2}}\varphi(2^m t - n), \qquad m, n \in \mathcal{Z} \tag{2.46}$$

kde $\{c_m(n),\, n \in \mathcal{Z}\}$ je množina projekčných koeficientov $f(t)$ vo V_m:

$$c_m(n) = \langle 2^{\frac{m}{2}}\varphi(2^m t - n), f(t)\rangle \tag{2.47}$$

Analogicky môžme vyjadriť množiny projekčných koeficientov $c_{m+1}(n)$ resp. $d_{m+1}(n)$ pre podpriestory V_{m+1} resp W_{m+1}. Použitím vzťahov 2.37)(2.39 a následným využitím vzťahu (2.41), opisujúcom vzťahy medzi bázami na susedných úrovniach rozlíšenia, dostávame:

$$c_{m+1}(n) = \sum_k h_{mr}(k-2n)c_m(k) \qquad d_{m+1}(n) = \sum_k g_{mr}(k-2n)c_m(k) \tag{2.48}$$

$$c_m(n) = \sum_k h_{mr}(n-2k)c_{m+1}(k) + \sum_k g_{mr}(n-2k)d_{m+1}(k) \tag{2.49}$$

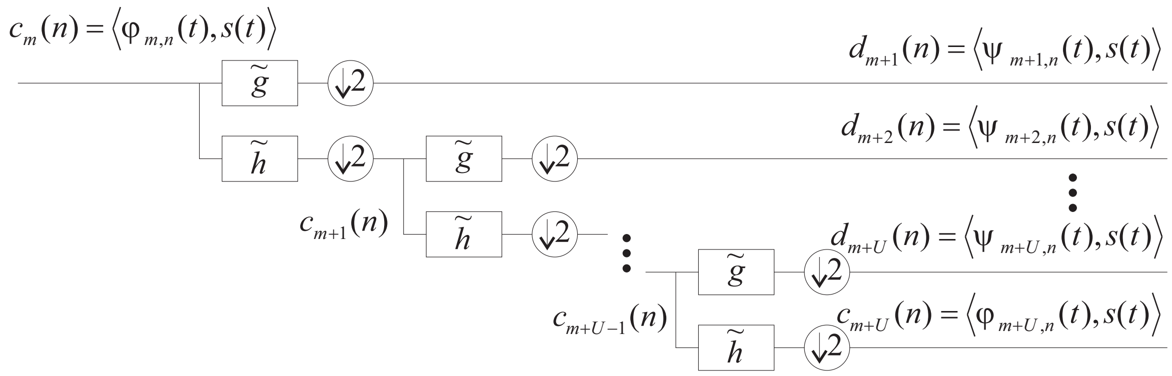
Vzťahy (2.48) a (2.49) sú analogické vzťahom platiacim v analyzačnej resp. syntetizačnej časti 2-pásmovej FB, ak sekvencie $h_{mr}(n)$, $g_{mr}(n)$ sú časovo obrátené impulzové charakteristiky analyzačných filtrov $\tilde{h}(n)$, $\tilde{g}(n)$. Teda substitúciami:

$$\tilde{h}(n) = h_{mr}(-n) \qquad \tilde{g}(n) = g_{mr}(-n) \qquad h(n) = h_{mr}(n) \qquad g(n) = g_{mr}(n) \tag{2.50}$$

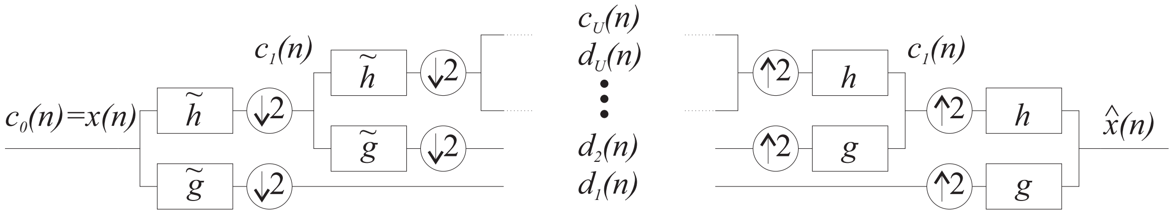
umožníme výpočet *ortogonálnych* WR a DWT bankami filtrov (Obr.2.8)(Obr.2.9).

Z vlastností MRA (2.35)-(2.40) vyplýva, že:

$$V_m = W_{m+1} \oplus W_{m+2} \oplus \ldots \oplus W_{m+U} \oplus V_{m+U} \tag{2.51}$$



Obr. 2.8: Výpočet koeficientov ortogonálnych resp. ortonormálnych waveletových radov pomocou 2-pásmovej banky filtrov



Obr. 2.9: Výpočet DWT pomocou 2-pásmovej banky filtrov

kde $U \in \mathcal{Z}+$ je počet úrovní rozkladu. Funkciu $f(t) \in V_m$ reprezentovanú koeficientami $c_m(n)$ môžeme potom rozložiť do viacerých podpriestorov, pričom koeficienty projekcií vyrátame z $c_m(n)$ rekurzívnym použitím vzťahu (2.51).

Pri výpočte waveletových radov z $s(t) \in L^2(\mathcal{R})$ môžeme zvoliť počiatočné V_m tak, aby $f(t)$ aproximovalo $s(t)$ s ľubovoľnou presnosťou. T.j. začneme:

$$c_m(n) = \langle s(t), \varphi_{m,n}(t) \rangle \tag{2.52}$$

a ďalej pokračujeme v diskrétnej oblasti pomocou vzťahov (2.48), (2.49), až po želanú úroveň rozkladu U. V praxi označujeme počiatočnú úroveň rozkladu ako nulovú, t.j. normujeme $V_m = V_0, V_{m+U} = V_U$, (Obr.2.9).

Pri výpočte diskrétnej waveletovej transformácie (DWT) interpretujeme vstupné dáta $x(n)$, $n \in \mathcal{Z}$ ako projekčné koeficienty $c_0(n)$ nejakého spojitého signálu $s(t)$ vo V_0. Výpočet vykonáme pomocou (2.48), (2.49). Ak je signál konečnej dĺžky L, potom pre počet úrovní rozkladu platí $U \leq \log_2 L$ (Obr.2.9). Keďže vstupný signál aj výpočet projekčných koeficientov je diskrétny v čase, báza projekčných priestorov bude diskrétna, t.j. vo forme množiny bázových vektorov. Potom vzťahy (2.35)(2.47) môžme prepísať do diskrétneho tvaru. Celá transformácia potom môže byť vyjadrená v maticovom tvare podobne ako v časti 2.1, pričom však transformačné matice treba modifikovať podľa želaného počtu úrovní rozkladu U. V literatúre sa DWT realizovaná bankami filtrov zvyčajne uvádza pod názvom rýchla *waveletová transformácia* (FWT) [11] [73].

2.2.5 Zovšeobecnenia waveletovej transformácie

V častiach 2.2, 2.2.3 boli definované ortogonálne wavelety a spôsob akým rozkladajú priestor $L^2(\mathcal{R})$ do ortogonálnych podpriestorov použitím konceptu viacúrovňového rozlíšenia. V ďalšom uvediem najčastejšie používané rozšírenia prevažne v spojitom tvare. Analogicky ako v časti 2.2.4 aj k nim sa dajú zostrojiť diskrétne ekvivalenty.

Biortogonálne wavelety

Pri biortogonálnych waveletoch sú základné wavelety používané pri rozklade a spätnom zložení signálu odlišné [11]. Pre waveletové rady potom analogicky k (2.33) platí:

$$f(t) = \sum_m \sum_n \langle f(t), \tilde{\psi}_{m,n} \rangle \psi_{m,n} \tag{2.53}$$

kde $\tilde{\psi}$ je *duálny wavelet* k ψ, pričom $\{\tilde{\psi}_{m,n}; m, n \in \mathcal{R}\}$ formuje duálnu bázu $L^2(\mathcal{R})$. Potom:

$$\langle \tilde{\psi}_{j,k}, \psi_{l,m} \rangle = \delta(j-l)\delta(k-m) \quad j,k,l,m \in \mathcal{Z} \tag{2.54}$$

Analogicky ako v časti 2.2.3 k $\tilde{\psi}$, ψ existujú také funkcie mierky $\tilde{\varphi}$, φ, že množiny $\{\varphi_{m,n}\}$, $\{\tilde{\varphi}_{m,n}\}$ tvoria bázy podpriestorov V_m resp $\tilde{V}_m$ a množiny $\{\psi_{m,n}\}$, $\{\tilde{\psi}_{m,n}\}$ tvoria bázy podpriestorov W_m resp. $\tilde{W}_m$. V MRA potom existujú dve hierarchie:

$$\begin{aligned} &\ldots V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \ldots \\ &\ldots \tilde{V}_2 \subset \tilde{V}_1 \subset \tilde{V}_0 \subset \tilde{V}_{-1} \subset \tilde{V}_{-2} \ldots \end{aligned} \tag{2.55}$$

pričom platí, že W_j je komplementárne k V_j v priestore V_{j-1} ale nie je to ortogonálny komplement. W_j je namiesto toho ortogonálny komplement $\tilde{V}_j$. Analogicky $\tilde{W}_j$ je ortogonálny komplement V_j:

$$V_{j-1} = V_j \oplus \tilde{W}_j \qquad \tilde{V}_{j-1} = \tilde{V}_j \oplus W_j \tag{2.56}$$

Relácie zmeny mierky potom možno vyjadriť vzťahmi:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(t) &= \sqrt{2} \sum \tilde{h}(n)\tilde{\varphi}(2t-n) \quad & \varphi(t) &= \sqrt{2} \sum h(n)\varphi(2t-n) \\ \tilde{\psi}(t) &= \sqrt{2} \sum \tilde{g}(n)\tilde{\varphi}(n-2t) \quad & \psi(t) &= \sqrt{2} \sum g(n)\varphi(n-2t) \end{aligned} \tag{2.57}$$

kde $\tilde{h}(n)$, $h(n)$, $\tilde{g}(n)$, $g(n)$ sú impulzové charakteristiky KIO filtrov spĺňajúcich podmienky biortogonálneho riešenia 2-pásmovej banky filtrov (2.20)(2.24).

Semiortogonálne wavelety

Wavelet $\psi \in L^2(\mathcal{R})$ sa nazýva semiortogonálny, ak platí:

$$\langle \psi_{j,k} \psi_{l,m} \rangle = \delta(j-l) \qquad j,k,l,m \in \mathcal{Z} \tag{2.58}$$

t.j. je zachovaná ortogonalita len medzi rôznymi úrovňami rozlíšenia [9]. Príkladom uvedených waveletov je perspektívna množina splinov a kardinálnych B-splinov [10].

Multiwavelety

O multiwaveletoch hovoríme, ak sú použité pri reprezentácii signálu naraz viaceré základné wavelety ψ_k, $(k = 0, 1, \ldots, R-1)$ z čoho vyplýva existencia viacerých funkcií mierky φ_k takých, že $\varphi_{k,m,n}(t) = 2^{m/2}\varphi_k(2^m t - n)$ tvoria bázu V_m [13]. Potom analogicky k (2.41-2.42) platia relácie zmeny rozlíšenia v maticovom tvare:

$$\bar{\phi}(t) = \sqrt{2}\sum_n \mathbf{H}(n)\bar{\phi}(2t-n) \qquad \bar{\psi}(t) = \sqrt{2}\sum_n \mathbf{G}(n)\bar{\phi}(2t-n) \tag{2.59}$$

kde $\bar{\phi}^T(t) = [\varphi_0(t), \ldots, \varphi_{R-1}(t)]$ a $\mathbf{H}(n)$, $\mathbf{G}(n)$ sú sekvencie štvorcových matíc rozmerov $R \times R$ volené tak, aby wavelety a funkcie mierky boli ortogonálne navzájom a aj voči svojim posunom.

Nech $c_{k,m}$, $d_{k,m}$ sú projekčné koeficienty do V_m resp W_m a vytvorme z nich vektory:

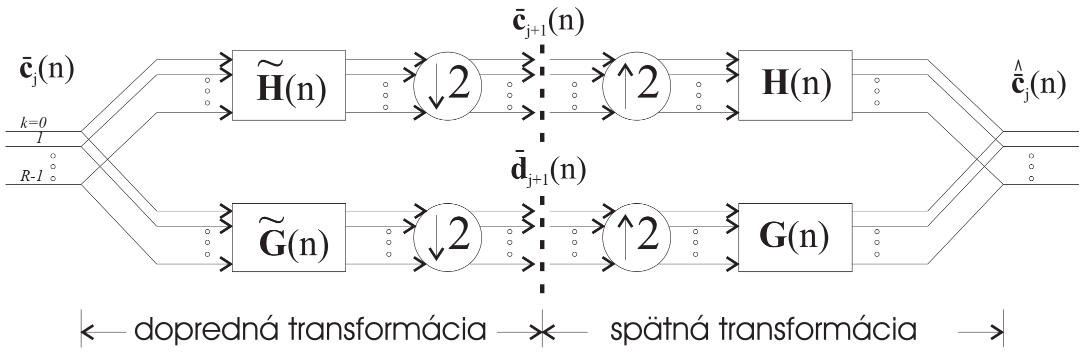
$$c_{k,m} = \langle f(t), \varphi_{k,m,n}(t) \rangle \qquad d_{k,m} = \langle f(t), \psi_{k,m,n}(t) \rangle \tag{2.60}$$

$$\bar{C}_m^T(k) = [c_{0,m}(k), \ldots, c_{R-1,m}(k)] \quad \bar{D}_m^T(k) = [d_{0,m}(k), \ldots, c_{R-1,m}(k)] \tag{2.61}$$

Potom môžeme vzťahy(2.48)(2.49) na rekurzívny výpočet projekčných koeficientov zapísať v maticovom tvare:

$$\bar{C}_{m+1}(k) = \sqrt{2}\sum_n \tilde{\mathbf{H}}(n)\bar{C}_m(2k+n) \qquad \bar{D}_{m+1}(k) = \sqrt{2}\sum_n \tilde{\mathbf{G}}(n)\bar{C}_m(2k+n) \tag{2.62}$$

kde $\tilde{\mathbf{H}}(n) = \mathbf{H}(-n)$ a $\tilde{\mathbf{G}}(n) = \mathbf{G}(-n)$). Výpočet môžeme implementovať pomocou vektorovej banky filtrov [51][13], (Obr.2.10). Dosiahnutie symetrie bázových funkcií - t.j. lineárnej fázovej charakteristiky systému je možné. Multiwavelety sú v literatúre označované aj ako wavelety druhej generácie [72]. V diskrétnom prípade je treba signál na začiatku predfiltrovať, aby sme dostali vstupné projekcie signálu odpovedajúce príslušnej funkcii mierky (t.j. nestačí jednoduché navzorkovanie signálu)[46], [13].



Obr. 2.10: Výpočet diskrétnej multiwaveletovej transformácie vektorovými bankami filtrov

Waveletové pakety

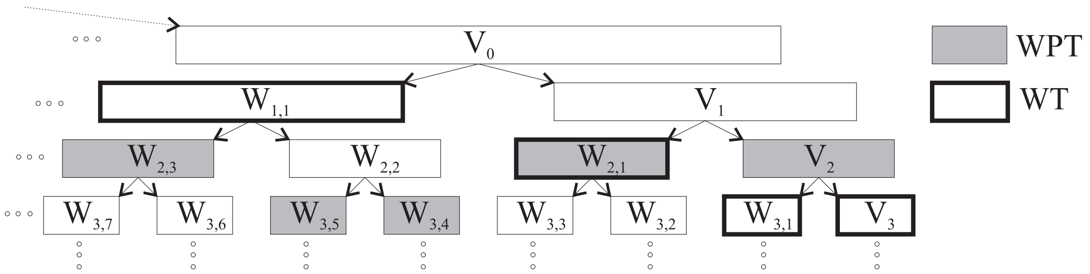
V klasickom prípade waveletov rozkladáme v MRA iba sumačné podpriestory V_m. Waveletové pakety [11] rozklad zovšeobecňujú aj na diferenčné priestory W_m. V MRA potom vzniká úplná hierarchická stromová štruktúra podpriestorov (Obr.2.11), pričom platí:

$$V_{m-1} = V_m \oplus W_{m,1} \quad W_{m-1,l} = W_{m,2l} \oplus W_{m,2l+1} \quad V_m \perp W_{m,1} \quad W_{m,2l} \perp W_{m,2l+1} \tag{2.63}$$

kde $W_{m,l}(l = 2, 3, \ldots)$ sú novovzniknuté hierarchické podpriestory. Reprezentácia signálu v celej hierarchii je redundantná, stačí použiť iba časť kompletných projekcií do podpriestorov. Výber najvhodnejšej stromovej štruktúry na reprezentáciu daného signálu podľa daného kritéria je ekvivalentný s hľadaním najlepšej bázy. Môže byť realizovaný adaptívne alebo definovaný pevne pre danú triedu signálov. Najbežnejšie kritériá sú: minimalizácia entropie reprezentácie signálu (Wickerhauser, Coifman) [34], minimalizácia počtu bitov reprezentácie signálu a skreslenia pri danej množine kvantizátorov [35].

Wavelety na intervale

Originálna definícia waveletov používa funkcie definované na celej reálnej osi. Ďalšou možnosťou je definovanie špeciálnych waveletov na intervale: tieto pozostávajú z obvyklých waveletov, ktorých podpora je úplne vnútri intervalu a špeciálnych *okrajových waveletov*. Prvé ortogonálne wavelety na intervale skonštruoval Y.Meyer použitím Daubechies waveletov, boli však numericky nestabilné. V súčasnosti existujú viaceré konštrukcie pre ortogonálne aj biortogonálne prípady. Konštrukcie založené na spline



Obr. 2.11: Rozdelenie podpriestorov v MRA pri Waveletovej transformácii a pri príklade Waveletovej paketovej transformácii

waveletoch zaviedli Chui, Wang [9]. V [12] sú riešené hraničné filtre implementujúce ortogonálne aj biortogonálne wavelety na intervale.

Príklad konštrukcie waveletov na intervale pre diskrétny prípad založený na momentových vlastnostiach waveletov a využívajúci lifting schému (časť 2.3), s následnou aplikáciou na transformáciu obrazu je uvedený v [78].

Viacrozmerné wavelety

Rozšírenie waveletov do viacerých rozmerov je úzko zviazané s konceptom viacrozmerných bánk filtrov [11]. Vo všeobecnosti sa návrh môže riešiť:

- priamym návrhom
- transformáciou z jednorozmerného (1D) prípadu

Triviálne, separovateľné prípady viacrozmerných waveletov môžeme vytvoriť pomocou tenzorového súčinu použitím jednorozmerných prototypov:

- *Tenzorovým súčinom 1D bázových funkcií* (štandardný prípad). V 2D prípade napr. báza pre V_0 je tvorená súčinmi $\varphi_{1,n}$ a $\psi_{i,n}$ ($n \in \mathcal{Z}$, $i, j = 1, 2, \ldots$) t.j.:

$$\varphi_{1,n}(x) \times \varphi_{1,n}(y) \qquad \psi_{j,n}(x) \times \varphi_{1,n}(y) \tag{2.64}$$

$$\varphi_{1,n}(x) \times \psi_{i,n}(y) \qquad \psi_{j,n}(x) \times \psi_{i,n}(y) \tag{2.65}$$

- *Tenzorovým súčinom analýz s viacúrovňovým rozlíšením* (neštandardný prípad) [8]. V 2D prípade sú potom bázové funkcie tvorené zmenami mierky a posunmi troch základných waveletov $\psi\varphi(x, y)$, $\varphi\psi(x, y)$, $\psi\psi(x, y)$ a funkcie mierky

$\varphi\varphi(x, y)$:

$$\varphi\varphi(x, y) = \varphi(x)\varphi(y) \qquad \psi\varphi(x, y) = \psi(x)\varphi(y) \tag{2.66}$$

$$\varphi\psi(x, y) = \varphi(x)\psi(y) \qquad \psi\psi(x, y) = \psi(x)\psi(y) \tag{2.67}$$

Separovateľné wavelety môžme výhodne navrhovať resp. realizovať pomocou 1D FB. Vo všeobecnosti však 2D wavelety musíme realizovať pomocou 2D FB. Separovateľnosť waveletov pritom záleží od separovateľnosti filtrov a mriežky použitej na podvzorkovanie.

Pri priamom návrhu 2D waveletov ďalej narážame na viac ťažkostí a to najmä čo sa týka konvergencie pri konštrukcii a regularity výsledných waveletov. Podrobnejšie sú riešenia opísané napr. v [11].

2.2.6 Vlastnosti waveletov a požiadavky pri kódovaní obrazu

Vlastnosti waveletovej transformácie sú tesne zviazané s vlastnosťami filtrov v FB, ktorá WT implementuje, t.j. s filtrami, ktoré bázové funkcie WT generujú (2.45),(2.57),(2.59). Nutné a postačujúce podmienky na existenciu rôznych druhov WT, sú uvedené v časti 2.2. Tomu odpovedajú podmienky na filtre v FB, ktoré príslušné WT realizujú (časť 2.1.2). Avšak na efektívnu reprezentáciu obrazu sú dôležité ďalšie vlastnosti WT, z ktorých sa niektoré dajú lepšie vyjadriť ako vlastnosti bázových funkcií, a iné ako vlastnosti filtrov v príslušnej FB.

Pri transformačnom kódovaní patria medzi najdôležitejšie vlastnosti transformácie dekorelácia a kompakcia energie. Pri stratovom kódovaní taktiež treba brať do úvahy aproximačné vlastnosti transformácie a vplyv na tvorbu nežiadúcich vizuálnych efektov (v dôsledku kvantizácie).

Bázové funkcie WT bývajú najčastejšie charakterizované vlastnosťami:

1. *ohraničenosť v čase - vypovedá o tom, že bázová funkcia má nenulové funkčné hodnoty len na istom intervale $\langle a, b \rangle$. Potom hovoríme, že na danom intervale má kompaktnú podporu.* Táto vlastnosť je dôležitá z hľadiska schopnosti bázy reprezentovať iba lokálne zmeny v signále na rôznych rozlíšeniach. WT implementovaná KIO filtrami má túto vlastnosť zaručenú implicitne. Potom ak impulzová charakteristika generujúceho filtra je dĺžky N odpovedajúca bázová funkcia je kompaktne podporovaná na $0 \leq t \leq N-1$, $t \in \mathcal{R}$ [7].

2. *Aproximačné vlastnosti.* Nech prenosová funkcia generujúceho filtra funkcie mierky ψ má v bode $z = -1$ K-násobnú nulu (filter sa nazýva *K-regulárny*) [13]. Potom hovoríme, že MRA je rádu K [72], t.j. môže reprodukovať všetky polynómy stupňa $\leq (K-1)$ (tzn. vyjadriť ich pri ľubovoľnom rozlíšení ako lineárnu kombináciu posunutých funcií mierky). Zároveň odpovedajúci wavelet má K *nulových momentov*, t.j.: $\int t^k \tilde{\psi}(t)dt = 0$, kde $k = 0, 1, ...K-1$. Analogicky pre duálnu funciu mierky $\tilde{\psi}$ a wavelet ψ definujeme počet duálnych nulových momentov $\tilde{K}$. Keďže polynómy sú často dobrým modelom pre obraz, je schopnosť ich reprezentácie, resp. aproximácie dôležitým kritériom. V literatúre bývajú často momentové vlastnosti zahrnuté v názve waveletu v tvare: Názov(K,$\tilde{K}$), napr. CDF(2,2) = Cohen - Daubechies - Fauveau wavelet s dvomi nulovými momentami pre $\psi(t)$ a $\tilde{\psi}(t)$.

3. *Regularita* - vyjadruje mieru hladkosti funkcie (súvisí s diferencovateľnosťou). Pri definícii je využitý fakt, že diferencovateľnosť funkcie súvisí s poklesom amplitúdy jej FT pri vyšších frekvenciách. Je definovaná ako maximálne číslo r, pre ktoré platí([7]): $|\Phi(\omega)| \leq \frac{c}{(1+|\omega|)^{r+1}}, \forall\omega$. Regularita funkcie mierky súvisí s počtom núl prenosovej funkcie jej generujúceho filtra v $z = -1$, pričom jedna nula je postačujúca podmienka existencie regulárnych waveletov (2.43)(2.44).

Pri transformačnom kódovaní obrazu, keď transformáciu interpertujeme ako rozklad na subpásma, je dôležitých viacero, často protichodných požiadaviek. Najdôležitejšie požiadavky na filtre, resp. banku filtrov, ktorá implementuje danú transformáciu môžeme potom zhrnúť:

1. *Ortogonalita* - Ak je transformácia, resp. banka filtrov, ktorá ju implementuje ortogonálna, potom platí (v dôsledku zachovania energie) pre celkové skreslenie: $D = \sum_i D_i$ ($i = 0, 1, \ldots, M-1$, M je počet subpásiem) v dôsledku čoho môžu byť použité optimálne algoritmy na alokáciu bitov [11].

2. *Maximalizácia kompakcie energie* - keď transformácia rozkladá signál na M subpásiem ktoré majú disperzie σ_j^2, môžeme definovať zisk transformačného kódovania (TC) ako [7]:

$$G_{TC} = \frac{\frac{1}{M}\sum_{j=0}^{M-1}\sigma_j^2}{(\prod_{j=0}^{M-1}\sigma_j^2)^{1/M}} \tag{2.68}$$

G_{TC} udáva pomer rekonštrukčných chýb pri PCM kódovacej schéme a aktuálnom TC pri rovnakom objeme výstupných dát. Vyšší zisk kódovania podmieňuje spravidla vyššia regularita filtrov.

3. *Minimalizácia energie aliasingu* - vo FB sú za normálnych okolností zaručené podmienky na elimináciu aliasingu (2.10). Ak však pri syntéze nepoužijú všetky subpásma, alebo v subpásmach je rôzny kvantizačný šum, bude rekonštruovaný signál naďalej obsahovať nežiadúce komponenty.

4. *Dĺžka filtrov a efekt "zvonenia"* - Dobré oddelenie subpásiem alebo vysoká regularita požaduje dlhé filtre. Ich nevýhodou je, že šíria kódovacie chyby, čo na hranách v obraze spôsobuje tzv. "efekt zvonenia" (dôsledok striedania znamienok v impulzových charakteristikách filtrov). Hrany v obrázku reprezentujeme jednotkovým skokom [11]. Potom cieľom je minimalizovať rozdiel medzi jednotkovým skokom a odpoveďou filtra na jednotkový skok.

5. *Zohľadnenie štatistiky vstupu* - napr. keďže najviac energie signálov používaných v praxi sa koncentruje okolo jednosmernej (JSM) zložky, mali by byť transformácie schopné reprezentovať JSM zložku len jednou bázovou funkciou. Z toho vyplýva, že impulzová charakteristika HP filtrov nesmie mať JSM zložku, čo je analogické k (2.30), (2.44) t.j. k existencii regulárnych waveletov.

6. Dekorelované subpásma - t.j. snaha oddeliť významnú informáciu od nevýznamnej

7. Minimalizácia posunu subpásiem - pre niektoré kódovacie metódy je výhodné zabezpečiť, aby koeficienty v jednotlivých subpásmach prislúchajúce jednej oblasti v pôvodnom obraze neboli navzájom poposúvané, napr. [49].

Regularita je podstatná vlastnosť v prípade že používame rekurziu (t.j. pri DWT a nie LOT, BT,...), môže zvýšiť zisk kódovania a degradácia obrazu môže pôsobiť menej rušivo. Podľa [11] je istá regularita potrebná, avšak ďalšie zvyšovanie regularity kompresiu podstatne nezlepšuje. T.j pri kódovaní obrazu treba relatívne krátke a "hladké" filtre s určitou regularitou. Podľa [50] regularita nie je dôležitá v porovnaní s voľbou tvaru waveletu, použitého pre syntézu, ktorý určuje viditeľnosť kódovacích chýb. V [48] je uvedený prehľad a porovnanie (vzhľadom na regularitu, odpoveď na jednotkový skok a impulz) 4300 filtrov, prichádzajúcich do úvahy pre kódovanie obrazu (dĺžka filtra $<$ 36), s možnosťou vybrať si vhodný typ na požadovaný typ aplikácie.

V biortogonálnych systémoch, keď nie je možné dosiahnuť regularitu pri analýze aj syntéze je lepšie použiť regulárnu syntézu čím zabránime tzv. "šachovnicovému" efektu. V [12] navrhujú voliť HP filtre s krátkou impulzovou charakteristikou kvôli minimalizácii efektu zvonenia a DP filtre naopak s dlhou impulzovou charakteristikou kvôli lepšej reprezentácii plochých regiónov v obraze.

Pri bezstratovom kódovaní použitím WT je prehľad požiadaviek na filtre (a prehľad účinnosti najviac používaných filtrov) uvedený napr. v [81].

2.3 Lifting schéma

Lifting schéma [72][73][74] má svoj pôvod v metódach na zlepšenie špecifických vlastností danej waveletovej transformácie. Jednoducho opisuje závislosti medzi pármi filtrov, ktoré zdieľajú ten istý HP, resp. DP filter. Takto môžeme začať z triviálneho prípadu "lenivého" waveletu a postupne vybudovať pár filtrov (a teda aj zodpovedajúce MRA) s požadovanými vlastnosťami. Lifting schéma umožnuje efektívne realizovať klasické WT s nasledovnými výhodami:

- urýchlenie implementácie WT (napr. v 1D prípade až dvojnásobne)
- možnosť vykonať výpočty bez použitia prídavnej pamäte (t.j. "in-place")
- jednoduchý návrh vlastných WT (naviac so zaručenou invertovateľnosťou)

Zároveň však Lifting schéma svojou štruktúrou umožnuje jednoduché rozšírenia klasickej WT (časť 2.2), ktoré môžme zhrnúť v nasledovných bodoch:

- konštrukcia nelineárnych WT [80][83]
- použitie WT pre nerovnomerne navzorkované signály
- konštrukcia WT na intervaloch, krivkách, povrchoch [79]

V kontexte kompresie obrazu sa stávajú dôležitými okrem zefektívnenia klasickej WT predovšetkým možnosti použitia nelineárnych WT a WT na intervaloch (t.j. ohraničených signáloch ako napr. obraz). Z nelineárnych WT sa pri s výhodou používajú najmä celočíselné modifikácie (bezstratová kompresia obrazu) [80][82][76] a WT s možnosťou adaptácie na signál [83]. Príklad konštrukcie WT na intervale založenej na momentových vlastnostiach waveletov s následnou aplikáciou na transformáciu obrazu je uvedený v [78]. Rozšírenie lifting schémy do viacerých (R) rozmerov je rozpracované v [57]. Sú tu rozpracované prípady pravouhlého vzorkovania (pomocou faktorizácii M-pásmovej banky filtrov, kde $M = 2^R$) ako aj iných typov pravidelného vzorkovania (Quincunx, Hexagonálne vzorkovanie,...).

Konštrukcia lifting schémy je založená na koncepte polyfázového rozkladu bánk filtrov (časť 2.3.1). V [75] bolo dokázané, že každú FB, môžme rozložiť (faktorizovať jej filtre) na jednoducho invertovateľnú postupnosť krokov (časť 2.3.2). Tieto kroky tvoria v algoritme priečkovú štruktúru, ktorú môžme interpretovať ako postupnosť predikcií a aktualizácií dvoch množín v obraze až po ich vzájomnú dekoreláciu (časť 2.3.3).

2.3.1 Polyfázový rozklad

Pri systémoch s rôznym taktovaním je často vhodné reprezentovať filtre (ale aj signály) ich polyfázovým rozkladom. Rozklad filtra $H(z)$ s impulzovou charakteristikou $h(n)$ na M polyfázových filtrov $H_k(z)$ je definovaný [7]:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} z^{-k} H_k(z^M) \qquad H_k(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(k+Mn)z^{-n} \tag{2.69}$$

V prípade 2-pásmovej banky filtrov (časť 2.1.2) potom môžeme rozložiť filtre $\tilde{H}(z)$,$\tilde{G}(z)$, $H(z)$, $G(z)$ na párne (H_o) a nepárne komponenty (H_e):

$$H_e(z) = \sum_n h(2n)z^{-n} \qquad H_o(z) = \sum_n h(2n+1)z^{-n} \tag{2.70}$$

$$H(z) = H_e(z^2) + z^{-1}H_o(z^2) \tag{2.71}$$

pre výstup z analyzačnej časti banky filtrov (Obr.2.4)potom platí:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(z) &= \begin{pmatrix} C(z) \\ D(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\tilde{H}(z)X(z)]_e \\ [\tilde{G}(z)X(z)]_e \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{H}_e(z)X_e(z) + z^{-1}\tilde{H}_o(z)X_o(z) \\ \tilde{G}_e(z)X_e(z) + z^{-1}\tilde{G}_o(z)X_o(z) \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{P}}(z)\tilde{\mathbf{Z}}(z)\mathbf{X}(z) \end{aligned} \tag{2.72}$$

$$\text{kde} \quad \tilde{\mathbf{P}}(z) = \begin{pmatrix} \tilde{H}_e(z) & \tilde{H}_o(z) \\ \tilde{G}_e(z) & \tilde{G}_o(z) \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{Z}}(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix}, \mathbf{X}(z) = \begin{pmatrix} X_e(z) \\ X_o(z) \end{pmatrix} \tag{2.73}$$

Matice typu $\tilde{\mathbf{P}}(z)$ sa nazývajú *polyfázové matice*. Invertovaním vzťahu (2.72) môžeme opísať časť syntézy (bez nadvzorkovania a sumácie) nasledovne:

$$\hat{\mathbf{X}}(z) = \mathbf{Z}(z)\mathbf{P}^T(z)\mathbf{Y}(z) \tag{2.74}$$

$$\text{kde} \quad \mathbf{Z}(z) = \tilde{\mathbf{Z}}(z)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \qquad \mathbf{P}^T(z) = \tilde{\mathbf{P}}(z)^{-1} \tag{2.75}$$

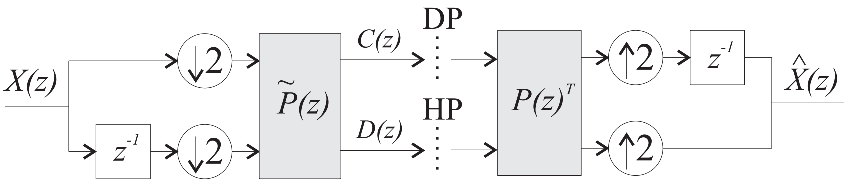
Matica $\mathbf{P}(z)$ je polyfázová matica tvorená pomocou prenosových funkcí filtrov pre syntézu $H(z)$, $G(z)$. Jej transponovaný tvar pri zápise vzťahu (2.74) vyplýva z vlastností syntetizačnej časti banky filtrov [7]. Samozrejme, pre úplnú rekonštrukciu musí platiť (2.75) [7][11]:

$$\tilde{\mathbf{P}}(z)\mathbf{P}(z)^T = \mathbf{I} \tag{2.76}$$

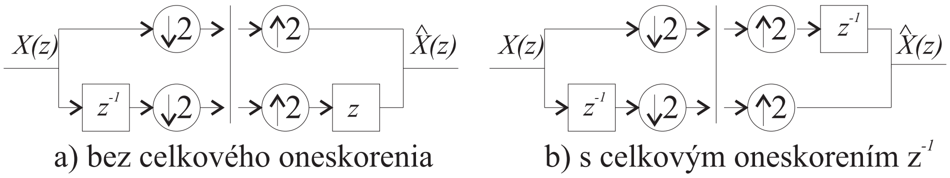
Takémuto riešeniu odpovedá nekauzálna realizácia FB podľa Obr.2.13a. Aby bola FB kauzálna [7], tak $\mathbf{Z}(z) \neq \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ale volíme $\mathbf{Z}(z) = \begin{pmatrix} z^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. V tom prípade $\mathbf{Z}(z)\tilde{\mathbf{Z}}(z) = z^{-1}\mathbf{I}$ a celá FB má jednotkové oneskorenie. Situácia je znázornená na Obr.2.12, resp. na Obr.2.13b.

Paraunitáre, resp. ortogonále riešenie (časť 2.1.2) dostaneme, keď $\tilde{\mathbf{P}}(z)$ a $\mathbf{P}(z)$ budú paraunitárne, t.j: $\mathbf{P}(z)^{-1} = \mathbf{P}(z^{-1})^T$ a $\tilde{\mathbf{P}}(z)^{-1} = \tilde{\mathbf{P}}(z^{-1})^T$. Potom $\tilde{\mathbf{P}}(z) = \mathbf{P}(z^{-1})$.

Triviálny prípad, keď $\tilde{\mathbf{P}}(z) = \mathbf{P}(z)^T = \mathbf{I}$ realizuje tzv. polyfázovú, resp. "lenivú" waveletovú transformáciu [72], ktorá signál iba rozdelí na párne a nepárne zložky.



Obr. 2.12: Polyfázový tvar kauzálnej 2-pásmovej banky filtrov



Obr. 2.13: Rôzne tvary polyfázového rozkladu FB s oneskorením pri analýze

2.3.2 Kroky liftingu a faktorizácia polyfázových matíc

Nech $\tilde{H}(z)$, $\tilde{G}(z)$ sú komplementárne, t.j. $det|\tilde{\mathbf{P}}(z)| = 1$, potom $H(z)$, $G(z)$ sú komplementárne, t.j. $det|\mathbf{P}(z)| = 1$, pričom [73][75][76]:

- pre každý nový KIO filter $\tilde{H}^{new}(z)$ resp. $G^{new}(z)$ komplementárny k $\tilde{G}(z)$ resp. $H(z)$ platí (Lifting):

$$\tilde{H}^{new}(z) = \tilde{H}(z) + S(z^2)\tilde{G}(z) \qquad G^{new}(z) = G(z) - S(z^2)H(z) \tag{2.77}$$

$$\tilde{\mathbf{P}}^{new}(z) = \begin{pmatrix} 1 & S(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{P}}(z) \qquad \mathbf{P}^{new}(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -S(z^{-1}) & 1 \end{pmatrix} \mathbf{P}(z) \tag{2.78}$$

- pre každý nový KIO filter $\tilde{G}^{new}(z)$ resp. $H^{new}(z)$ komplementárny k $\tilde{H}(z)$ resp. $G(z)$ platí (Duálny lifting):

$$\tilde{G}^{new}(z) = \tilde{G}(z) + T(z^2)\tilde{H}(z) \qquad H^{new}(z) = H(z) - T(z^2)G(z) \tag{2.79}$$

$$\tilde{\mathbf{P}}^{new}(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T(z) & 1 \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{P}}(z) \qquad \mathbf{P}^{new}(z) = \begin{pmatrix} 1 & -T(z^{-1}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{P}(z) \tag{2.80}$$

kde $S(z) = \sum_n s(n)z^{-n}$ a $T(z) = \sum_n t(n)z^{-n}$ sú prenosovými funkciami KIO filtrov a môžu byť interpretované ako *prediktory*. Tento proces môže byť opakovaný, striedaním krokov liftingu a duálneho liftingu, t.j. začínajúc s "lenivým" waveletom môžeme postupne konštruovať wavelet s lepšími a lepšími vlastnosťami.

V [75] je dokázané, že každá polyfázová matica $\mathbf{P}_w(z)$ reprezentujúca FB s KIO filtrami, ktoré realizujú waveletovú transformáciu môže byť zapísaná v tvare [76]:

$$\mathbf{P}_w(z) = \begin{pmatrix} K_N & 0 \\ 0 & 1/K_N \end{pmatrix} \prod_{i=m}^{1} \left\{ \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & S_i(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}^{\text{lifting}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T_i(z) & 1 \end{pmatrix}}_{\text{duálny lifting}} \right\} \tag{2.81}$$

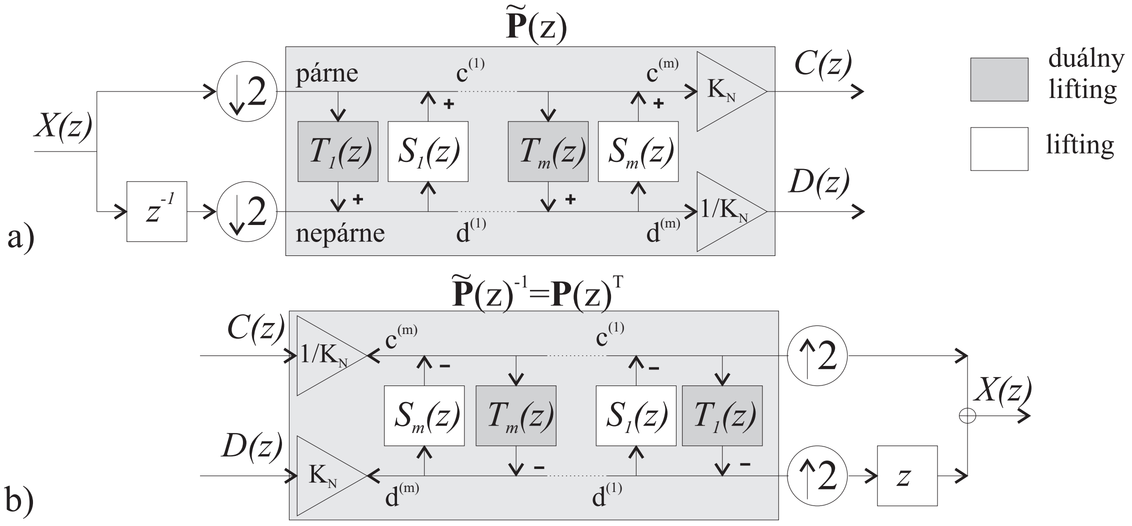
$$\mathbf{P}_w(z)^{-1} = \prod_{i=1}^{m} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -T_i(z) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -S_i(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 1/K_N & 0 \\ 0 & K_N \end{pmatrix} \tag{2.82}$$

kde K_N je normalizačný faktor. Rozklad danej matice $P_w(z)$ na dolné a horné trojuholníkové matice (2.81) dostaneme *faktorizáciou* matice $P_w(z)$, čo súvisí s hľadaním najväčšieho spoločného deliteľa (NSD) polynómov (t.j. prenosových funkcií filtrov v z rovine) Euklidovým algoritmom. Pre polynómy NSD nie je jedinečný. Pre krok liftingu hľadáme $S(z)$ napr. ako NSD($H_o(z)$,$H_e(z)$)[76]. Potom platí:

$$\mathbf{P}_w(z) = \begin{pmatrix} H_e(z) & H_o(z) \\ G_e(z) & G_o(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_e(z) & H_o^{new}(z) \\ G_e(z) & G_o^{new}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.83}$$

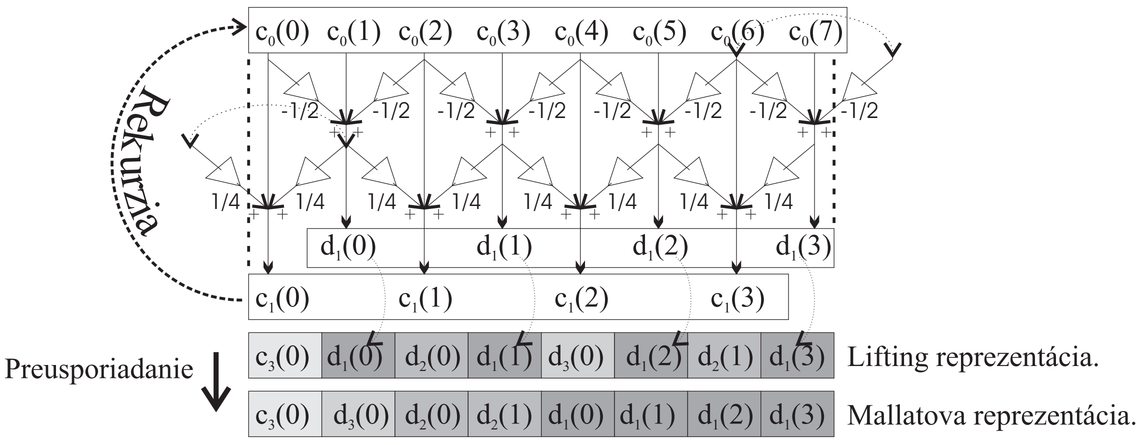
teda $H_o(z) = S(z)H_z + H_o^{new}(z)$ z čoho vyplýva $G_o(z) = S(z)G_z + G_o^{new}(z)$. Podobne postupujeme aj v prípade duálneho liftingu, kde hľadáme $T(z)$ ako NSD($G_o(z)$,$G_e(z)$). Ak faktorizujeme analyzačnú časť t.j. $\mathbf{P}_w(z) = \tilde{\mathbf{P}}(z)$, potom rovnice (2.81,2.82) nám umožňujú realizovať $\tilde{\mathbf{P}}(z)$ a $\mathbf{P}^T(z)$ priečkovými štruktúrami na Obr.2.14.

V ortogonálnom (resp. paraunitárnom prípade) môžeme dostať okamžite aj odlišnú faktorizáciu využitím vlastnosti ortogonality. Potom $\tilde{\mathbf{P}}(z) = \mathbf{P}(z^{-1})$. Príklad faktorizá-



Obr. 2.14: Priečková štruktúra FB pri lifting schéme, t.j. po faktorizácii polyfázových matíc: a) časť analýzy b) časť syntézy

cie $\tilde{\mathbf{P}}(z)$ pre CDF(2,2) wavelet je v Tab.2.1. V súlade s Obr.2.9 označme $c_0(n) = x(n)$. Praktická implementácia DWT je znázornená na Obr.2.15, kde je zároveň implementované symetrické rozšírenie vstupného signálu na jeho okrajoch. Po transformácii je usporiadanie koeficientov odlišné od klasickej (Mallatovej) reprezentácie. Algoritmy preusporiadania sú diskutované v časti 6.3.



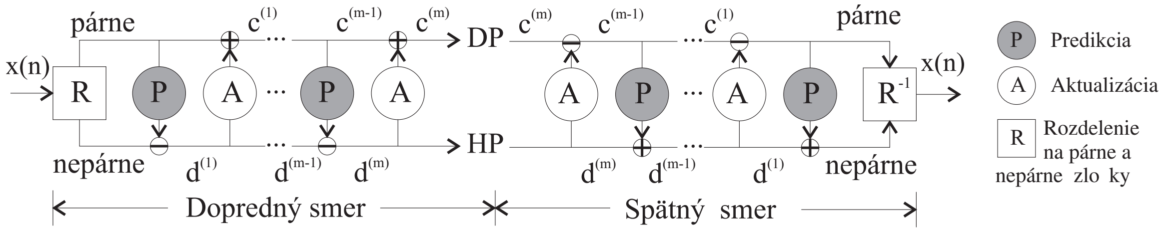
Obr. 2.15: Implementácia doprednej DWT pre CDF(2,2) wavelet lifting schémou so symetrickým rozšírením vstupného signálu na jeho okrajoch pri N=8.

Filtre pre analýzu	$\tilde{H}(z) = \frac{\sqrt{2}}{4}(-\frac{1}{2}z^{-2} + 1z^{-1} + 3 + 1z - \frac{1}{2}z^{2})$ $\tilde{G}(z) = \frac{\sqrt{2}}{4}(-z^{-2} + 2z^{-1} - 1)$
Faktorizácia	$\tilde{\mathbf{P}}(z) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$
Normalizačná konštanta	$K_N = \sqrt{2}$
Dopredná transformácia	$c^{(0)}(n) = x(2n) \qquad d^{(0)}(n) = x(2n+1)$ $d^{(1)}(n) = d^{(0)}(n) + [-\frac{1}{2}c^{(0)}(n) - \frac{1}{2}c^{(0)}(n+1)]$ $c^{(1)}(n) = c^{(0)}(n) + [\frac{1}{4}d^{(0)}(n-1) + \frac{1}{4}d^{(0)}(n)]$ $c(n) = K_N c^{(1)}(n) \qquad d(n) = \frac{1}{K_N}d^{(1)}(n)$
Spätná transformácia	$c^{(1)}(n) = \frac{1}{K_N}c(n) \qquad d^{(1)}(n) = K_N d(n)$ $c^{(0)}(n) = c^{(1)}(n) + [-\frac{1}{4}d^{(1)}(n-1) + \frac{1}{4}c^{(1)}(n)]$ $d^{(0)}(n) = d^{(1)}(n) + [\frac{1}{2}c^{(1)}(n) + \frac{1}{2}c^{(1)}(n+1)]$ $\hat{x}(2n) = c^{(0)}(n) \qquad \hat{x}(2n+1) = d^{(0)}(n)$

Tabuľka 2.1: Príklad faktorizácie pre CDF(2,2) wavelet a následná implementácia

2.3.3 Vlastnosti prediktorov

Vlastnosti výslednej transformácie sú určené vlastnosťami prediktorov S_i a T_i a spôsobom ich aplikácie. Teoreticky môžeme použiť ľubovoľné prediktory. Priečková štruktúra nám zaručuje biortogonalitu a tým aj úplnú rekonštrukciu. Pri voľbe prediktorov máme veľa stupňov voľnosti, ktoré môžeme využiť pri ich dizajne. Môžeme použiť nelineárne prediktory, napr. adaptívne [83] albo celočíselné (pre bezstratovú kompresiu) [80] . Celočíselné prediktory dostaneme napr. jednoduchým zaokrúhlením hodnoty (nelineárna operácia).



Obr. 2.16: Znázornenie predikcie a aktualizácie pri WT realizovanej Lifting schémou

Principiálne môžeme waveletovú transformáciu implementovanú lifting schémou (2.14) prekresliť podľa Obr.2.16. Základné bloky lifting schémy sú potom *rozdelenie*, *predikcia* a *aktualizácia*. T.j. fáza duálneho liftingu odpovedá predikcii HP pásma pomocou DP pásma a fáza liftingu odpovedá spätnej aktualizácii [72][76]. Samozrejme cieľom predikcie je získanie čo najmenších hodnôt v HP časti po doprednej transformácii. Naproti tomu aktualizáciou sa snažíme zachovať v DP časti čo najviac vlastností pôvodného obrazu, čo sa stáva dôležitým najmä pri rekurzii v DP časti (aby bola predikcia aj naďalej účinná). Pri koncepte polynomickej aproximácii waveletov (časť 2.2.6) to odpovedá navzájom protichodným požiadavkám reprodukcie polynómov čo najvyššieho rádu funkciami mierky $\varphi(t)$ pri čo najväčšom počte nulových momentov základného waveletu $\psi(t)$.

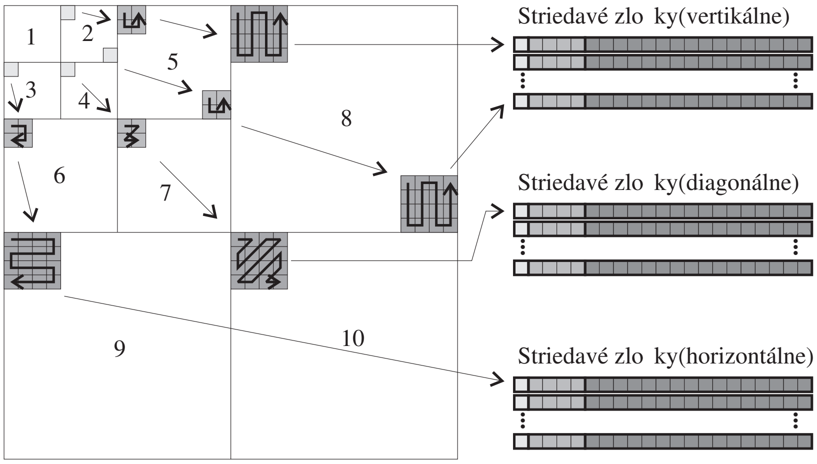
Pri návrhu jednoduchých prediktorov sa často využíva nasledovná vlastnosť [72][78]: Ak máme v jednom kroku vytvorený prediktor pre duálny lifting s istým počtom nulových momentov zodpovedajúceho waveletu, potom aktualizácia, tvorená takým istým prediktorom s koeficientami prenásobenými konštantou $A = -0.5$ nám zachová rovnaký počet momentov signálu v DP pásme.

Koncept prediktorov predstavuje silný vzťah medzi transformačným a prediktívnym kódovaním, kde sa snažíme predpovedať (aproximovať) signál a kódovať iba prípadnú diferencia od originálneho signálu. [21]. Lifting schéma takto principiálne umožnuje dvojaký prístup k dekorelácii dát: a) použiť transformačný princíp (t.j. klasickú WT) a celý postup faktorizovať na kroky liftingu b) využiť priamo predikčný princíp a snažiť sa data dekorelovať priamym návrhom sústavy prediktorov použitých v lifting schéme.

2.4 Waveletové kompresné postupy

Väčšina v súčasnosti najúspešejších waveletových kompresných postupov pri kompresii obrazu ma klasickú zreťazenú štruktúru transformačného kódera: Transformácia-Kvatnizácia-Kódovanie (Obr.2.1). Niektoré z týchto kompresných postupov dosahujú jedny z najlepších výsledkov pri stratovej aj bezstratovej kompresii vôbec a výrazne ovplyvnili vývoj aplikácií kompresie a prenosu obrazu (napr. [87][88][92]).

Ako prvú treba v kompresnom postupe vykonať 2D WT. Prehľad najpoužívanejších spôsobov je v časti 2.4.1. Vo vzniknutej štruktúre subpásiem existujú vnútropásmové aj medzipásmové korelácie (nie lineárne, tie sa odstránili transformáciou). Kvantizátory, prípadne celé kompresné postupy môžme kategorizovať podľa toho, na ktorý druh korelácie sa zamerajú [81]. Používané spôsoby kvantizácie prípande alokácie bitov sú uvedené v časti 2.4.2. Po kvantizácii sú koeficienty kódované väčšinou rôznymi variantami entropických a Run-lenght kóderov, ktoré používajú koeficienty preusporiadané podľa charakteru dát očakávaného aj pri kvantizačnej stratégii. Novšie medódy používajú pritom aj rôzne metódy modelovania kontextu a metódy podmieňovania tzv. "conditioningu" (prínosné napr. pozdĺž hrán v obraze) [86][93].



Obr. 2.17: Načítavanie waveletových koeficientov pri "baseline" waveletovom kóderi

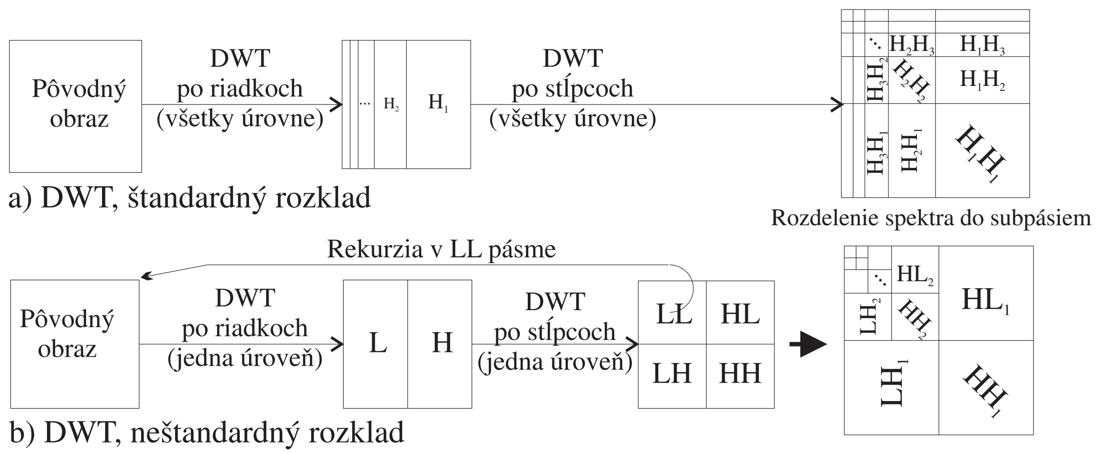
Spektrum pri klasickej realizácii waveletového transformačného postupu (tzv. "baseline algoritmus") [12] je zobrazené na Obr.2.17. Po neštandardnom rozklade separovateľnej 2D DWT sa predpokladá hlavne vnútropásmová korelácia t.j. používa sa nezávislá kvantizásiu subpásiem. Koeficienty sú potom preusporiadané a na získané sekvencie sa aplikuje Run-Lenght kód použitím EOB stratégie s následným entropickým kóderom (takto sa využijú aj medzipásmové korelácie).

V posledných rokoch sa pri kódovaní obrazu začal využívať princíp progresívneho kódovania obrazu. V súčasnosti najúspešnejšie waveletové kódery CREW [92] a ECECOW [86] tento princíp obsahujú . Oba používajú metodiku založenú na efektívnej reprezentácii hierarchických štruktúr koeficientov medzi pásmami použitú v algoritme EZW a pozdejšie zdokonalenú v algoritme SPIHT (časť 2.4.3). Uvedené kódery používajú separovateľnú 2D DWT s neštandardným rozkladom, pričom sa líšia v type použitých filtrov realizujúcich danú 2D DWT. SPIHT a CREW umožňujú okrem stratovej aj bezstratovú kompresiu použitím celočíselnej WT. Pri progresívnom kódovanie obrazu pomocou blokových transformácií (najmä DCTII) sa môže využiť analogický princíp ako pri algoritme EZW. T.j. namiesto 2D DWT v algoritmoch typu EZW sa vykoná BT, pričom spektrálne koeficienty v blokoch sa preusporiadajú tak, aby výsledná reprezentácia mala charakter čo najbližší očakávanému rozdeleniu na subpásma ako pri 2D DWT (Obr.2.18b) [63].

Okrem uvedených postupov tvoriacich "hlavný prúd" vývoja waveletových kóderov existujú viaceré neštandardné postupy, niektoré z nich sú uvedené v časti 2.4.4.

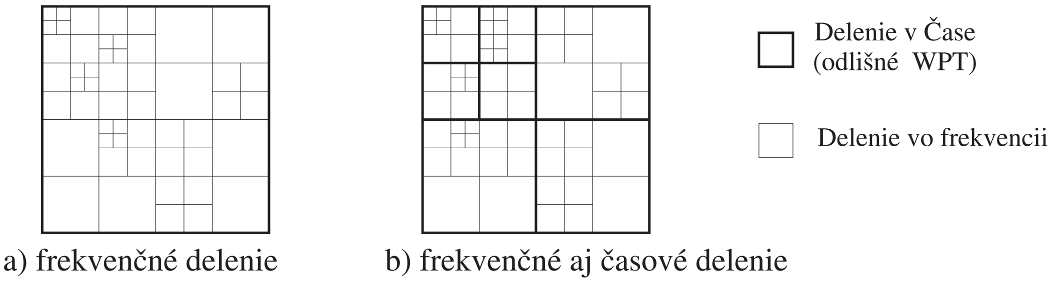
2.4.1 Používané spôsoby realizácie 2D WT

Pri TC sa najčastejšie používa neštandardný spôsob separovateľného rozkladu DWT (napr. [88]), ktorý má oproti štandardnému rozkladu menší počet operácií a pri strate informácií menej rušivý vizuálny dopad (porovnanie napr. v [28]). Oba prípady aj s odpovedajúcim postupom rozkladu sú na Obr.2.18. Viaceré medódy používajú aj rôzne



Obr. 2.18: Filtračný postup v prípade separovateľných DWT a tvar výsledného spektra

druhy 2D WPT, pričom kritériá výberu bázy môžu byť odlišné [34][35], prípadne podobný pricíp môže byť rozšírený aj do oblasit času (nazývaný aj časovo-frekvenčná segmentácia) [37]. Príklady rozdelenia spektra obrazu do subpásiem v uvedených prípadoch sú na Obr. 2.19. V praxi sa WPT s úspechom využíva aj FBI štandarde na kompresiu otlačkov prstov. Samozrejme ako transformácia sa môžu použiť viaceré roz-



Obr. 2.19: Príklady rozkladu na subpásma použitím waveletových paketov

šírenia WT ako napr. neseparovateľné 2D WT [11] prípadne Multivavelety [70][71].

2.4.2 Kvantizácia a alokácia bitov

Celá strata informácie pri transformačnom kódovaní, ak sa jedná o stratový postup sa udeje v kvantizátore. Tu mapujeme reálne hodnoty koeficientov do konečnej diskrétnej abecedy. Transformácia musí signál transformovať tak, aby kvantizátor odstránil pokiaľ možno iba nepodstatnú resp. nadbytočnú informáciu. Používajú sa dva základné prístupy kvantizácie [11]: a) nezávislá kvantizácie subpásiem b) kvantizácia pozdĺž subpásiem.

Pri nezávislej kvantizácii predpokladáme, že pásma sú navzájom dekorelované. Potom je vhodné subpásma vzhľadom na vlastnosti LVS váhovať, t.j. voliť viac kvantizačných úrovní pre nízke a stredné pásma na úkor pásiem vyšších [12], prípadne najvyššie subpásma kvôli ich zanedbateľnej energii úplne zanedbať. Najpoužívanejšie typy kvantizátorov sú:

1. uniformné kvantizátory s "mŕtvou zónou" (v zóne mapuje originálne hodnoty na nulu) alebo s optimalizovanou alokáciu bitov (napr. Loydove kvantizátory) [11]

2. vektorové kvantizátory [47]

3. kvantizátory kódované trellisom (v súčasnosti najúčinnejšie) [39]

Algoritmy alokácie bitov pomáhajú kvantizátory navrhovať tak, aby mal výstup pri danej bitovej náročnosti minimalizované isté vlastnosti, napr. skreslenie. Tieto algoritmy bývajú špecifické pre danú kompresnú metódu, ktorá kvantizáciu používa.

Pri kvantizácii pozdĺž pásiem sa predpokladá, že subpásma nie sú nezávislé. Pritom je podstatné, či banka filtrov vytvárala posun subpásiem. Kvantizátory potom môžu využiť medzipásmové závislosti. Používa sa predovšetkým:

1. vektorová kvantizácia medzi subpásmami namiesto vnútri subpásiem

2. ZT ("zerotree") kvantizátory - využívajú hierarchické závislosti medzi subpásmami na oddelenie nedôležitých resp. nulových hierarchických stromových štruktúr koeficientov (časť 2.4.3)

Vačšina súčasných najefektívnejších waveletových kóderov používa ZT kvantizátory (výnimkou sú metódy používajúce kvantizátory kódované trellisom)[39]. Princíp ZT kvantizátorov bol zovšeobecnený v konceptom kvantizácie signifikantných stromov (STQ) [64].

2.4.3 Stromy núl wavetových koeficientov a progresívne kódovanie

Kvantizácia stromami núl ("zerotrees" - ZT) predstavuje veľmi účinný spôsob využitia medzipásmovej korelácie v hierarchickom spektre 2D DWT. Efektivita pritom nevyplýva z toho, že by ostali nejaké významné lineárne závislosti medzi koeficientami v rôznych subpásmach vo waveletovom spektre (wavelety skutočne odstraňujú lineárne závislosti veľmi účinne [87]) ale z toho, že sa vyskytujú výrazné závislosti v magnitúdach koeficientov.

Koncept ZT kvantizácie zaviedli Lewis a Knowles vo svojej schéme na kompresiu obrazu použitím ortogonálnej 2D DWT [62]. Ich práca bola založená na štúdiu ľudského vizuálneho systému (LVS) a jeho citlivosti na šum. Po transformácii tu boli koeficienty hierarchicky kódované a individuálne kvantované. Hoci idea bola dobrá, implementácia nebola efektívna. Efektívnu implementáciu založenú na koncepte ZT kvantizácie vytvoril J. Shapiro v.r 1992. Jedná sa o známy EZW algoritmus [87], ktorý je opísaný v nasledujúcej časti. Ďalším podstatným zlepšením uvedeného prístupu bol algoritmus SPIHT [88], ktorý predstavuje aj v súčasnosti "state of the art" medzi waveletovými kódermi a ktorý je aj bez použitia entropického kódera účinnejší ako EZW algoritmus (princíp je opísaný v časti 2.4.3). Väčšina moderných transformačných (nie len waveletových) kompresných postupov využíva algoritmus SPIHT (prípadne jeho modifikácie).

EZW algoritmus

Algoritmus EZW (Embedded zerotree wavelet) [87] predstavuje efektívny algoritmus na kódovanie spektrálnych waveletových koeficientov použitím konceptu "vnoreného" (embedded) kódu a ZT kvantizácie.

Pri "vnorenom" (embedded) kódovaní je výstupom prúd bitov, ktorý odlišuje obraz od obrazu nulového, pričom bity v prúde sú zoradené podľa dôležitosti zostupne. Prúd bitov reprezentuje obraz pri čoraz vyššej bitovej náročnosti, pričom pridávaním ďalších bitov sa aproximácia obrazu postupne zlepšuje. Pri dosiahnutí požadovanej bitovej náročnosti sa kódovací proces jednoducho ukončí. Celý proces je podobný reprezentácii reálnych čísel postupnosťou binárnych symbolov. Každým ďalším binárnym symbolom sa presnosť aproximácie zväčšuje a predstavuje najlepšiu aproximáciu reálneho čísla daným počtom bitov. Podobne vnorený kód predstavuje najlepšiu aproximáciu spektrálnych koeficientov obrazu pri danom počte bitov.

Koncept "vnoreného" kódovania zodpovedá konceptu *progresívnych kóderov* [88], resp. konceptu progresívneho prenosu informácií, pri ktorom sa požaduje prednostný prenos informácie, ktorá nám najviac redukuje chybu pri rekonštrukcii. Označme body pôvodného obrazu $\mathbf{p}$, spektrálne waveletové koeficienty $\mathbf{c}$ a ich rekonštruované verzie $\hat{\mathbf{p}}$, resp. $\hat{\mathbf{c}}$. Potom miera skreslenia D (v zmysle MSE) je pre ortonormálne transformácie invariantná, t.j.:

$$\frac{\|\mathbf{p}-\hat{\mathbf{p}}\|^2}{N} = D_{mse}(\mathbf{p}-\hat{\mathbf{p}}) = D_{mse}(\mathbf{c}-\hat{\mathbf{c}}) = \frac{\|\mathbf{c}-\hat{\mathbf{c}}\|^2}{N} \tag{2.84}$$

$$\frac{1}{N}\sum_i\sum_j(p_{i,j}-\hat{p}_{i,j})^2 = \frac{1}{N}\sum_i\sum_j(c_{i,j}-\hat{c}_{i,j})^2 \tag{2.85}$$

kde N je počet spektrálnych koeficientov. Zo vzťahu 2.85 je zrejmé, že vyslanie presnej hodnoty $c_{i,j}$ do dekódera zníži MSE o $|c_{i.j}|^2/N$. Z toho vyplýva, že koeficienty s väčšou magnitúdou by mali byť prenesené prvé, lebo obsahujú viac informácií.

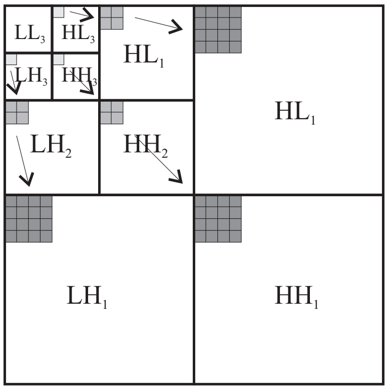
Hlavné črty EZW algoritmu môžeme zhrnúť do nasledovných bodov:

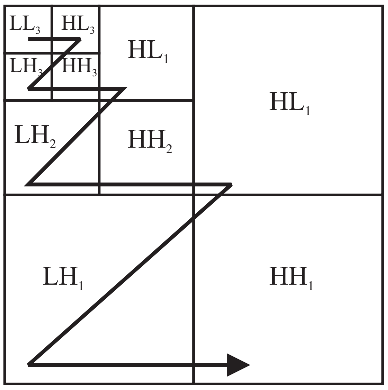
1. Rozloženie signálu na subpásma ortogonálnou, separovateľnou DWT

2. Predikcia neprítomnosti význačnej informácie pozdĺž subpásiem formou stromov núl využitím hierarchických závislostí vo waveletovom spektre podľa tvrdenia, že je oveľa ľahšie (a efektívnejšie) predikovať nevýznamnosť informácie ako významné detaily pozdĺž rôznych úrovní rozlíšenia obrazu.

3. Algoritmicky zohľadnená väčšia dôležitosť veľkých koeficientov oproti menším, bez ohľadu na miesto výskytu, t.j. v praxi snaha alokovať viac bitov pre "anomálie" v obraze na úkor "trendov" (čo sa stáva dôležité najmä pri vyšších kompresných pomeroch).

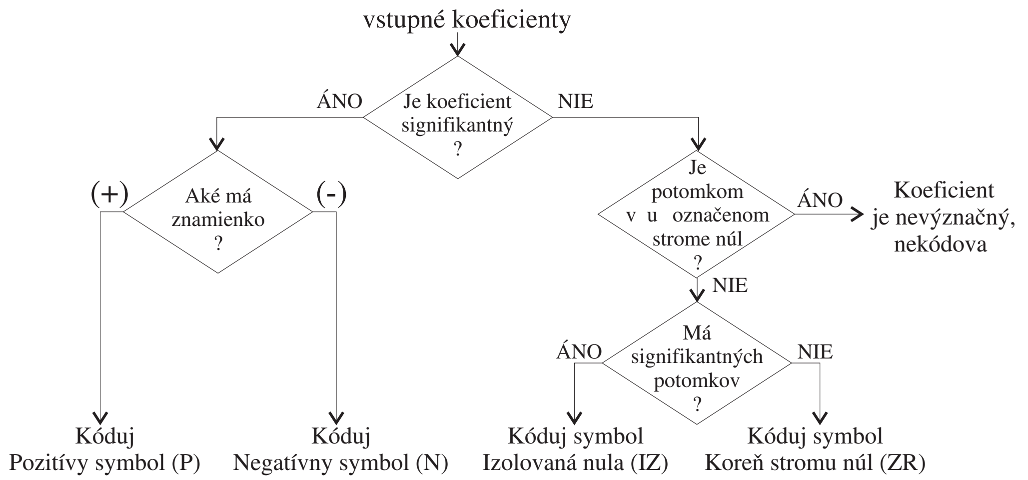
4. Entropicky kódovaná kvantizácia s vlastnosťou postupnej aproximácie (SAQ) (prístup podobný kódovaniu bitových rovín). Rekurzívnym prahovaním spektra sú vytvárané tzv. mapy signifikancie (určujúce význačnosť/nevýznačnosť jednotlivých koeficientov) voči danému prahu T_n, t.j. testovanie či $|c_{i,j}| \geq T_n$. Počiatočný prah je zvolený ako $T_0 > max|c_{i,j}|/2$, a rekurzia je $T_n = T_{n-1}/2$. Mapy signifikancie sú potom kódované s využitím prístupov z bodov 2 a 3.

a)


b)


Obr. 2.20: Zobrazenie hierarchickej závislosti koeficientov v spektre DWT (a) a znázornenie poradia testovania koeficientov na význačnosť v algoritme EZW (b)

Hierarchické závislosti medzi subpásmami v spektre DWT je znázornené na Obr.2.20a. Koeficienty, ktoré zodpovedajú jednému priestorovému miestu formujú exponenciálne sa zväčšujúce stromové štruktúry s hierarchickou závislosťou. Pri neštandardnom rozklade existujú 3 rovnocenné orientácie stromu (horizontálny, vertikálny a diagonálny). Algoritmus EZW je založený na predpoklade, že ak je nevýznačný koeficient pri koreni nejakého stromu, je pravdepodobné, že aj všetci jeho potomkovia v strome budú nevýznačný.



Obr. 2.21: Algoritmus kódovania máp signifikancií pri EZW kóderi

Začínajúc s počiatočným prahom, algoritmus testuje koeficienty subpásmach na význačnosť v poradí podľa Obr.2.20b, čím sa zabezpečí testovanie všetkých "potomkov" v strome až po ich "rodičoch". Získaná mapa signifikancie (bitmapa) je kódovaná v dvoch krokoch: a)každý koeficient je testovaný a prípadne kódovaný algoritmom na Obr.2.21 jedným zo symbolov (NEG, POS, IZ, ZR) b)pre všetky význačné koeficienty (NEG, POS) aj z krokov minulých je vyslaný doplnkový bit, spresňujúci ich hodnotu. V ďalšom kroku je prah znížený a postup sa opakuje [1] až po dosiahnutie želanej bitovej náročnosti.

Algoritmus SPIHT

Algoritmus SPIHT (Set Partitioning In Hierarchical Trees) z r. 1996 [88] je progresívny kóder založený na koncepte algoritmu EZW. Efektivita ktorú SPIHT vykazuje aj bez použitia entropického kódera je vyššia ako pri algoritme EZW (použitím aritmetického kódera sa PSNR zlepší pri danom kompresnom pomere ešte o 0.3-0.6dB). Navyše má možnosť komprimovať dáta bezstratovo použitím celočíselnej S+P DWT. SPIHT je založený na troch konceptoch:

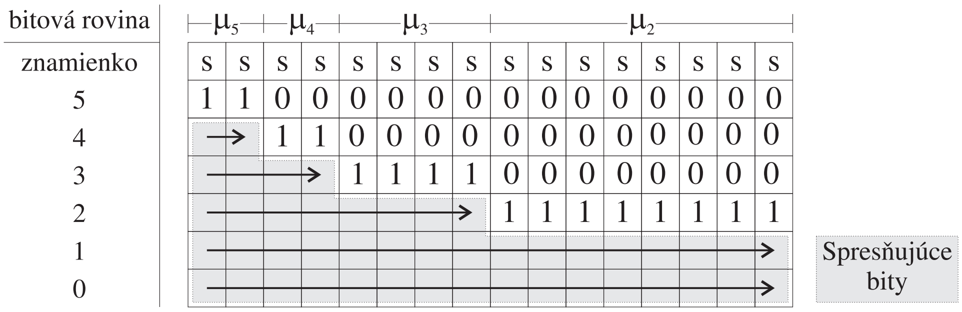
1. čiastočné zoradenie koeficientov podľa magnitúdy s prenosom pozičnej informácie pomocou algoritmu na triedenie do množín duplikovaného v dekóderi

2. prenos spresňujúcich bitov v utriedených bitových rovinách postupný prenos zo-

[1] symboly ZR z minulých krokov sa však pri testovaní už neuvažujú, t.j. začína sa znovu

radených bitových rovín

3. využitie podobností subpásiem hierarchickej štruktúry spektra DWT



Obr. 2.22: Príklad koeficientov utriedených podľa magnitúdy

t.j podstatné sú najmä procesy ako sú množiny koeficientov delené a ako je informácia o význačnosti koeficientov prenášaná. Nech koeficienty sú zoradené podľa počtu bitov potrebných na binárnu reprezentáciu ich magnitúdy (2.22). Dekóder potrebuje na rekonštrukciu koeficientov:

1. informáciu o zoradení (neprenáša sa, v dekóderi je tvorená duplikovaním triediaceho algoritmu)

2. čísla μ_n z odpovedajúce počtu koeficientov $c_{i,j}$ takých, že $2^n \leq |c_{i,j} < 2^{n+1}|$

3. spresňujúce bity

Zjednodušená implementácia progresívneho prenosu informácií je potom nasledovná:

1. pošli $n = \lfloor log_2(max_{(i,j)}|c_{i,j}|) \rfloor$ do dekódera

2. pošli μ_n a znamienko pre každý odpovedajúci koeficient (triediaci krok)

3. pošli n-tý najvýznačnejší bit pre všetky koeficienty $c_{i,j}$ pre ktoré $|c_{i,j}| \geq 2^{n+1}$ (spresňujúci krok)

4. zmenši n o 1 a choď na krok 2

Celý algoritmus má pri kódovaní a dekódovaní rovnakú komplexitu. Príjemná vlastnosť je, že dekóder, môže byť identický s kóderom pričom namiesto "pošli" vykonáme "načítaj".

Čísla μ_n sú prenášané nepriamo pomocou koeficientov signifikancie. Závislosti medzi nimi sú využité pomocou adaptívneho aritmetického kódera. Znamienka a spresňovacie bity nie sú ďalej entropicky kódované.

V súčasnosti existujú viaceré vylepšenia algoritmu a to najmä zapracovaním možnosti modelovania kontextu pri aritmetickom kódovaní(napr. [81]).

2.4.4 Neštandardné kompresné postupy

Medzi neštandardné kompresné postupy sú zaradné tie, ktoré sa buď úplne líšia od transformačného postupu podľa Obr.2.1, alebo tie ktoré obsahujú nejaký neštandardný komponent.

Od klasického postupu sa úplne líšia metódy založené na *wavelet maxime* [45]. Ich princípom je, že sa snažia extrahovať a zachovať hrany v obrázkoch, ktoré považujú pre vnímanie za smerodatné. Algoritmus je založený na kódovaní obrazu pomocou maxím v reprezentácii obrazu, transformovaného waveletovou transformáciou avšak použitím redundantného rozkladu aproximujúceho SWT pričom filtre sú navrhnuté na detekciu hrán. Rekonštrukcia sa vykonáva pomocou iteračných procedúr založených na striedavých projekciách do konvexných množín a je možná vďaka použitiu redundantnej reprezentácie signálu. Algoritmus je výpočtovo náročný, najmä kvôli iteračným algoritmom rekonštrukcie. Ak sa v obraze vyskytujú textúry, je nutné ich oddelené kódovanie.

Medzi postupy ktoré obsahujú neštandardný komponent patria aj hybridné waveletové-fraktálové kódery [42][44][43], ktoré na fraktálové kódovanie [41] využívajú waveletovú reprezentáciu signálu. Táto reprezentácia je výhodná vzhľadom na štruktúru subpásiem a evidentné medzipásmové korelácie, z ktorých fraktálové kódery môžu ťažiť vďaka schopnosti efektívne reprezentovať stromy núl vo waveletovom spektre [43]. Tieto kompresné postupy patria v súčasnosti k porovnateľne účinnym ako sú čisto waveletové postupy avšak zatial sa neodkryl celý ich potenciál.

Medzi nové princípy patrí aj využitie Burovs-Wheelerovho algoritmu na triedenie blokov [89] [90], ktorý patrí medzi najvýkonnejšie bezstratové postupy na všeobecnú kompresiu dát. Tento kompresný algoritmus adaptovali na použitie v spektre waveletovej transformácie v [91].

2.5 Vytýčenie cieľov dizertačnej práce

Na základe štúdia problematiky transformačných kompresných postupov a možností využitia waveletovej transformácie som ako základ zobral lifting schému a progresívne kódovanie obrazu. Ako jedny s najmodernejších postupov používaných pri kompresii obrazu použitím WT by mali tvoriť teoretický a aplikačný rámec dizertačnej práce. Konkrétne oblasti práce by sa dali sformulovať v nasledovných bodoch:

- efektívne využitie známych BT v progresívnom kóderi
- rozšírenie WT zmiešaním báz viacerých WT, t.j. hybridizáciou báz
- realizácia čo najjednoduchších neseparovateľných 2D WT
- použitie 2D prediktorov v lifting schéme
- zvýraznenie predikčného princípu v lifting schéme pri návrhu nových transformácií
- využitie priečkových štruktúr lifting schémy pri filtrácii obrazu

Základnou požiadavkou je, že ak vzniknú nejaké nové konštrukcie WT, mali by byť vhodné aj na použitie pri progresívnom kódovaní obrazu. Cieľom je aby vo vzniknutých postupoch bola možnosť využitia lifting schémy, t.j. možnosť použitia celočíselnej aritmetiky a tým jednoduchej hardwarovej implementácie a uvedenia do praxe.

Kapitola 3

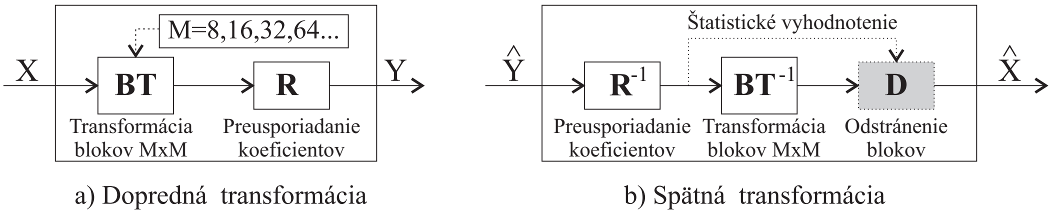
Progresívne kódovanie s využitím blokových transformácií

V nedávnej dobe začali vznikať aplikácie snažiace sa použiť typ progresívneho kódera navrhnutého pôvodne pre DWT s neštandardným rozkladom (EZW, SPIHT) na iné typy transformácií. Po adekvátnom preusporiadaní koeficientov môžeme v progresívnom kóderi efektívne využiť širokú triedu existujúcich blokových transformácií. V [63] bola podobným postupom DWT nahradená DCT II zo štandardu JPEG (veľkosť bloku 8x8). Tento postup je známy pod názvom EZDCT. Princíp algoritmu SPIHT bol taktiež s úspechom využitý pri kóderoch pracujúcich s ortogonálnymi a biortogonálnymi prekryvnými transformáciami (LOT, GenLOT, GLBT) [67].

Blokové ortogonálne transformácie s veľkosťou bloku M sú ekvivalentné uniformnej M-pásmovej ortogonálnej banke filtrov (časť 2.1.1). Taktiež na DWT sa môžeme pozerať ako na špeciálny prípad M-pásmového rozkladu signálu bankou filtrov. Pritom $M = U + 1$, kde U je počet úrovní rozkladu t.j. hĺbka rekurzie pri filtrovaní DP pásma. Bázové funkcie DWT prekrývajú hranice blokov (okrem triviálneho Haarovho prípadu) s rôznou mierou prekryvu pri iných úrovniach rozkladu.

Z uvedeného vyplýva, že až na vznik blokového efektu pri BT a výhody DWT vyplývajúce zo štrukturovanosti bázy získanej rekurziou filtrácie, sú oba prístupy podobné, t.j. spektrálne koeficienty majú podobný charakter, odlišujúc sa v priestorovom usporiadaní.

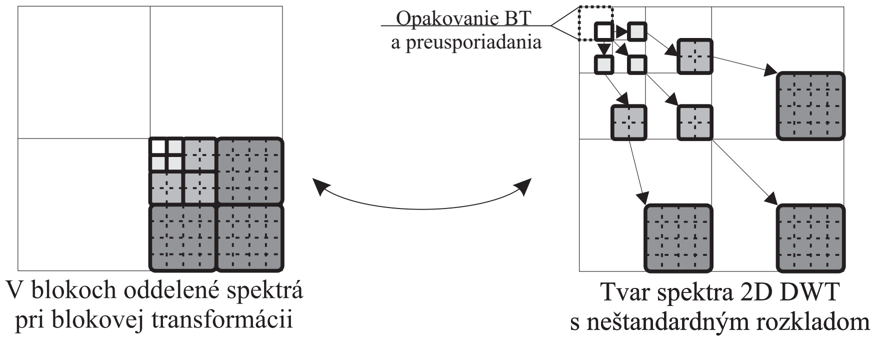
V tejto časti sa zaoberám spôsobom nahradenia DWT blokovými transformáciami v algoritme SPIHT a ďalším zlepšením výsledkov uvedených v [63] rozšírením uvedeného prístupu (zväčšenie blokov, opakovanie transformácie v DP časti, použitie iných



Obr. 3.1: Náhrada DWT v algoritme SPIHT blokovými transformáciami

ortogonálnych BT).

Spôsob nahradenia DWT pomocou BT je zobrazený na Obr.3.1. Po rozdelení obrazu na bloky želanej veľkosti a po ich transformácii, je nutné preusporiadať koeficienty do tvaru, ktorý SPIHT očakáva, t.j. tvar spektra 2D DWT s neštandardným rozkladom. Najvýhodnejší spôsob preusporiadania je zobrazený na Obr.3.2, ostatné spôsoby zhoršujú pri danom kompresnom pomere PSNR minimálne o 0.15dB [32].



Obr. 3.2: Spôsob preusporiadania spektrálnych koeficientov BT pre SPIHT algoritmus

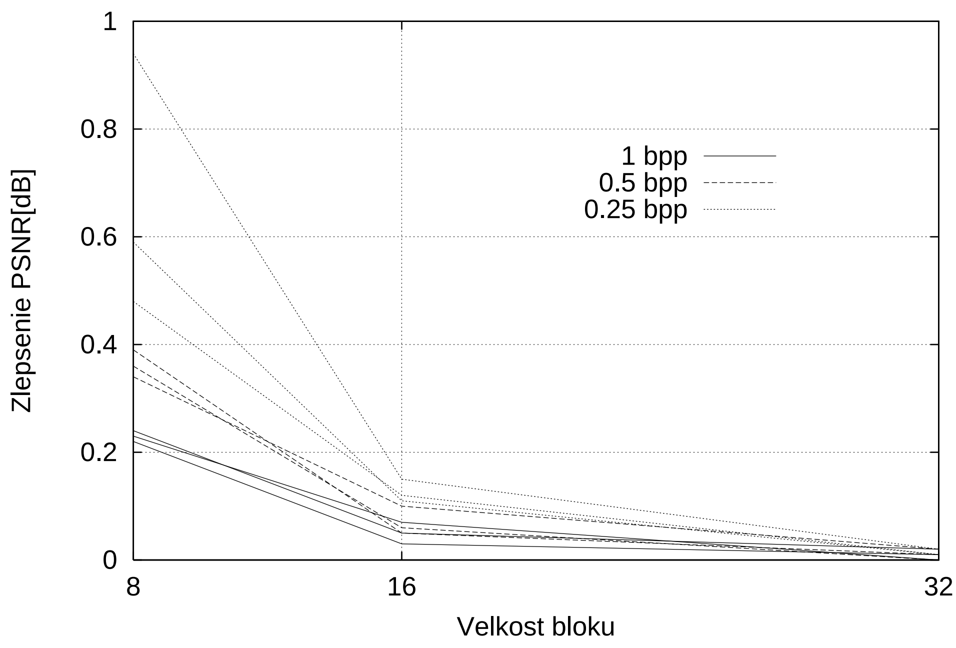
Keďže pri blokových transformáciách vzniká blokový efekt, je na Obr.3.1 navrhnuté (zatiaľ nie implementované) pri dekódovaní použiť algoritmy na potlačenie blokového efektu, napr. typu použitého v [66]. Tento poskytuje robustnosť pre rôzne obrazy a kvantizačné stratégie so súčasným zlepšením PSNR (cca. 1.1dB pri JPEG algoritme). Celý algoritmus sa tak stáva výpočtovo asymetrický, čo pre niektoré aplikácie môže byť výhodné. Príkladom je napr. snímanie neopakovateľných záberov, kde potrebujeme čo najjednoduchšie (a najrýchlejšie) nasnímať a uchovať vstupné data, pričom výpočtovo náročnejšia časť sa môže uskutočniť v procese dekódovania.

Stupne voľnosti ktoré nám BT ponúkajú je možnosť voľby veľkosti bloku a príslušného typu BT. Pri použití menších blokov ostáva po preusporiadaní koeficientov najnižšie DP subpásmo výrazne veľké. Keďže má podobný charakter ako pôvodný obraz, je výhodné celý proces BT a preusporiadania koeficientov v najnižšom DP subpásme zopakovať, čím zvýšime celkovú kompakciu energie. Dosiahnuté výsledky sú zobrazené v grafe na Obr.3.3. Vidíme, že zlepšenie PSNR dosahuje až 1dB.

Spomedzi použitých ortogonálnych transformácií najlepšie výsledky dosahovala samozrejme DCT II. Zväčšovaním bloku sa zlepšovali výsledky (po veľkosť bloku 16 príp. 32) v zmysle PSNR, pričom na prekvapenie blokový jav bol výrazne menej rušivý ako pri bloku veľkosti 8. Pri niektorých obrazoch boli dokonca výsledky lepšie (až 1.5dB) ako pri originálnom algoritme SPIHT používajúcom FBI 9-7 pár filtrov. Výsledky sú uvedené v Tabuľke 3.1 a na Obr.3.5. Pri veľkosti bloku 16, ktorá sa javila ako najvhodnejšia, by sme mohli použitím iterácie v DP časti spektra PSNR ďalej zlepšiť o 0.1-0.15dB.

Použitím ďalších ortogonálnych BT dostávame v niektorých prípadoch výsledky lepšie ako JPEG, EZW, DCT 8x8 (Obr.3.4). Výsledky najlepšie z hľadiska vizuálneho a aj s ohľadom na odstup signál/šum sa dosahovali s veľkosťami blokov 16 (pri vačších kompresných pomeroch) a 32 (pri menších kompresných pomeroch).

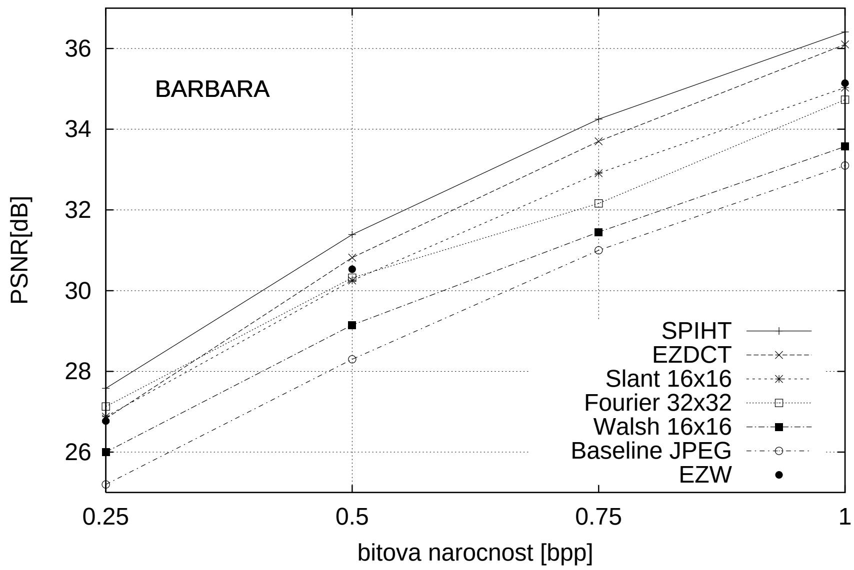
Vizuálne možno porovnať dosiahnuté výsledky pri kompresii obrazu "Lena" pomocou ortogonálnych BT použitím algoritmu SPIHT na Obr.3.6



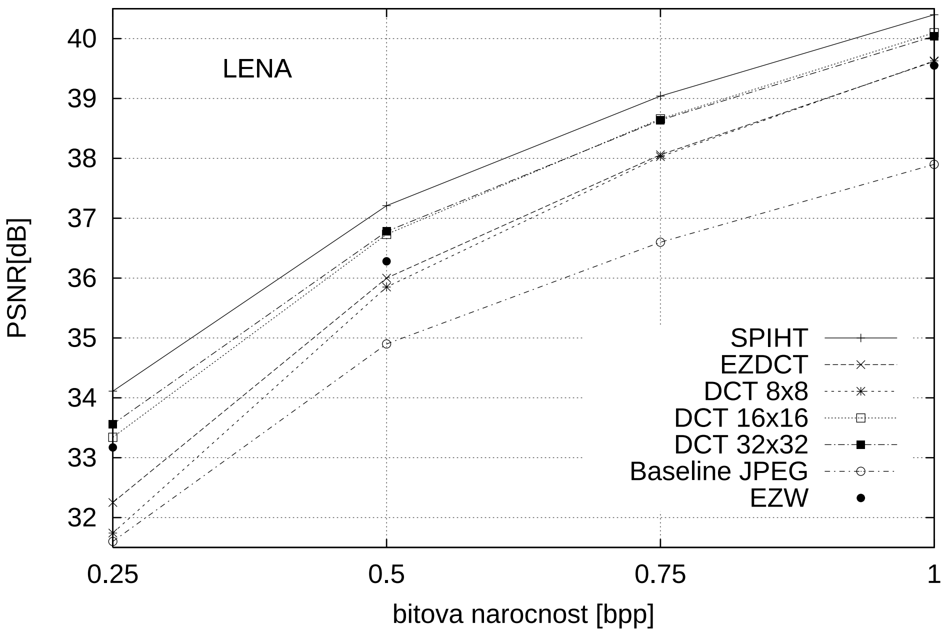
Obr. 3.3: Zlepšenie PSNR kódovaného obrazu opakovaním blokovej transformácie v najnižšom DP subpásme preusporiadaných koeficientov časti spektra

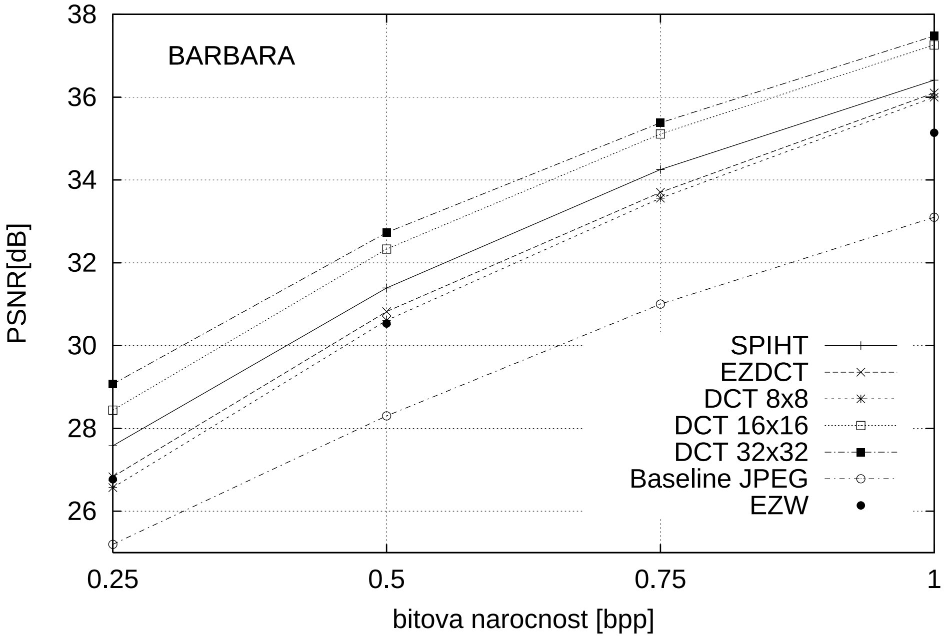
Bit. náročnosť [Bpp]	Transformačný postup					Testovací obraz
	SPIHT	EZDCT	DCT 8	DCT 16	DCT 32	
1	40.4	39.62	39.63	40.1	40.04	Lena 512x512 8 bpp
0.75	39.04	38.06	38.03	38.66	38.64	
0.5	37.21	36	35.85	36.73	36.78	
0.25	34.11	32.25	31.74	33.34	33.56	
1	36.41	36.1	36	37.26	37.48	Barbara 512x512 8 bpp
0.75	34.25	33.7	33.56	35.11	35.38	
0.5	31.39	30.82	30.61	32.33	32.73	
0.25	27.58	26.83	26.57	28.44	29.07	
1	36.55	-	35.97	36.48	36.52	Goldhill 512x512 8 bpp
0.75	34.95	-	34.38	34.87	34.92	
0.5	33.13	-	32.35	33.02	33.11	
0.25	30.56	-	29.41	30.33	30.54	

Tabuľka 3.1: Porovnanie PSNR pri kompresii obrazu algoritmom SPIHT používajúceho transformácie DCTII (veľkosti bloku 8,16,32) s inými postupmi



Obr. 3.4: Najlepšie výsledky rôznych typov ortogonálnych BT použitých v algorime SPIHT





Obr. 3.5: Porovnanie PSNR pri kompresii obrazu algoritmom SPIHT použitím transformácie DCTII a rôznej veľkosti bloku (8,16,32) s inými postupmi (s využitím hodnôt z Tabuľky 3.1)

a)Originál b) JPEG

c)DCT 8x8 d) DCT 16x16 e) DCT 32x32

f)SS 16x16 g) WS 16x16 h) FP 32x32

Obr. 3.6: Časť obrazu Lena kódovanej na 0.25 bpp: a)originál b)baseline JPEG, 31.6dB c) DCT 8x8 +SPIHT, 31.74dB d)DCT 16x16 +SPIHT, 33.34dB e)DCT 32x32 +SPIHT, 33.56dB f)SS 16x16 +SPIHT, 26.88dB g)WS 16x16 +SPIHT, 26.0dB h)FP 32x32 +SPIHT, 27.13dB. Pozn: SS=Šikmá transformácia v sekvenčnom usporiadaní bázových fnc., WS=Walshova transformácia v sekvenčnom usporiadaní, FP=Fourierova transformácia preusporiadaná [25]

Kapitola 4

Subpásmové transformácie a DWT

Pre 2-pásmovú banku filtrov (Obr.2.4) môžeme operácie vykonávané pri analýze a pri syntéze rozpísať ako:

$$c(n) = \sum_k \tilde{h}(2n-k)x(k) \qquad d_{(n)} = \sum_k \tilde{g}(2n-k)x(k) \tag{4.1}$$

$$\hat{x}(n) = \sum_k h(n-2k)c(k) + \sum_k g(n-2k)d(k) \tag{4.2}$$

Vzťahy (4.1)(4.2) môžeme prepísať do maticového tvaru ako transformácie (2.3)(2.4):

$$\bar{X} = \mathbf{T}_a\bar{x} \qquad \hat{\bar{x}} = \mathbf{T}_s\bar{X} \tag{4.3}$$

kde $\bar{x}$, $\bar{X}$, $\hat{\bar{x}}$ sú stĺpcové vektory vstupného, transformovaného, výstupného signálu a $\mathbf{T}_a$, $\mathbf{T}_s$ sú transformačné matice pre analýzu, resp. pre syntézu. Predpokladajme konečnú dĺžku L vstupného signálu a kruhovú konvolúciu vo FB. Potom $\bar{x}$, $\bar{X}$,$\mathbf{T}_a$, $\mathbf{T}_s$ môžeme použitím analogického prístupu ako v [13] vyjadriť v tvare:

$$\bar{x}^T = [x(0), x(1), \ldots, x(N-1)] \tag{4.4}$$

$$\bar{X}^T = [c(0), c(1), \ldots, c(N/2-1), d(0), d(1), \ldots, d(N/2-1)] \tag{4.5}$$

$$\mathbf{T}_a = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{H}} \\ \tilde{\mathbf{G}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{h}(0) & \tilde{h}(-1) & \cdots & & \cdots & \tilde{h}(1) \\ \cdots & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(0) & \tilde{h}(-1) & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{h}(-1) & \cdots & & \cdots & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(0) \\ \tilde{g}(0) & \tilde{g}(-1) & \cdots & & \cdots & \tilde{g}(1) \\ \cdots & \tilde{g}(1) & \tilde{g}(0) & \tilde{g}(-1) & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{g}(-1) & \cdots & & \cdots & \tilde{g}(1) & \tilde{g}(0) \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

$$
\mathbf{T}_s = (\mathbf{H}\mathbf{G}) = \begin{pmatrix} h(0) & \vdots & \cdots & h(-1) & g(0) & \vdots & \cdots & g(-1) \\ h(1) & h(-1) & \cdots & \vdots & g(1) & g(-1) & \cdots & \vdots \\ \vdots & h(0) & \cdots & & \vdots & g(0) & \cdots & \\ & h(1) & \cdots & \vdots & & g(1) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & h(0) & \vdots & \vdots & \cdots & g(0) \\ h(-1) & & \cdots & h(1) & g(-1) & & \cdots & g(1) \end{pmatrix} \tag{4.7}
$$

Filtračné matice $\tilde{H}$, $\tilde{G}$ sú rozmerov $N \times \frac{N}{2}$. Ich riadky sú tvorené kruhovým posunom impulzových charakteristík príslušných filtrov. V maticiach $\tilde{H}$, $\tilde{G}$ sú kruhovým posunom impulzových charakteristík tvorené stĺpce, pričom matice sú rozmerov $\frac{N}{2} \times N$.

Pri úplnej rekonštrukcii bez oneskorenia platí $\bar{x} = \hat{\bar{x}}$. Použitím vzťahu (4.3) potom dostávame:

$$
\mathbf{I}_N = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{N/2} & \mathbf{0}_{N/2} \\ \mathbf{0}_{N/2} & \mathbf{I}_{N/2} \end{pmatrix} = \mathbf{T}_a\mathbf{T}_s = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{H}} \\ \tilde{\mathbf{G}} \end{pmatrix} (\mathbf{H}\,\mathbf{G}) = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{H} & \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{G} \\ \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{H} & \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{G} \end{pmatrix} \tag{4.8}
$$

z čoho vyplýva:

$$
\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{H} = \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{G} = \mathbf{I} \qquad \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{G} = \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{H} = \mathbf{0} \tag{4.9}
$$

Vzťah (4.9) je ekvivalentný s biortogonálnymi podmienkami na úplnú rekonštrukciu (2.23)(2.24), predstavuje ich alternatívne odvodenie v maticovom tvare. Zavedením ortogonality do transformačných matíc $\mathbf{T}_a$ a $\mathbf{T}_s$ analogicky ako pri DOT (2.6), dostávame nekauzálne ortogonálne riešenie FB (2.15)-(2.19).

Pre implementáciu rekurzívnych bánk filtrov s rekurziou v DP časti (DWT) môžeme odvodiť ekvivalentné transformačné matice, čím spájame filtračný koncept (časť 2.1.2) a transformačný koncept (časť 2.1). Transformačné matice potom majú tvar:

$$
\mathbf{T}_a = \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{H}}_1\tilde{\mathbf{H}}_2\ldots\tilde{\mathbf{H}}_{\frac{N}{2}}\tilde{\mathbf{H}}_N \\ \tilde{\mathbf{G}}_1\tilde{\mathbf{H}}_2\ldots\tilde{\mathbf{H}}_{\frac{N}{2}}\tilde{\mathbf{H}}_N \\ \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ \tilde{\mathbf{G}}_{\frac{N}{4}}\tilde{\mathbf{H}}_{\frac{N}{2}}\tilde{\mathbf{H}}_N \\ \tilde{\mathbf{G}}_{\frac{N}{2}}\tilde{\mathbf{H}}_N \\ \tilde{\mathbf{G}}_N \end{pmatrix}}_{N} \begin{matrix} \}1 \\ \}1 \\ \vdots \\ \}\frac{N}{8} \\ \}\frac{N}{4} \\ \}\frac{N}{2} \end{matrix} \qquad \mathbf{T}_s^T = \underbrace{\begin{pmatrix} (\mathbf{H}_N\mathbf{H}_{\frac{N}{2}}\ldots\mathbf{H}_1\mathbf{H}_1)^T \\ (\mathbf{H}_N\mathbf{H}_{\frac{N}{2}}\ldots\mathbf{H}_1\mathbf{G}_1)^T \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ (\mathbf{H}_N\mathbf{H}_{\frac{N}{2}}\mathbf{G}_{\frac{N}{4}})^T \\ (\mathbf{H}_N\mathbf{G}_{\frac{N}{2}})^T \\ \mathbf{G}_N^T \end{pmatrix}}_{N} \begin{matrix} \}1 \\ \}1 \\ \vdots \\ \}\frac{N}{8} \\ \}\frac{N}{4} \\ \}\frac{N}{2} \end{matrix} \tag{4.10}
$$

kde matice $\tilde{\mathbf{H}}_N$, $\tilde{\mathbf{G}}_N$, $\mathbf{H}_N$, $\mathbf{G}_N$ sú identické s maticami $\tilde{\mathbf{H}}$, $\tilde{\mathbf{G}}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{G}$ použitými vo vzťahoch (4.6)-(4.9). Matice s menším indexom sú tvorené analogicky, pričom ich rozmery sú náležite menšie.

Kapitola 5

Hybridné wavelety

Hybridnými waveletmi nazývam bázové funkcie takej WT, ktorej báza vznikla zmiešaním báz viacerých WT. Potom báza nie je tvorená posunmi a zmenou mierky jedného základného waveletu. Principiálne potom môžeme rozlíšiť dva postupy zmiešavania (hybridizácie) waveletov:

1. zmiešanie báz v jedom rozmere použitím rôznych koeficientov pre zmenu rozlíšenia, t.j. použitie rôznych bánk filtrov na rôznych úrovniach rozlíšenia

2. zmiešanie báz prechodom do viacerých rozmerov, t.j. použitie rôznych báz v rôznych dimenziách

V postupe č.1 sa pôvodná štruktúra MRA nezachováva, avšak hierarchia podpriestorov ostáva zachovaná. Z vlastností (2.36)(2.40) vyplýva, že v prípade zmiešania rôznych ortogonálnych WT ostávajú zachované vzťahy ortogonality medzi podpriestormi a ich bázami. Analogicky by sme mohli odvodiť podobné vlastnosti pre prípad biortogonálny, resp. iné zovšeobecnenia WT.

Postup č.2 implikuje použitie separovateľných rozkladov vo viacerých rozmeroch, t.j. môžeme použiť štandardný resp. neštandardný rozklad. Tento postup je ekvivalentný tvorbe zmiešanej 1D bázy prechodom do vyššieho rozmeru [24]. Použitím DOT bol tento koncept tvorby zmiešaných báz rozpracovaný v [22]. Takéto hybridné wavelety bude najvýhodnejšie použiť ak majú vstupné dáta odlišný charakter v smeroch X a Y, resp. požadujeme v daných smeroch odlišný charakter transformácie.

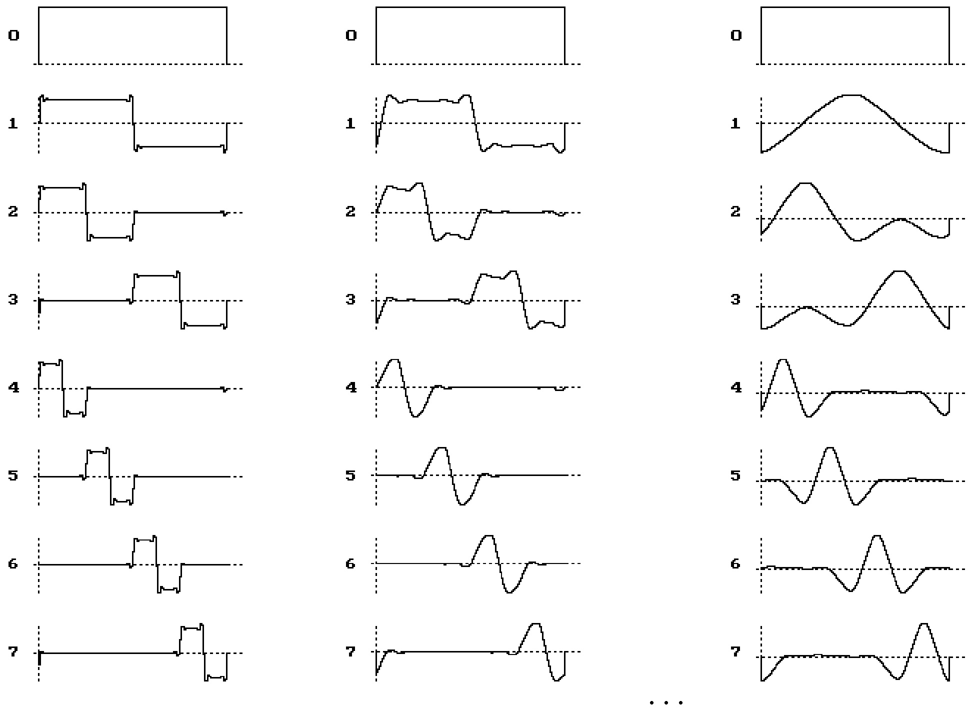
Pri kompresii resp. reprezentácii obrazu pracujeme s diskrétnymi bázami, dvojrozmerným signálom a konečným počtom úrovní rozlíšenia DWT. Použitím oboch uvedených postupov dostávame nové bázy s vlastnosťami, ktoré môžeme ovplyvniť výberom vhodných waveletov a spôsobu ich zmiešania. Oba uvedené postupy sa navzájom nevylučujú, t.j. možno ich použiť spolu v jednej transformácii. Zároveň možno tieto princípy aplikovať na iné zovšeobecnenia WT (napr. biortogonálne wavelety, wavelety na intervale, waveletové pakety). Keďže postup hybridizácie č.2 je intuitívnejší v ďalšom texte sa budem zaoberať najmä prístup č.1 k hybridizácii.

Hybridné wavelety získane postupom č. 1 majú stupeň voľnosti v možnosti rôzne dekorelovať resp. reprezentovať signál na rôznych úrovniach rozlíšenia. Tieto hybridné wavelety budú najefektívnejšie reprezentovať tie dáta, ktoré majú výrazne rozdielny charakter na rôznych úrovniach rozlíšenia. Keďže úrovne rozkladu použitých DWT sú zoradené sériovo, stávajú sa vlastnosti použitých DWT kritické a to najmä z hľadiska regularity (časť 2.2.6, bod 3), resp. počtu nulových momentov (časť 2.2.6, bod 2).

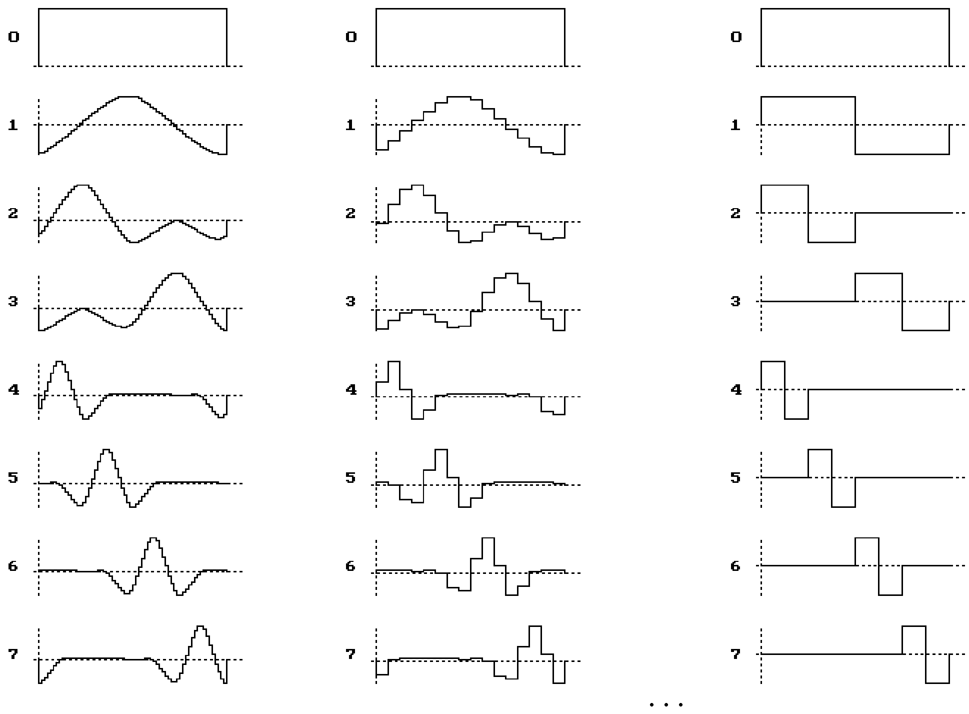
Príklad 1D hybridnej bázy je na Obr.5.1. Príklad použitia hybridných waveletov na kompresiu obrazu[1] a dosiahnuté výsledky sú znázornené v Tabuľke 5.1. Použité boli syntetické obrazy s ostrými hranami, pri ktorých mnohé wavelety nie sú veľmi účinné. Vidíme, že jednoduchou hybridizáciou môžeme dosiahnuť lepšie výsledky vo veľkom rozsahu kompresných pomerov. Z hľadiska PSNR sú vysledky znázornené aj graficky na Obr.5.2. Z výsledkov dosiahnutých pri rôznych usporiadaniach uvedených hybridov vidíme, že pri FBI 9-7 wavelete (a nielen pri ňom) môžeme ťažiť z hybridizácie s inými waveletmi a to pri vysokých ako aj nízkych kompresných pomeroch. Na vizuálne porovnanie uvedených výsledkov sú príklady výsledkov zobrazené na Obr.5.3. Z vykonaných testov vyplýva, že pri vysokých kompresiách je výhodné použiť najprv viac regulárny wavelet a následne wavelet s čo najkratšími impulzovými charakteristikami jeho generujúcich filtrov.

Získané výsledky sú v súlade s požiadavkou získania čo najvyššej hladkosti waveletov pri relatívne krátkych impulzových charakteristikách filtrov odpovedajúcej FB (časť 2.2.6).

[1] Použitý kompresný algoritmus je SPIHT (časť 2.4.3)



a)Coiflet6(1)+Haar(6) b)Coiflet6(3)+Haar(4) · · · c)Coiflet6(7)

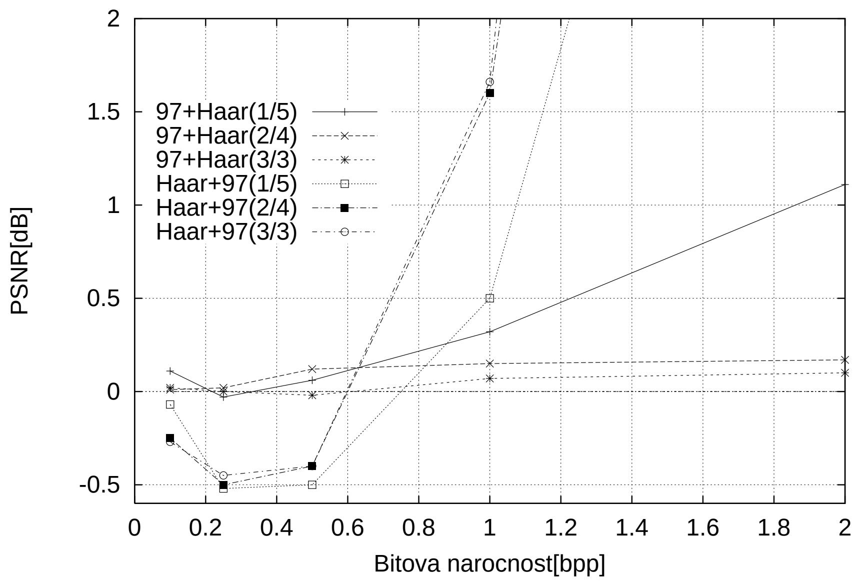


d)Haar(1)+Coiflet6(6) e)Haar(3)+Coiflet6(4) · · · f)Haar(7)

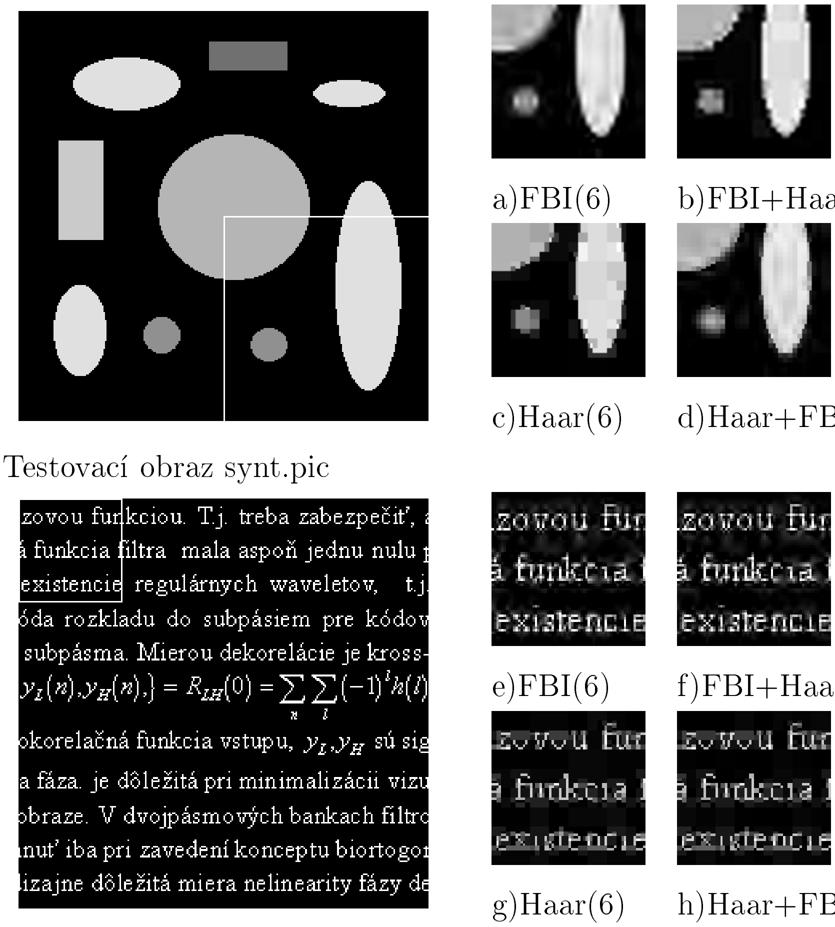
Obr. 5.1: Bázové funkcie vybraných hybridných transformácií (postup č.2) z waveletov: Coiflet6, Haar. Zobrazených prvých 8 z $N = 128$ bázových funkcií. Pozn.: (x)=rozklad vykonaný x-krát

Obraz	Náročnosť [bpp]	Odstup signál-šum (PSNR) [dB]							
		FBI 9-7	Haar	FBI 9-7 + Haar			Haar + FBI 9-7		
				(1/5)	(2/4)	(3/3)	(1/5)	(2/4)	(3/3)
synt.pic	0.5	39.25	73.67	46.14	52.65	62.28	44.01	40.78	39.69
	0.25	31.11	38.40	33.11	33.73	35.34	32.60	31.72	31.36
	0.1	24.63	23.79	24.43	23.70	23.40	24.79	25.0	24.79
	0.05	21.52	20.27	20.80	20.52	20.23	21.41	21.56	21.51
	0.01	15.99	14.43	16.03	15.84	15.29	14.63	15.08	15.50
text.pic	2	31.53	50.37	32.64	31.70	31.63	38.77	46.01	50.25
	1	21.25	22.93	21.53	24.40	21.31	21.73	22.83	22.91
	0.5	16.06	15.60	16.12	16.18	16.04	15.58	15.60	15.65
	0.25	13.34	12.80	13.31	13.36	13.34	12.82	12.85	12.85
	0.1	11.68	11.42	11.57	11.69	11.70	11.61	11.43	11.42

Tabuľka 5.1: Výsledky kompresie testovacích obrazov algoritmom SPIHT s použitím hybridných waveletov. Pozn.: (x/y)= počet rozkladov uskutočnených prvým (x) resp. druhým (y) waveletom v hybridnom uspoiadaní



Obr. 5.2: Porovnanie účinnosti FBI 9-7 waveletu s jeho hybridmi použitím Haarovho waveletu pri kompresii obrazu "text.pic". Pozn.: vynesené sú diferencie oproti FBI 9-7 waveletu.



a)FBI(6) b)FBI+Haar(2/4)

c)Haar(6) d)Haar+FBI(2/4)

Testovací obraz synt.pic

e)FBI(6) f)FBI+Haar(3/3)

g)Haar(6) h)Haar+FBI(3/3)

Testovací obraz text.pic

Obr. 5.3: Kompresia testovacích obrazov algoritmom SPIHT použitím FBI 9-7 waveletu, Haarovho waveletu a ich hybridov. V prípadoch a)-d) bpp=0.05, pre e)-h) bpp=0.5. Pozn.: Dosiahnuté PSNR sú uvedené v Tabuľke 5.1. (x),(x/y)= počet rozkladov uskutočnených prvým (x) resp. druhým (y) waveletom v hybridnom uspoiadaní

Kapitola 6

Lifting schéma a algoritmus SPIHT

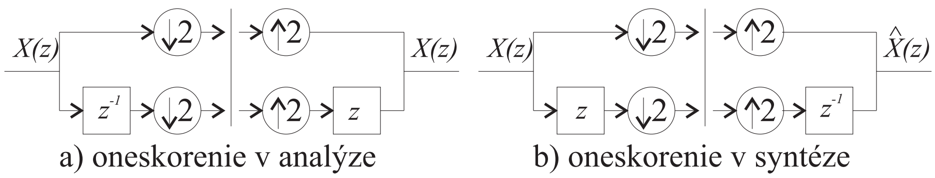
V časti 2.3 bola lifting schéma zavedená použitím konceptu polyfázového rozkladu FB (časť 2.3.1), ktorý v klasickom tvare obsahuje v analyzačnej HP časti oneskorenie. Klasická interpretácia krokov liftingu (operácií predikcie a aktualizácie) vzniknutých faktorizáciou polyfázovej matice však obsahuje predstih [75], ktorý podmieňuje prirodzenejšie delenie signálu na párne a nepárne zložky. Včasti 6.1 sú uvedené 2 lemmy poskytujúce súvis spomenutých prípadov a návod na prechod z jedného tvaru do tvaru druhého.

V časti 6.2 je za pomoci konceptu "elementárnych" filtrov vysvetlený spôsob eliminácie aliasingu v lifting schéme.

Po vykonaní lifting schémy "in-place" (t.j. nepoužitím prídavnej pamäte v pribehu výpočtu) spektrum ostane preuspriadané v tzv. lifting reprezentácii odlišnej od klasickej štruktúry subpásiem (tzv. Mallatova reprezentácia). Algoritmy preusporiadania koeficientov pre viaceré spôsoby realizácie WT založené na bitových manipuláciách s indexami koeficientov sú diskutované v časti 6.3.

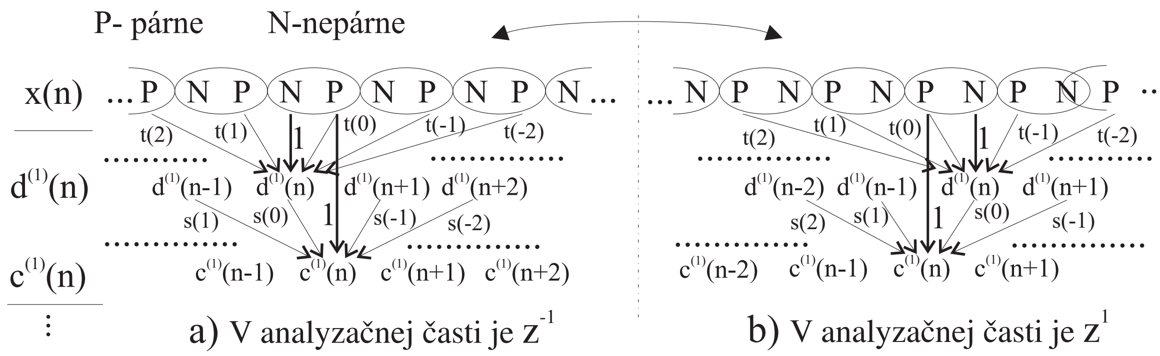
Spôsob a výhody symetrického rozšírenie signálu pri lifting schéme sú diskutované v časti 6.4 pričom je testovaná jeho efektivita pri použití SPIHT algoritmu. Efektivita SPIHT algoritmu výrazne závisí od normalizačných konštant faktorizovaných filtrov, t.j. výsledného dynamického rozsahu spektra. Použitím vhodnej renormalizačnej konštanty r je v časti 6.4 zlepšené PSNR o 0-0.2dB pre štiroký rozsah kompresných pomerov a pri použití rôznych filtrov. Renormalizačný proces má charakter HP filtrácie.

6.1 Zmeny polyfázovej reprezentácie



Obr. 6.1: Rôzne tvary polyfázového rozkladu FB bez celkového oneskorenia

V klasickom prípade polyfázového rozkldau (časť 2.3.1) po faktorizácii polyfázových matíc $\tilde{\mathbf{P}}(z)$ resp. $\mathbf{P}(z)$ môžeme vzniknuté polynómy $S_i(z)$ a $T_i(z)$ interpretovať v čase podľa Obr.6.2a. Táto reprezentácia je podmienená zvoleným polyfázovým rozkladom filtrov (2.70)(2.71) a zodpovedá realizácii na Obr.6.1a. Pri lifting schéme sa však používa najmä tvar podľa Obr.6.1b. Prechod medzi týmito dvoma tvarmi je možný jednoduvhou zámenou matíc $\tilde{\mathbf{Z}}(z)$ a $\mathbf{Z}(z)$ vo vzťahoch (2.72)-(2.74) za predpokladu, že platí $\tilde{\mathbf{Z}}(z) = \mathbf{Z}(z)^{-1}$).



Obr. 6.2: Interpretácia predikčných polynómov $S_i(z)$ a $T_i(z)$ v časovej oblasti pre prvý krok liftingu a duálneho liftingu (ostatné kroky analogicky)

Interpretácia $S_i(z)$ a $T_i(z)$ v oboch prípadoch je znázornená na Obr.6.2, pričom súvis medzi uvedenými prípadmi Obr.6.1ab, resp. Obr.6.2ab poskytuje nasledujúca Lemma [33]:

Lemma 1: *Časová reverzia $S_i(z)$ a $T_i(z)$ je ekvivalentná časovej reverzii filtrov pre analýzu a syntézu vtedy, ak vymeníme $\tilde{\mathbf{Z}}(z)$ s $\mathbf{Z}(z)$, za predpokladu, že $\tilde{\mathbf{Z}}(z) = \mathbf{Z}(z)^{-1}$.*

Dôkaz: V ortogonálnom prípade tvrdenie priamo vyplýva z podmienky paraunitarity $\tilde{\mathbf{P}}(z) = \mathbf{P}(z^{-1})$ skombinovanej so vzťahmi (2.74)(2.75). Vo všeobecnosti tvrdenie môžeme rozložiť do dvoch : **a)** Časová reverzia filtrov je ekvivalentná symetrickému priestorovému otočeniu $S_i(z)$ a $T_i(z)$ okolo bodu, ktorý predikujú (tvrdenie vyplýva zo štruktúry grafov predikcie, ktoré majú periódu 2 a princípu superpozície) **b)** Priestorová reverzia $S_i(z)$ a $T_i(z)$ z prípadu a) je ekvivalentná časovej reverzii $S_i(z)$ a $T_i(z)$ a zámene matíc $\tilde{\mathbf{Z}}(z)$ s $\mathbf{Z}(z)$, čo zodpovedá prípadom a) a b) na Obr.6.2, z ktorých je uvedené tvrdenie zrejmé.

Uvedená lemma spája klasický prístup [76] s [75], kde faktorizujú maticu $\mathbf{P}(z)^T$, v analyzačnej časti dostávajú filtre časovo obrátené a rozklad na párne a nepárne zložky signálu odpovedá schéme na Obr.6.1b.

Ak faktorizujeme $\tilde{\mathbf{P}}(z)$ vytvorenú s predpokladom, že sme v analýze použili oneskorenie (z^{-1}) a chceme prejsť do kompaktnejšieho tvaru podľa Obr.6.1b, potom môžeme interpretovať $s(n)$ a $t(n)$ pomocou nasledovnej lemmy:

Lemma 2: *Ak pri faktorizácii $\tilde{\mathbf{P}}(z)$ bolo predpokladané v anal. časti oneskorenie (Obr.6.1a), potom pri prechode do sústavy s predstihom v anal. časti (Obr.6.1b) získame nové koeficienty $s_i(n)$ a $t_i(n)$ posunom pôvodných:*

$$t_i^{new}(n) = t_i(n-1) \qquad s_i^{new}(n) = s_i(n+1) \tag{6.1}$$

Dôkaz: Tvrdenie je zrejmé z porovnania $s(n)$ a $t(n)$ v častiach a) a b) obrázku Obr.6.2 a úvahou, že dalšie stupne predikcie majú obdobnú šrtuktúru.

6.2 Eliminácia aliasingu v lifting schéme

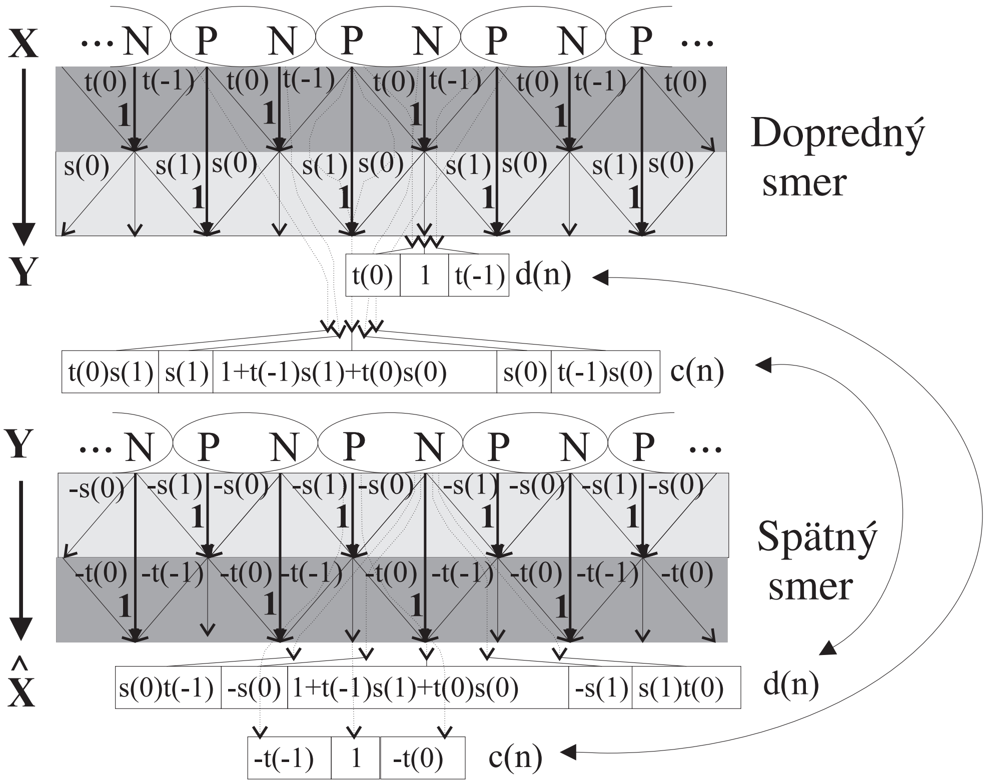
Označme $c(n)$ a $d(n)$ párne resp. nepárne koeficienty signálu. Potom kroky duálneho liftingu a liftingu pri analýze môžeme na základe Obr.6.2a opísať striedaním nasledovných vzťahov:

$$d(n) = d(n) + \sum_{\forall k} t(k)c(n-k) \qquad n = 0, 1, ...N/2-1 \tag{6.2}$$

$$c(n) = c(n) + \sum_{\forall k} s(k)d(n-k) \qquad n = 0, 1, ..., N/2-1 \tag{6.3}$$

Párne resp. nepárne koeficienty sú predikované a aktualizované filtráciou nepárnych resp. párnych koeficientov, t.j. ich konvolúciou s $t(n)$ a $s(n)$, ktoré interpretujeme ako impulzové charakteristiky KIO filtrov *elementárnych* pre danú FB.

Priestorové zobrazenie prediktorov ako príspevkov od predikujúcich koeficientov môžeme vidieť na Obr.6.3. Pri doprednej transformácii (t.j analýze) koeficienty zobrazené pri $c(n)$ a $d(n)$ predstavujú váhy príspevkov od jednotlivých bodov obrazu,



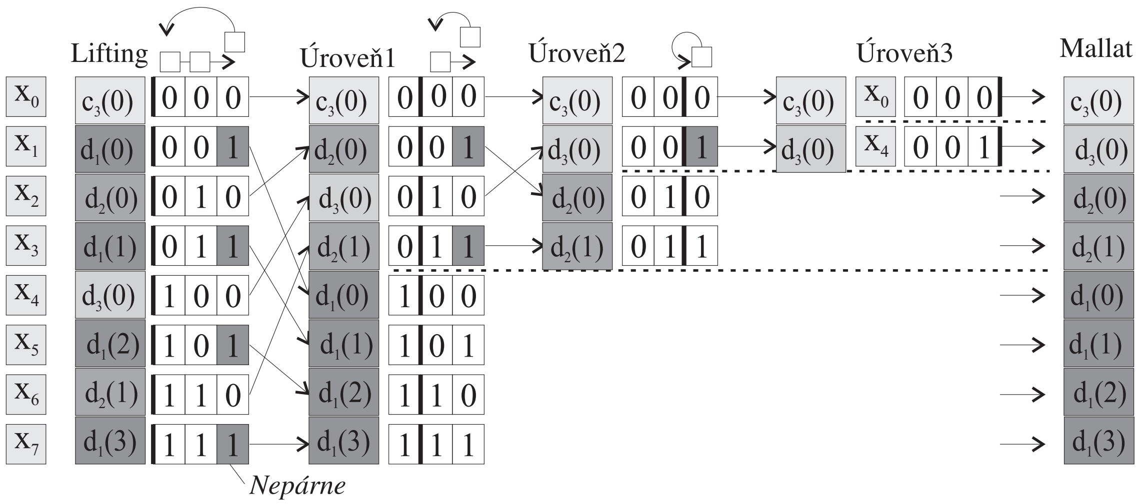
Obr. 6.3: Priestorová zobrazenie príspevkov od predikujúcich koeficientov pri lifting schéme v doprednom a spätnom smere

t.j. koeficienty filtrov $\tilde{h}(-k)$ a $\tilde{g}(-k)$. Pri spätnej transformácii (syntéze) koeficienty pri $c(n)$ a $d(n)$ predstavujú váhy jedného spektrálneho koeficienta vo výsledku, resp. koeficienty filtrov $h(k)$ a $g(k)$. Interpretácia filtrov je podľa časti 4, vzťahy (4.3)-(4.7).

Z Obr.6.3 vidíme, že je splnená podmienka na elimináciu aliasingu pri biortogonálnom riešení banky filtrov (2.22). Pri použití viacerých krokov liftingu vyplýva zo sériového spôsobu ich radenia, že aliasing sa postupne pre jednotlivé kroky taktiež eliminuje.

6.3 Preusporiadanie koeficientov pri lifting schéme

Pri implementácii DWT lifting schémou ostanú pri doprednej transformácii koeficienty preusporiadané podľa Obr.2.15 v dôsledku rekurzívneho delenia párnych koeficientov na párne a nepárne. Aby sme dostali klasické usporiadanie waveletových koeficientov (tzv. Mallatova reprezentácia), potrebujeme koeficienty náležite preusporiadať. Príklad pre signál dĺžky L=8 je na Obr.6.4. Indexy sú rekurzívne delené na párne a nepárne a presúvané tak, aby sme dostali Mallatovu reprezentáciu.



Obr. 6.4: Preusporiadanie koeficientov pri prechode s Lifting reprezentácie do Mallatovej reprezentácie

Uvedený postup je ekvivalentný nasledovnému tvrdeniu [72]:

Z lifting reprezentácie do Mallatovej môžeme prejsť čiastočným preusporiadaním bitov. Nech spektrálne koeficienty $w(k)$, majú index k s n-bitovou reprezentáciou: $k = (k_0k_1 \dots k_{n-1})$. Izolujme nuly podľa $k = (k_0k_1 \dots k_j1 \quad 0...0)$. Potom $w(k')$, kde $k' = (0...01k_0k_1 \dots k_j)$, predstavuje Mallatovu reprezentáciu.

Z tohto tvrdenia môžeme veľmi jednoducho odvodiť opačný prechod, t.j. Mallat→Lifting. Použitím Obr.6.4 môžeme oba prechody veľmi ľahko dokázať. Nech operátor ” ¨ ” znamená bitovú reverziu. Potom môžeme odvodiť nasledovné vlastnosti:

- Po rozklade liftingom na $U < U_{max}$ úrovní pri preusporiadaní je dovolené izolovať max. U bitov. Alternatívny spôsob preusporiadania je vykonať úplné preusporiadanie na U_{max} úrovní a potom na zodpovedajúcej časti koeficientov úplné spätné preusporiadanie($U_{max} - U$ úrovní).

- Ak implementujeme liftingom waveletovú paketovú transformáciu, potom izolujeme bitové sekvencie $k = (k_{j+1}k_{j+2} \dots k_{n-1})$ také, že $\ddot{k}$ predstavujú cestu hierarchickým stromom k úrovniam jednotlivých paketov.

- Pri 2D DWT so štandardným rozkladom je preusporiadanie separovateľné, t.j. preusporiadavame index každej dimenzie nezávisle.

- Pri 2D DWT s neštandardným rozkladom preusporiadanie nie je separovateľné. Nech:

$$\begin{array}{rcl} k^x & = & k_0^x k_1^x k_2^x \dots k_j^x \overbrace{k_{j+1}^x 0...0}^{p^x} \\ k^y & = & k_0^y k_1^y k_2^y \dots k_j^x \underbrace{k_{j+1}^y 0...0}_{p^y} \end{array}, \qquad k_{j+1}^y \neq 0 \quad \vee \quad k_{j+1}^y \neq 0 \tag{6.4}$$

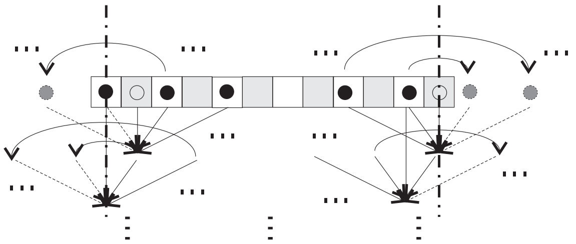
kde k^x a k^y sú indexy v jednotlivých smeroch, p^y a p^x sú bitové sekvencie ktoré izolujeme. Potom preusporiadané indexy $k^{x'}$ $k^{y'}$ majú tvar:

$$k^{x'} = \ddot{p}^x k_0^x k_1^x k_2^x \dots k_j^x \qquad k^{y'} = \ddot{p}^y k_0^y k_1^y k_2^y \dots k_j^y \tag{6.5}$$

Pozn.: poloha nenulových bitov k_{j+1}^x a k_{j+1}^y určuje úroveň, do ktorej koeficient s daným indexom patrí, a kombinácia ich hodnôt určuje zase kvadrant v danej úrovni: horizontálny(10), vertikálny(01), diagonálny(11).

6.4 Symetrické rozšírenie a normalizácia koeficientov

Lifting schéma umožňuje implementovať biortogonálne wavelety s lineárnou fázou so symetrickými bázovými funkciami. Tieto môžu výhodne použiť symetrické rozšírenie signálu na jeho okrajoch. Pri koncepte lifting schémy stačí zabezpečiť modifikáciu prediktorov na okraji signálu, čo zodpovedá vlastne "okrajovým" filtrom pri klasickej realizácii waveletovej transformácie. Spôsob modifikácie prediktorov je znázornený na Obr.6.5. Zlepšenie výsledkov pri kompresii obrazu algoritmom SPIHT pri použití symetrického rozšírenia sú uvedené na grafoch na Obr.6.7. Príklad báz odpovedajúcich symetrickému rozšíreniu je na Obr.6.6

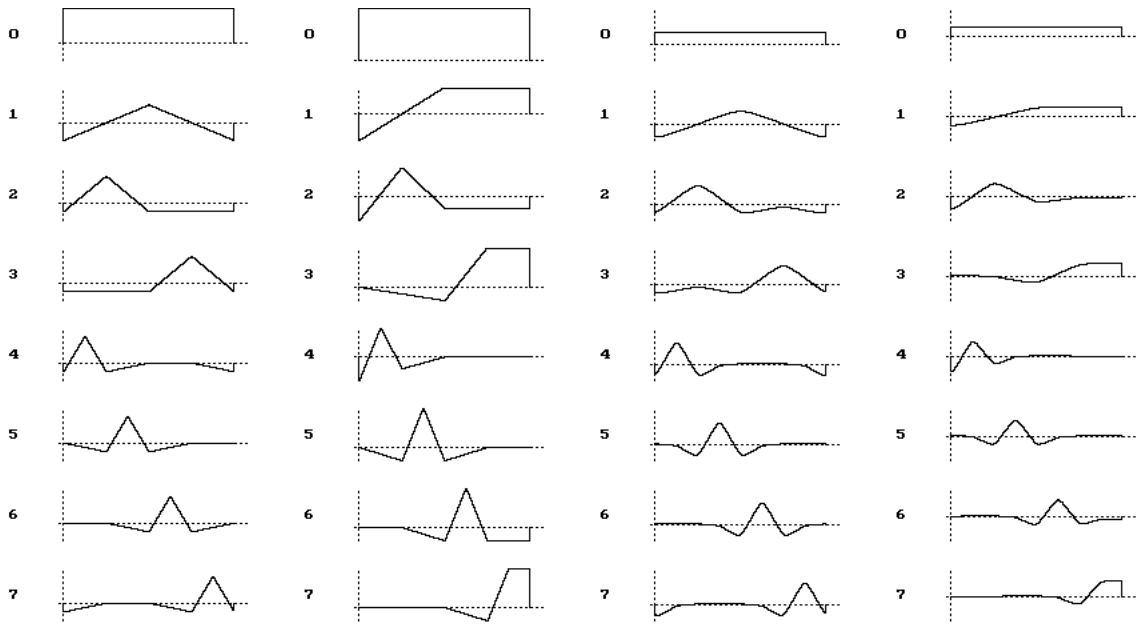


Obr. 6.5: Modifikácia prediktorov lifting schémy pre symetrické rozšírenie signálu

Normalizáciou koeficientov zabezpečujeme ortonormalitu a biortonormalitu páru filtrov. Pritom vnášame do spektra želaný dynamický rozsah, resp. charakter zmeny dynamiky medzi jednotlivými pásmami. SPIHT algoritmus a priori potrebuje istú dynamiku aby efektívne využil hierarchické vzťahy medzi pásmami. Výsledky kompresie pri použití DWT bez normalizácie sú uvedené na grafoch na Obr.6.7. Vidíme, že normalizácia ovplyvňuje výsledky viac ako symetrizácia signálu na okrajoch, t.j. správna normalizácia je dôležitá.

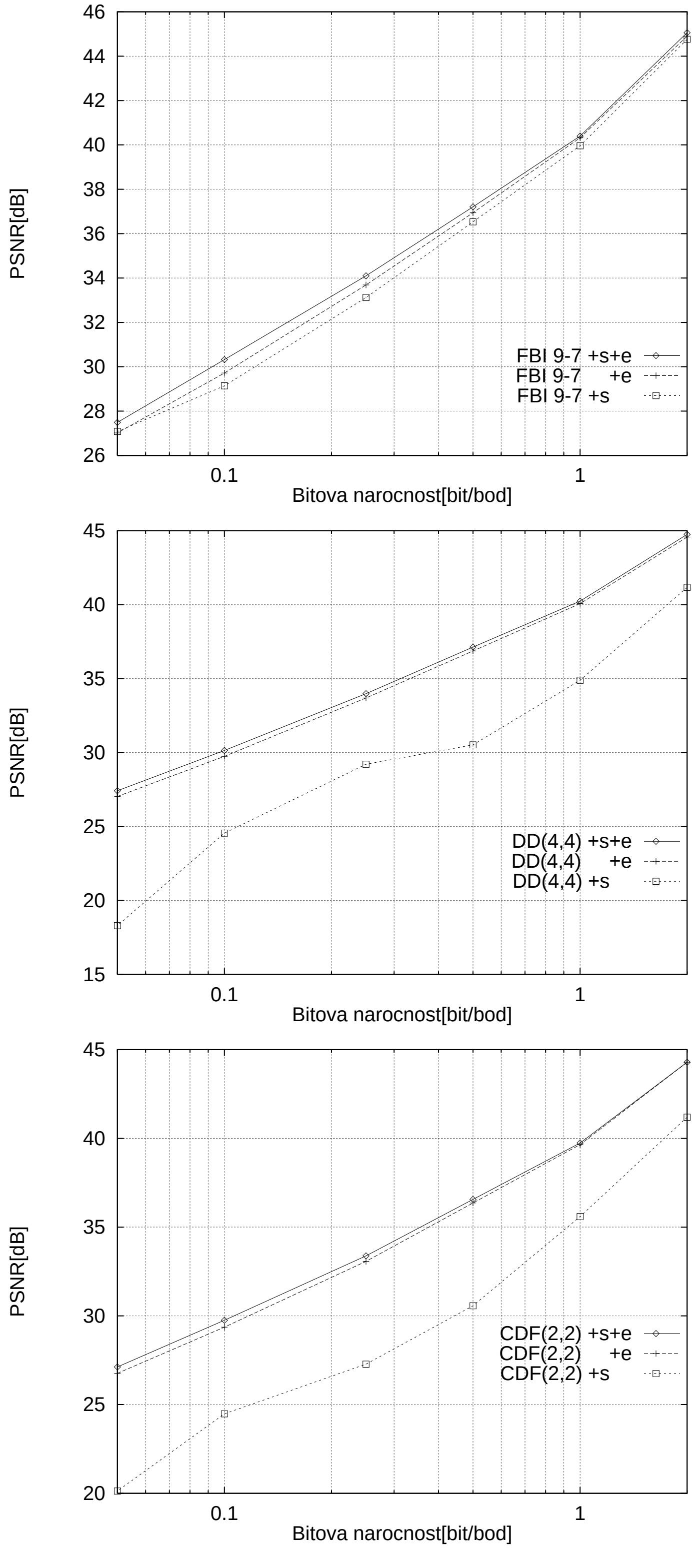
Nech K_N je normalizačný koeficient. Vytvorme nový normalizačný koeficient $K_{new} = r\,K_N$ (kde r je náš renormalizačný koeficient)a študujme efektivitu SPIHT kódera v okolí ortonormality resp. biortonormality filtrov. Výsledky sú zobrazené na Obr.6.8a. Vidíme, že väčšina filtrov dosahuje najlepšie výsledky (pri 0.5bpp) pre $r \in (1/1.15, 1/1.05)$. To zodpovedá celkovému zmenšeniu dynamiky spektra, resp. miernemu zvýrazneniu zložiek HP pásiem na úkor pásiem DP charakteru. Uvedený efekt je zrejme štatistickým dôsledkom algoritmu, ktorým SPIHT zohľadňuje a kóduje hierarchické vzťahy medzi spektrálnymi koeficientami.

Výsledky pre rôzne kompresné pomery sú zobrazené na Obr. 6.8b. Vidíme, že okolo 0.1-0.2bpp sa uvedený prínos renormalizácie pomocou konštanty r stráca, resp. začína mať negatívny vplyv (HP zložky sa už kvôli veľkosti kompresného pomeru používajú málo a zbytok v DP pásme má nesprávnu dynamiku). Optimum sa približuje k $r = 1$.



a) CDF(2,2) b) CDF(2,2) +sym a) FBI 9-7 b) FBI 9-7 +sym

Obr. 6.6: Vplyv symetrizácie na tvar bázových funkcii 1D DWT pri lifting schéme. Zobrazených je prvých osem bázových funkcií, veľkosť bázy je $N = 128$.

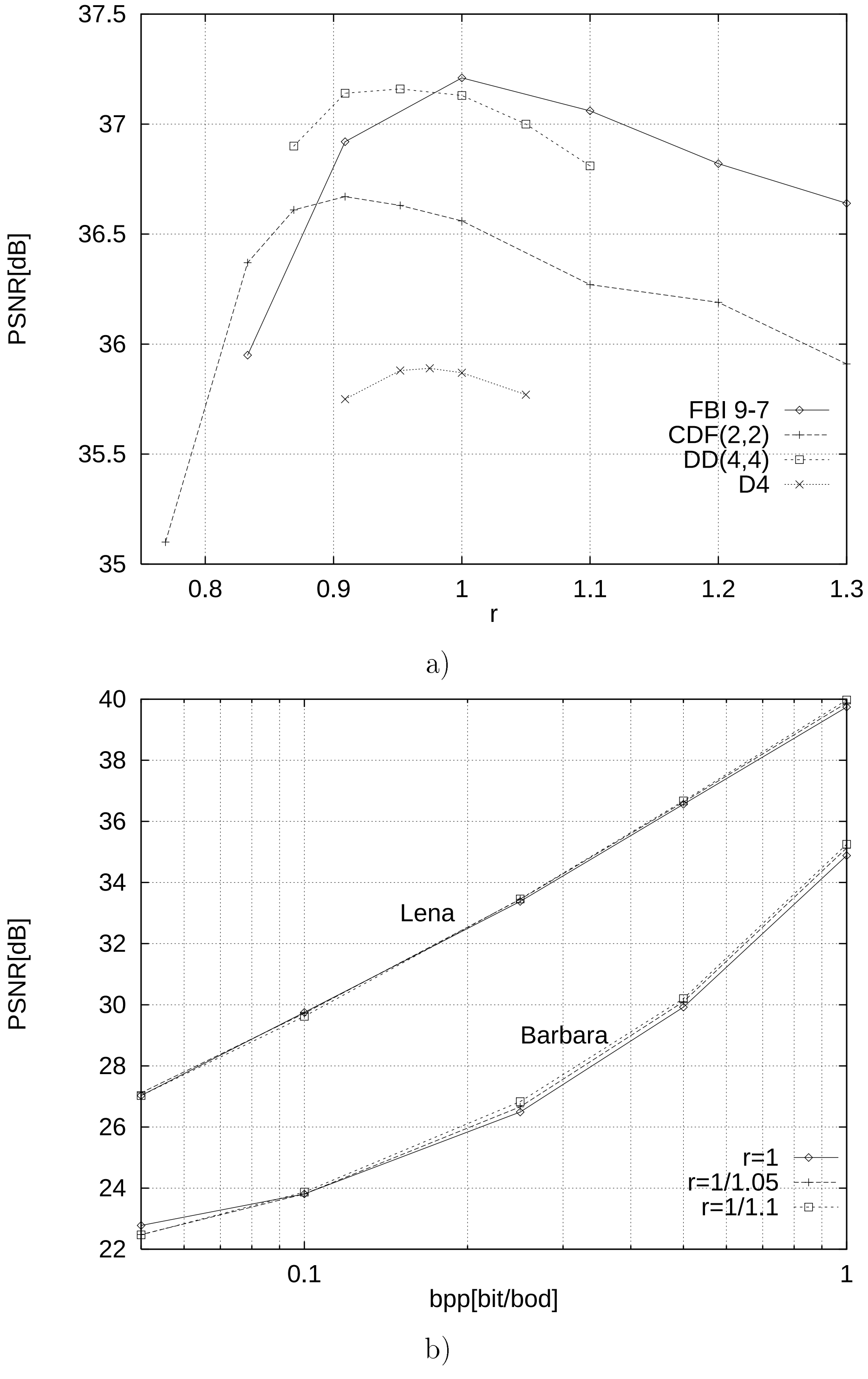


a)

b)

c)

Obr. 6.7: Zlepšenie odstupu signál/šum pre danú bitovú náročnosť použitím symetrického rozšírenia signálu (+s) a normalizáciou energie (+e) pre wavelety: a) FBI 9-7 b) DD(4,4) c) CDF(2,2) (obraz Lena)



Obr. 6.8: Zlepšenie odstupu signál/šum použitím váhovaného koeficientu normalizácie $K_{new} = r\,K$: a)pre obraz Lena pri bitovej náročnosti 0.5bpp a rôzne wavelety b) pre rôzne bitové náročnosti a rôzne obrazy

Kapitola 7

Návrh 2D WT s využitím lifting schémy a Quincunx vzorkovania

V tejto časti je navrhnuté 2D rozšírenie lifting schémy ktoré v dvoch fázach implementuje jednoduché neseparovateľné WT použitím vzorkovania Quincunx. To tohto rámca je adaptovaná trieda Nevillových filtrov [57]. Je skonštruovaná TORING ($1D \to 2D$) transformácia mapujúca prediktory 1D prototypových WT spĺňajúcich isté podmienky na 2D prediktory tvoriace neseparovateľné 2D WT s izotropnými bázovými funkciami (časť 7.1). Efektivita oboch prístupov je porovnaná navzájom a aj voči pôvodnému separovateľnému prípadu (časť 7.2). V časti 7.3 je využitá možnosť použitia ľubovoľných prediktorov v lifting schéme pri zaručení úplnej rekonštrukcie a sú navrhnuté smerové prediktory realizujúce neseparovateľné smerové wavelety pre 8 základných smerov, ktoré môžu byť použité napr. pri kompresii obrazov pohybovo rozostrených alebo obsahujúcich výrazné korelácie v istom smere. Je navrhnutý vhodnejší spôsob symetrického rozšírenia signálu, zohľadňujúci smerovosť waveletov. Pri pri kompresii pohybovo rozostreného obrazu je efektivita smerových waveletov porovnaná so separovateľnými waveletmi a waveletmi, ktoré odpovedajú Nevillovým filtrom.

Quincunx predstavuje najjednoduchší neseparovateľný spôsob vzorkovania v dvoch rozmeroch [7]. Waveletová transformácia pre 2D signál môže byť implementovaná pomocou Quincunxu s iterovaním DP časti. Výsledná transformácia je potom neseparovateľná. Uvedený princíp bol použitý na kompresiu obrazu v [52]. Použitie Quincunx vzorkovania má výhody vzhľadom na ľudský vizuálny systém (LVS), ktorý je vnímavejší na horizontálne a vertikálne frekvencie [11] a tieto zostávajú pri rekurzívnej filtrácii zachované v DP pásme lepšie ako diagonálne frekvencie. Situácia je znázornená na Obr.7.1a.

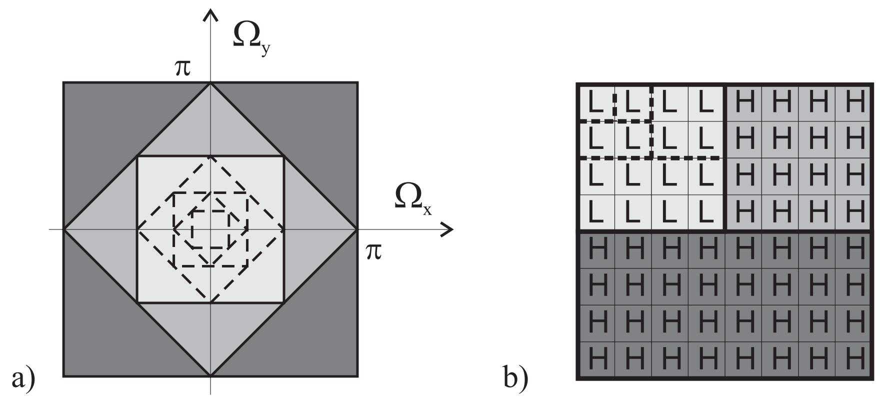
Pri klasickom prístupe by sme najprv vykonali v banke filtrov filtráciu 2D filtrami a potom podvzorkovali Quincunxom. Vzhľadom na to, že sa jedná o podvzorkovanie druhého rádu ($M = 2$) a na prechod do ďalšej úrovne rozlíšenia treba v 2D prípade $M = 4$, je nutné filtráciu a podvzorkovanie vykonať na každej úrovni rozlíšenia dvakrát.

Pri lifting schéme je implementácia znázornená na Obr.7.2. V každej úrovni je lifting rozdelený na dve fázy [31]:

1. fáza - signál je rozdelený na dve časti zopovedajúce vzorkovaniu Quincunx a sú vykonané kroky liftingu a duálneho liftingu pomocou dvojrozmerných prediktorov S_i a T_i s následnou normalizáciou.

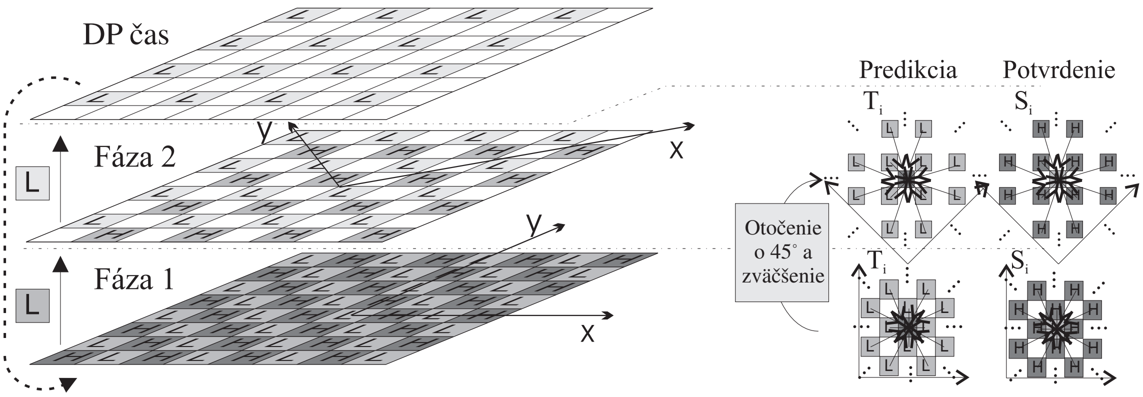
2. fáza - DP časť z prvej fázy je rozdelená na dve časti pomocou vzorkovacej mriežky Quincunx-u otočenej o 45°. Následne sú vykonané kroky liftingu a duálneho liftingu s prediktormi S_i a T_i taktiež priestorovo otočenými o 45° a zväčšeným vzorkovacím intervalom. Signál nakoniec normalizujeme.

Uvedený postup bol nezávisle prezentovaný v [59] pod názvom "Červeno-čierna" waveletová transformácia, kde bola neseparovateľná DWT vytvorená na základe CDF(2,2) waveletu.



Obr. 7.1: Quincunx: a)Rozdelenie subpásiem pri použití iterovaného Quincunx-u v banke filtrov b)Preusporiadanie koeficientov pri zodpovedajúcom waveletovom rozklade

Všeobecnejší rámec konštrukcie waveletov ľubovoľnej dimenzie a rádu vytvorili Sweldens a Kovačević v [57]. Prístup v [59] predstavuje triviálny prípad tejto kon-



Obr. 7.2: Vzorkovacie mriežky a prediktory pri implementácii neseparovateľnej 2D DWT pomocou lifting schémy a quincunx vzorkovania

štrukcie, ktorá je založená na koncepte tzv. "Nevillových" interpolujúcich filtrov. Ich konštrukcia je založená na polynomickej interpolácii viacrozmerných signálov pomocou algoritmov Rona a de Boora [58]. Prediktory sú tvorené prstencami s rôznymi váhami okolo bodu predikcie. Priestorové rozloženie 2D prstencov je na Obr.7.4b. Váhy jednotlivých prstencov sú uvedené v Tabuľke 7.1. Platia pre krok duálneho liftingu, pre krok liftingu môžeme prediktor vytvoriť analogicky ako v časti 2.3.3. Zároveň môžeme určiť koeficient normalizácie ako $K_N = \sqrt{2}$, aby prenos celou sústavou mal charakter ako na Obr.2.5.

Je možné použiť ľubovoľné 2D prediktory (rôzne topológie, koeficienty) pričom máme zaručenú biortogonalitu a tým aj úplnú rekonštrukciu na základe:

- Vzorkovanie pomocou rekurzívneho Quincunx-u vytvára triviálne biortogonálne bázové funkcie.
- Kroky liftingu a duálneho liftingu biortogonalitu zachovávajú.

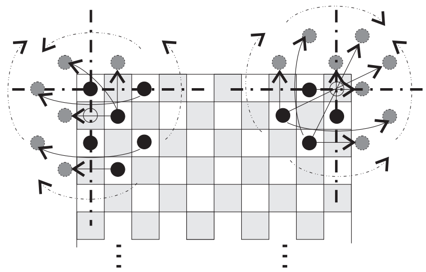
Voľba týchto prediktorov závisí od štatistických vlastností obrazu. Ak sa výrazne odlišujú od štandardných, môže byť výhodnejšie preferovať pri dizajne predikčný prístup (prediktory rôzneho priestorového tvaru na základe výskytu priestorových štruktúr v obraze) a nie waveletový (rekurzívna DP filtrácia a priori "hladkými" filtrami). Ak predpokladáme rôzne štatistické závislosti v rôznych smeroch, prediktory by to taktiež mali zohľadňovať a využiť. Takto sa dostaneme ku konceptu *smerových biortogonálnych waveletov*, ktoré dekorelujú signál v jednom smere viac, ako v ostatných. Pri implementácii týchto prediktorov treba zohľadniť, že pri 2. fáze liftingu je vzorkovacia mriežka otočená o 45°, t.j. de facto vytvoriť pre 2. fázu odlišný prediktor (v prípade Nevillových filtrov a všeobecne rotačne symetrických prediktorov ostávajú prediktory v oboch fázach identické). Príklady prediktorov a výsledky ich aplikácie sú uvedené v časti 7.3.

2D Nevillove filtre	Koeficient normalizácie $K_N = \sqrt{2}$							
Rád filtra	Čitatele prstencov [prstenec(počet bodov)]							menovateľ
	1(4)	2(8)	3(4)	4(8)	5(8)	6(4)	7(8)	
2	1							2^2
4	10	-1						2^5
6	174	-27	2	3				2^9
8	23300	-4470	625	850	-75	9	-80	2^{16}

Tabuľka 7.1: Váhy jednotlivých prstencov v prediktoroch 2D Nevillových filtrov

Po priamej DWT uvedeného typu nie je možné preusporiadať spektrum do klasickej Mallatovej reprezentácie s tromi hierarchickými štruktúrami. Preto bolo navrhnuté preusporiadanie do tvaru na Obr.7.1b, ktorý sa ukázal ako najlepší kompromis medzi kompakciou reprezentácie a prispôsobením na tvar Mallatovej reprezentácie. Takýto tvar má 2 hierarchie, ktoré zodpovedajú fázam liftingu. Podobné preusporiadanie bolo uvedené aj v [59].

Analogicky ako v separovateľnom prípade (Obr.6.5) môžeme použiť symetrické rozšírenie signálu. Spôsob modifikácie prediktorov na okraji signálu je znázornený na Obr.7.3. Zlepšenia dosiahnuté pri kompresii obrazu sú zobrazené na Obr.7.6 (pre vybrané TORING wavelety).



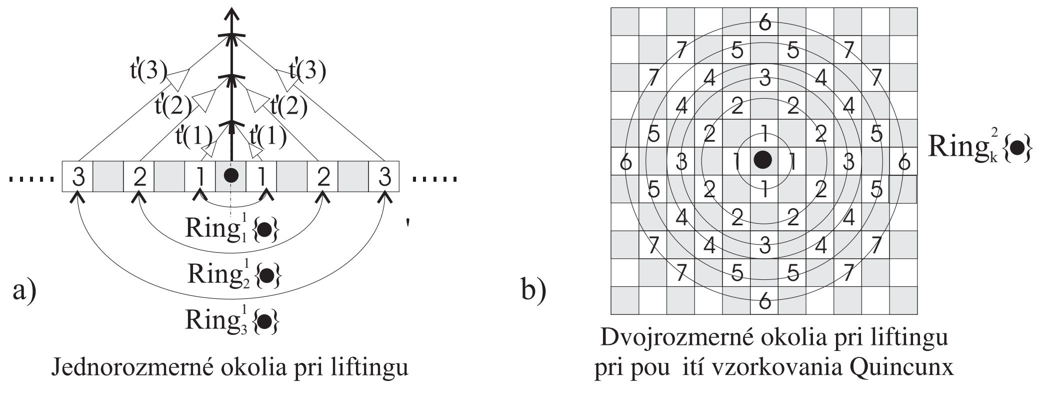
Obr. 7.3: Modifikácia prediktorov lifting schémy pri symetrickom rozšírení signálu pre separovateľné a Quincunx vzorkovanie

7.1 2D Lifting a transformácia TORING

Rozšírenie waveletovej transformácie do dvoch (a analogicky aj viacerých) rozmerov v triviálnom separovateľnom prípade sme diskutovali v časti 2.2.5. V neseparovateľných prípadoch môžeme vytvoriť 2D wavelety priamym návrhom [11] a ich faktorizáciou môžeme dostať realizáciu priečkovými štruktúrami zodpovedajúcimi lifting schéme. Takýto koncept priečkových štruktúr a rozklad (faktorizácia) viacrozmerných bánk filtrov je rozpracovaný v [55].

Odlišný prístup je skonštruovať 2D transformáciu z jednorozmerného prototypu. V prípade bánk filtrov sa na prechod z 1D do 2D prípadu používajú najmä McClellanova transformácia a metóda separovateľných polyfázových komponentov [11]. Ani jedna metóda však neposkytuje priamu implementáciu lifting schémou, resp. je potrebné získanú banku filtrov faktorizovať.

TORING transformácia je taktiež typu $1D \to 2D$. Transformuje do 2D prípadu priamo prediktory liftingu, t.j. priečková štruktúra implementácie transformácie je okamžite k dispozícii. Predstavuje zovšeobecnenie prístupu v [59]. Priamou motiváciou tejto konštrukcie boli nedostatky prístupu použitého v [57]. Nevillove filtre, na ktorých je prístup postavený, v princípe neumožňujú dekorelovať signál s použitím všetkých dostupných informácií. T.j. prediktory S_i a T_i nepoužívajú všetky vzorky signálu v bezprostrednom okolí vzorky predikovanej, pričom tieto sú s predikovaným bodom najviac korelované (vyplýva to zo štatistiky obrazu, napr. AR modely [7]).



Obr. 7.4: Lifting schéma: Priestorovo symetrické okolia pri 1D (a) a rotačne symetrické okolia pri 2D (b) prediktoroch

Transformácia TORING sa zakladá na fakte, že ak máme symetrické prediktory (priestorovo aj hodnotovo) v 1D prípade, môžeme ich interpretovať ako prototypové

1D prstence. Jednoduchým priestorovým preusporiadaním a renormalizáciou môžeme vytvárať ich viacrozmerné (resp. 2D) verzie. Takto môžeme transformovať biortogonálne wavelety s takou faktorizáciou, kde sú všetky prediktory S_i a T_i priestorovo symetrické, t.j.:

$$\forall i : S_i = z^l S_{-i} \qquad T_i = z^m T_{-i}\,, \quad l, m \in \mathbf{Z} \tag{7.1}$$

Potom môžeme 1D prediktory prekresliť ako prstence podľa Obr.7.4a. Kroky pri doprednej transformácii implementovanej lifting schémou môžeme vyjadriť v tvare:

$$d^{(i)}(n) = d^{(i)}(n) + \sum_k t_i^{'}(k)\, Ring_k^1\{d^{(i)}(n)\}\,, \qquad k = 1, 2, \ldots, nt \tag{7.2}$$

$$c^{(i)}(n) = c^{(i)}(n) + \sum_k s_i(k)^{'}\, Ring_k^1\{c^{(i)}(n)\}\,, \qquad k = 1, 2, \ldots, ns \tag{7.3}$$

kde operátor $Ring_k^1\{\bullet\}$ predstavuje body k-teho 1D okolia (prstenca) bodu $\bullet$, $t_i(k)^{'}$ a $s_i(k)^{'}$ predstavujú polovicu koeficientov prediktorov T_i a S_i dĺžky nt resp. ns indexovanú od stredu predikcie (druhá polovica je jej zrkadlovým obrazom).

Dvojrozmerná verzia transformácie má potom kroky predikcie a aktualizácie v tvare:

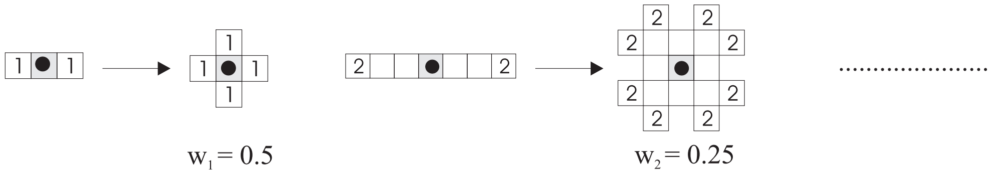
$$d^{(i)}(n_x, n_y) = d^{(i)}(n_x, n_y) + \sum_k t_i^{'}(k)\, w_k Ring_k^2\{d^{(i)}(n_x, n_y)\} \tag{7.4}$$

$$c^{(i)}(n_x, n_y) = c^{(i)}(n_x, n_y) + \sum_k s_i^{'}(k)\, w_k Ring_k^2\{c^{(i)}(n_x, n_y)\} \tag{7.5}$$

kde w_k sú váhovacie koeficienty pre jednotlivé okolia (prstence):

$$w_k = \frac{2}{\text{Počet bodov v prstenci}} \tag{7.6}$$

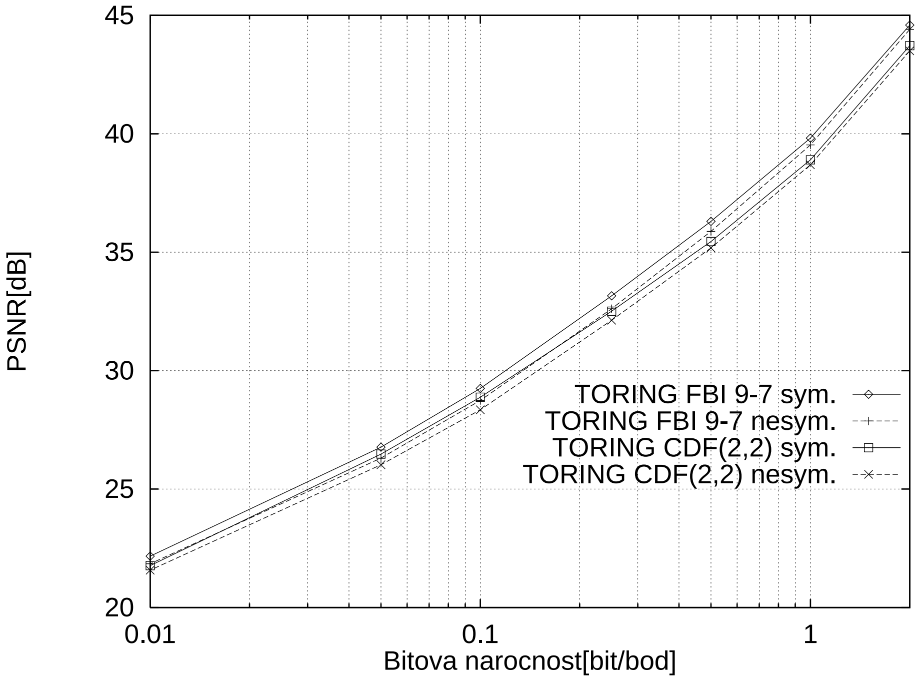
t.j. sú vypočítané tak, aby energia predikovaná z prstenca súhlasila s energiou jeho 1D náprotivku. Príklady transformácie prediktorov $Ring_k^1 \rightarrow Ring_k^2$ s uvedenými váhovacími koeficientami sú na Obr.7.5. Faktorizácie niektorých známych waveletov ktoré spĺňajú podmienku (7.1) sú uvedené v Tabuľke 7.2.



Obr. 7.5: Príklad TORING transformácie najjednoduchších prediktorov z 1D do 2D prípadu

Typ waveletu	CDF(2,2)	DD(4,4)	FBI 9-7
Normalizácia K	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1.149604398
Nulové momenty:	2	4	4
Faktorizácia:	$t_1^{'}(1) = -\frac{1}{2}$ $s_1^{'}(1) = \frac{1}{4}$	$t_1^{'}(1) = -\frac{9}{16}$, $t_1^{'}(2) = -\frac{1}{16}$ $s_1^{'}(1) = \frac{9}{32}$, $s_1^{'}(2) = -\frac{1}{32}$	$t_1^{'}(1) = -1.1586134342$ $s_1^{'}(1) = -0.0529801185$ $t_2^{'}(1) = 0.8829110672$ $s_2^{'}(1) = 0.4425068522$

Tabuľka 7.2: Faktorizácie niektorých známych waveletov so symetrickými prediktormi



Obr. 7.6: Zlepšenie odstupu signál/šum symetrickým rozšírením signálu pri použití neseparovateľných waveletov a Quincunx vzorkovacej mriežky

7.2 Vlastnosti DWT založených na transformácii TORING

DWT implementované pomocou iterovaného Quincunx-u sú v princípe neseparovateľné. To umožňuje dosiahnuť vyššiu anizotropiu bázových funkcií a tým aj lepšie zachytiť lokálnu koncentráciu energie v signále. Pri transformačnom kódovaní sa v dôsledku toho chyby šíria rovnomernejšie všetkými smermi. Cenou za neseparovateľnosť je zvýšený počet operácií. Pri iterovanom Quincunx-e ostáva počet operácii DWT rádovo ten istý ako v separovateľnom prípade, pričom je závislý najmä od rádu použitých okolí (pri použití iba $Ring_1^2$ sa počet operácií zvýši 1.5 krát, pri použití okolí vyšších rádov > 1.5 krát.

Transformácie typu TORING umožňujú používať v prediktoroch všetky okolité body (keď má priečková štruktúra viac stupňov) a tým môžu dosiahnuť lepšiu dekoreláciu signálu a presnejšie zachytiť lokálnu koncentráciu energie než 2D DWT založené na koncepte Nevillových filtrov.

Keďže celý postup je faktorizovaný, na výpočet potrebujeme oveľa menej operácií ako bez faktorizácie (napr. v 1D prípade pre FBI 9-7 wavelet iba 25% operácií). V dôsledku faktorizácie však podpora bázových funkcii nemá tvar ideálnych kruhov. Čím viac okolí (prstencov) nízkych rádov je prítomných vo faktorizácii, tým viac nadobúda plocha, na ktorej sú bázové funkcie podporované štvorcový tvar.

Veľa užitočných vlastností máme implicitne zaručených použitím lifting schémy: výpočet bez potreby prídavnej pamäti, jednoduché riešenia transformácie pri okrajoch signálu, možné použitie nelineárnych (napr. celočíselných) prediktorov, zrýchlenie výpočtu, biortogonalita (podmienená aj typom vzorkovania).

Za účelom kompresie obrazu sú dôležité vlastnosti dekorelácie a kompakcie energie DWT. Tieto môžu byť objektívne merateľné prostredníctvom zisku transformačného kódovania G_{TC} (časť 2.2.6) a to buď na modeli obrazu (väčšinou sa používa AR(1) model [7]) alebo na obraze samom. Príklady G_{TC} pre použité neseparovateľné 2D DWT sú v Tabuľke 7.3. Vidno výrazný náskok TORING FBI 9-7 waveletu, ako sa očakávalo vzhľadom na vlastnosti 1D FBI 9-7 waveletu.

Pri stratovej kompresii obrazu sú dôležité aj aproximačné vlastnosti waveletov a tvar bázových funkcií. Aproximačné vlastnosti použitých 2D DWT sú porovnané v Tabuľke 7.4. Vidno, že neseparovateľné verzie majú horšie aproximačné vlastnosti, čo zrejme súvisí s tým, že podpora ich bázových funkcií klesá rýchlejšie ako pri separovateľných prípadoch. To je priamym dôsledkom použitia dvoch fáz pri výpočte DWT pri Quincunx vzorkovaní. DWT založené na Nevillových filtroch majú výrazne väčšiu podporu bázových funkcií (lepšie aproximačné vlastnosti) v dôsledku svojich mohutných prediktorov.

Výpočtová náročnosť 2D DWT implementovaných pomocou Quincunx-u je porovnaná v Tabuľke 7.5. Vidno, že výpočtová náročnosť DWT založených na Nevillových filtroch je oveľa vačšia ako pri TORING DWT. Tvar bázových funkcií môžeme porovnať pomocou základných waveletov, ktoré nám určujú charakter celej bázy. Pre použité 2D DWT sú základné wavelety zobrazené na Obr.7.7. Vidno, že pri TORING type waveletov sa zvyšovaním rádu nezvyšuje hladkosť bázových funkcií (a teda aj regularita) tak výrazne ako pri DWT založených na Nevillových filtroch. Zmena tvaru bázových funkcií oproti separovateľnému prípadu aj so symetrizáciou je zobrazená na Obr.7.8.

Najdôležitejšie sú výsledky pri kompresii reálneho obrazu. Testovanie sa uskutočnilo s viacerými štandardnými testovacími obrázkami: Barbara, Lena, Goldhill. Charakter dosahovaných výsledkov bol približne rovnaký, pričom najlepšie výsledky TORING wavelety oproti ostatným sa dosiahli na obrázky Lena. Výsledky kompresie algoritmom SPIHT sú v Tabuľkách 7.7, 7.8, 7.6 a na Obr.7.9. Vidíme, že TORING FBI 9-7 pre niektoré obrázky dosahoval jedny z najlepších výsledkov. Zároveň sa ukázalo, že z hľadiska PSNR pri danej bitovej náročnosti sú separovateľné verzie DWT efektívnejšie.

Objektívne porovnanie pomocou PSNR nie je najlepším kritériom pri kompresii obrazu. Zahŕňa v sebe iba štatistické vlastnosti a nie rôzne tvary a artefakty v obraze. Subjektívne, vizuálne porovnanie dosiahnutých výsledkov (a to najmä pri väčších kompresných pomeroch) však zvýhodňujú neseparovateľné typy DWT, (Obr.7.10). Separovateľné transformácie rozptyľujú energiu pozdĺž osí x a y, takže tvary v obraze sú menej rozpoznateľné. Na druhej strane neseparovateľné transformácie implementované pomocou Quincunx-u vnášajú do obrazu bodové rušenie, ktorého charakter závisí najmä od hladkosti bázových funkcií. Avšak obraz je v tomto prípade stále čitateľnejší než v separovateľnom prípade. Výnimkou sú obrazy s výraznými horizontálnymi resp. vertikálnymi štruktúrami (objekty, textúry, kde poskytujú čitateľnejší výsledok separovateľné transformácie (napr. pri obrázku Barbara). Vo všeobecnosti výskyt hrán v obraze (najmä horizontálnych a vertikálnych) prispieva k neefektivite kóderov založených na neseparovateľných 2D DWT uvedeného typu.

2D Transformácia (neseparovateľná)	G_{TC}	
	Goldhill(512x512, 8bpp)	Lena(512x512, 8bpp)
TORING CDF(2,2) (Neville rád 2)	7.83	8.99
TORING DD(4,4)	8.21	8.55
Neville rád 4	8.87	8.95
Neville rád 8	9.53	9.24
Neville rád 6	9.55	9.39
TORING FBI 9-7	12.58	12.95

Tabuľka 7.3: Porovnanie G_{TC} pre použité neseparovateľné transformácie

2D Transformácia (*) sú separovateľné)	Odstup signál-šum (PSNR) [dB]			
	U=1	U=2	U=3	U=4
Neville rád 8	35.58	29.68	25.67	22.63
Neville rád 6	35.46	28.62	25.61	22.59
DD(4,4) *)	35.33	29.61	25.59	22.56
FBI 9-7 *)	35.27	29.58	25.57	22.55
Neville rád 4	35.14	29.47	25.48	22.49
TORING FBI 9-7	34.96	29.42	25.46	22.49
TORING DD(4,4)	34.71	29.26	25.31	22.35
CDF(2,2) *)	34.52	29.21	25.31	22.33
TORING CDF(2,2)	34.08	28.96	25.09	22.15

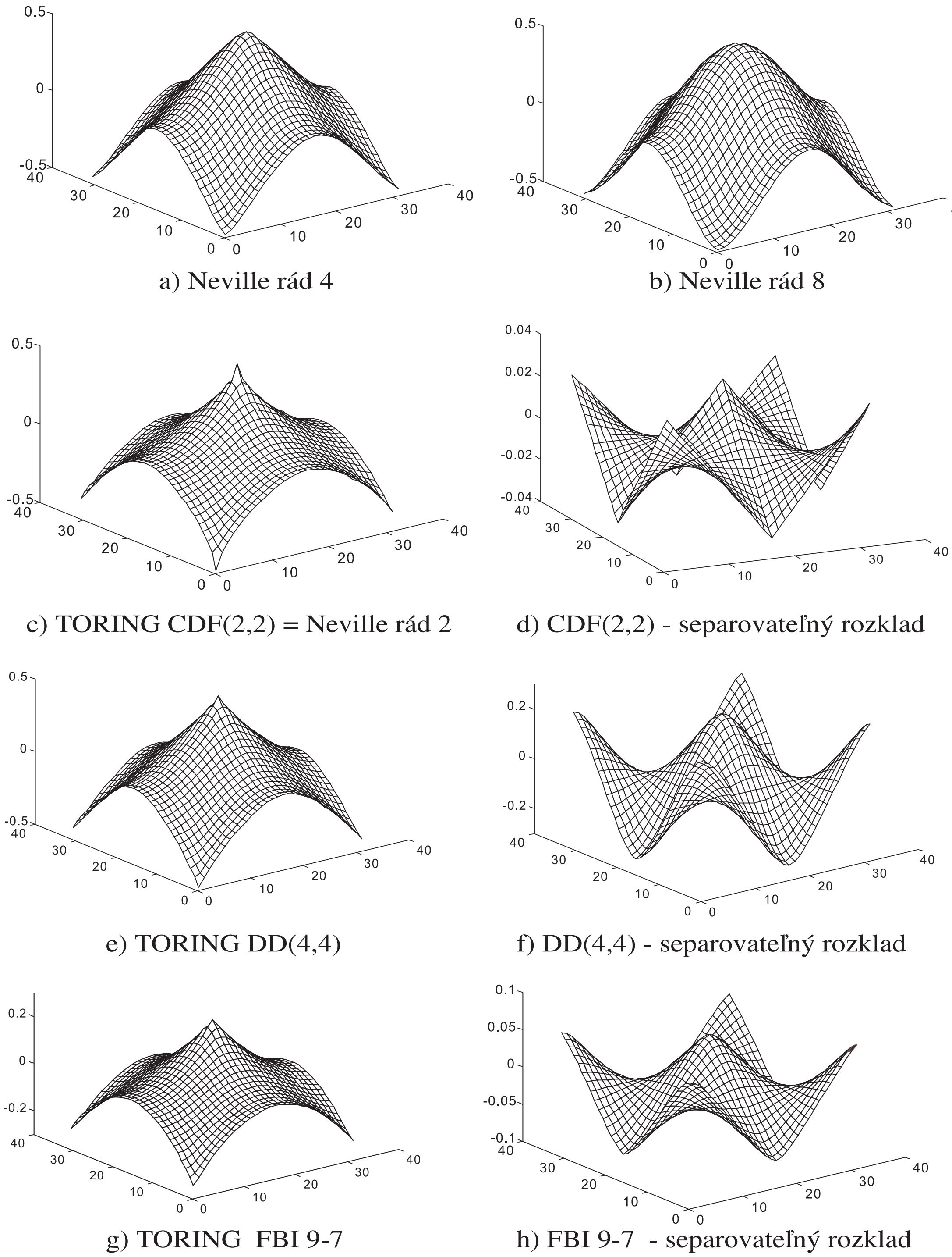
Tabuľka 7.4: Aproximačné vlastnosti 2D waveletov, merané pomocou aproximačnej chyby pri vynulovaní U úrovní HP pásiem spektra použitím obrázku LENA

2D Transformácia	Počet operácií / bodov v obraze	
	Násobenie	Sčítanie
TORING CDF(2,2)	1	4
TORING DD(4,4)	2	4
TORING FBI 9-7	2	8
Neville rád 4	2	14
Neville rád 6	4	27
Neville rád 8	7	51

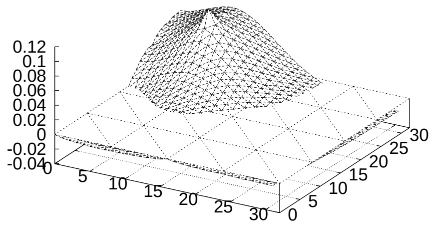
Tabuľka 7.5: Normovaný počet operácií DWT pri iterovanom Quincunxe na jednej úrovni a v jednej fáze.

2D Transformácia (*) sú separovateľné)	Kódovacia chyba ako odstup signál-šum (PSNR) v [dB] pre rôzne bitové náročnosti x [bpp]						
	x=2	x=1	x=0.5	x=0.25	x=0.1	x=0.05	x=0.01
TORING CDF(2,2)	40.41	34.83	31.76	29.53	27.13	25.64	22.52
Neville rád 4	41.23	35.55	32.31	29.95	27.41	25.79	22.82
Neville rád 6	41.41	35.72	32.47	30.01	27.44	25.85	22.86
Neville rád 8	41.41	35.78	32.53	30.03	27.48	25.91	22.88
TORING FBI 9-7	41.27	35.67	32.38	29.97	27.5	25.91	22.83
TORING DD(4,4)	40.91	35.27	32.1	29.83	27.34	25.76	22.69
CDF(2,2) *)	41.73	36.29	32.86	30.35	27.68	26.05	22.84
DD(4,4) *)	41.87	36.52	33.07	30.52	27.85	26.18	22.92
FBI 9-7 *)	42.01	36.55	33.12	30.55	27.92	26.21	23.00

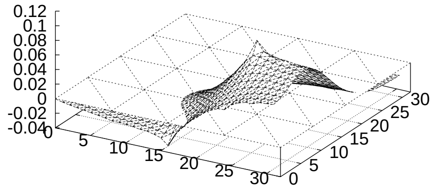
Tabuľka 7.6: PSNR pre rôzne 2D DWT použité na kódovanie obrazu Goldhill algoritmom SPIHT.



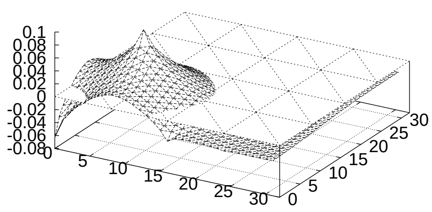
Obr. 7.7: Základné wavelety použitých neseparovateľných 2D DWT s Quincunx vzorkovaním a ich separovateľných ekvivalentov



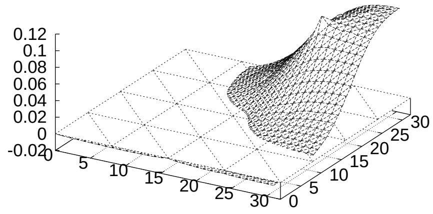
a)TORING CDF(2,2), $sp(8, 24) = 1$



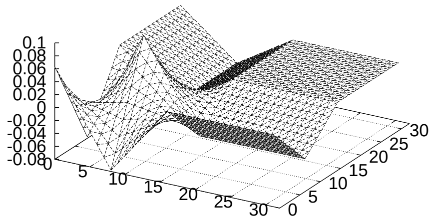
b)TORING CDF(2,2), $sp(24, 8) = 1$



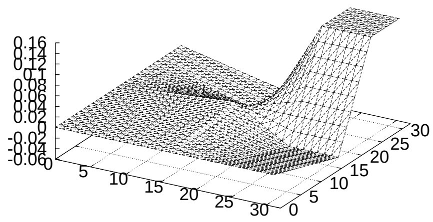
c)TORING CDF(2,2), $sp(8, 8) = 1$



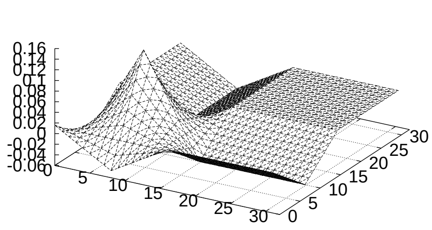
d)TORING CDF(2,2), $sp(24, 24) = 1$



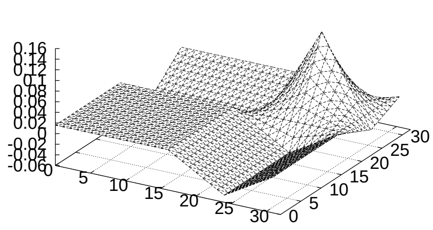
e)separ. CDF(2,2), $sp(8, 8) = 1$ (+sym)



f)separ. CDF(2,2), $sp(24, 24) = 1$ (+sym)



g)separ. CDF(2,2), $sp(8, 8) = 1$



h)separ. CDF(2,2), $sp(24, 24) = 1$

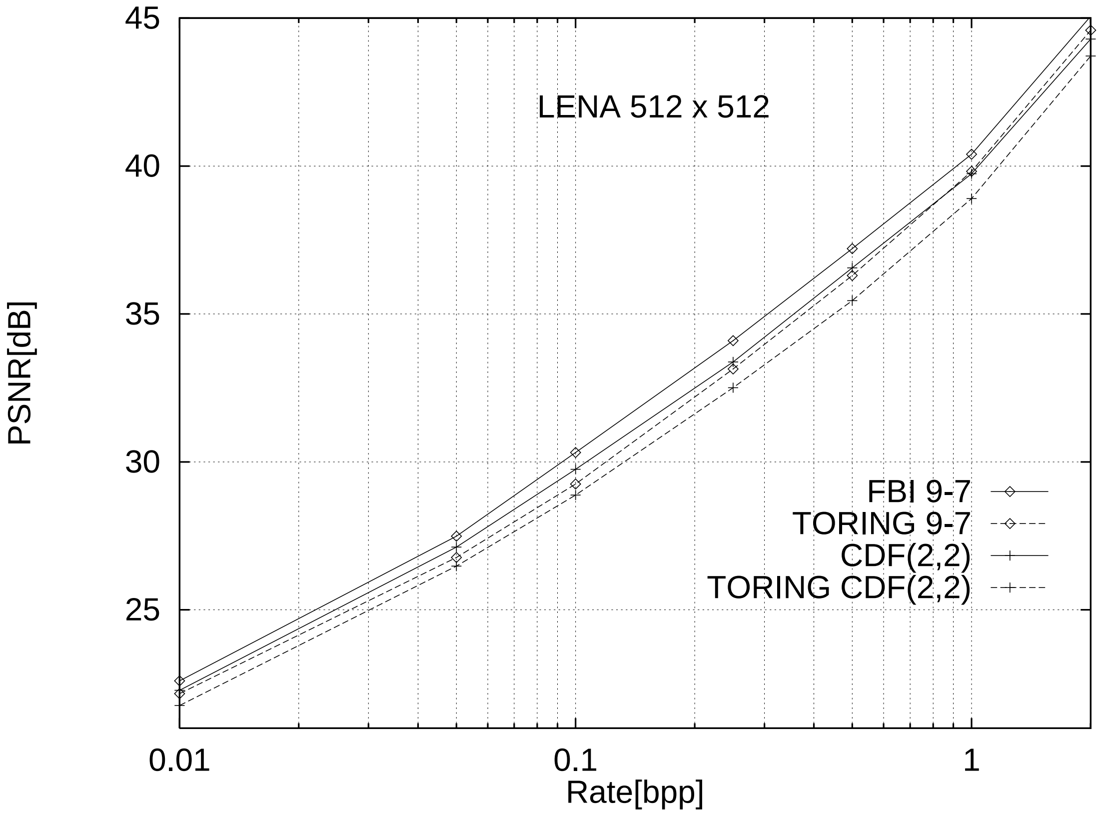
Obr. 7.8: Vplyv symetrizácie na tvar bázových funkcii separovateľnej a neseparovateľnej DWT (pre CDF(2,2) wavelet).

2D Transformácia (*) sú separovateľné)	Kódovacia chyba ako odstup signál-šum (PSNR) v [dB] pre rôzne bitové náročnosti x [bpp]						
	x=2	x=1	x=0.5	x=0.25	x=0.1	x=0.05	x=0.01
TORING CDF(2,2)	43.72	38.9	35.45	32.51	28.88	26.48	21.77
Neville rád 4	44.21[3]	39.62	36.26	33.15	29.27[3]	26.66	21.94[3]
Neville rád 6	44.35[2]	39.76[2]	36.46[2]	33.33[2]	29.33[2]	26.70[3]	22.14[2]
Neville rád 8	44.20	39.71[3]	36.48[1]	33.36[1]	29.34[1]	26.72[2]	22.17[1]
TORING FBI 9-7	44.59[1]	39.82[1]	36.3 [3]	33.16[3]	29.25	26.77[1]	22.17[1]
TORING DD(4,4)	44.1	39.36	35.9	32.89	29.14	26.58	21.83
CDF(2,2) *)	44.29	39.74	36.56	33.38	29.75	27.12	22.28
DD(4,4) *)	44.75	40.24	37.13	33.98	30.14	27.42	22.49
FBI 9-7 *)	45.06	40.4	37.21	34.1	30.32	27.49	22.6

Tabuľka 7.7: PSNR pre rôzne 2D DWT použité na kódovanie obrazu LENA algoritmom SPIHT. Najlepšie tri prípady sú označené [1], [2], [3]. Pozn.: bpp je počet bitov na bod

2D Transformácia (*) sú separovateľné)	Kódovacia chyba ako odstup signál-šum (PSNR) v [dB] pre rôzne bitové náročnosti x [bpp]						
	x=2	x=1	x=0.5	x=0.25	x=0.1	x=0.05	x=0.01
TORING CDF(2,2)	40.1	33.0	28.15	25.13	23.23	22.37	19.55
Neville rád 4	41.15	33.78	28.77	25.55	23.4	22.55	19.82
Neville rád 6	41.47	34.26	29.07	25.75	23.5	22.52	19.91
Neville rád 8	41.55	34.57	29.28	25.93	23.55	22.47	19.98
TORING FBI 9-7	41.16	34.07	29.02	25.72	23.48	22.56	19.87
TORING DD(4,4)	40.69	33.38	28.5	25.35	23.33	22.49	19.67
CDF(2,2) *)	41.80	34.88	29.92	26.49	23.81	22.78	19.86
DD(4,4) *)	42.46	36.25	31.09	27.23	24.03	22.81	19.98
FBI 9-7 *)	42.64	36.41	31.39	27.57	24.25	22.92	20.17

Tabuľka 7.8: PSNR pre rôzne 2D DWT použité na kódovanie obrazu Barbara algoritmom SPIHT.



Obr. 7.9: Porovnanie výsledkov kódovania pomocou TORING waveletov a ich separovateľných verzií (podľa Tabuľky 7.7)

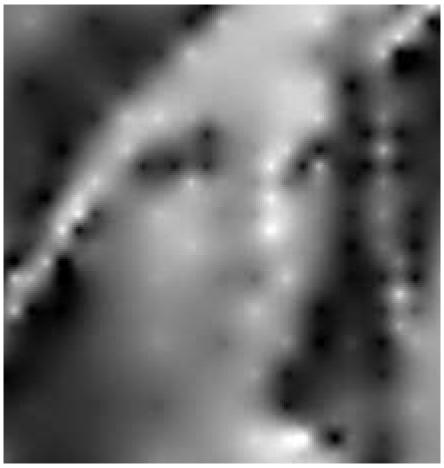

a) Originál


b) Neville rád 8


c) FBI 9-7, neštandardný rozklad


d) TORING FBI 9-7


e) CDF(2,2) neštandardný rozklad


f) TORING CDF(2,2)

Obr. 7.10: Časť obrazu LENA kódovaného na 0.01 bpp (kompresný pomer 1:800) použitím SPIHT algoritmu a rôznych typov 2D DWT

7.3 Smerové wavelety

Separovateľné wavelety pri stratovom kódovaní obrazu šíria kódovaciu chybu horizontálnym a vertikálnym smerom, pričom na dekoreláciu v oboch smeroch je vynaložený rovnaký výpočtový výkon. Neseparovateľné wavelety umožňujú pružnejší design smerových vlastností waveletov. V časti 7.2 sme sa zaoberali izotropnými waveletmi, ktoré šíria kódovaciu chybu všetkými smermi rovnako a dekorelujú signál rovnako vo všetkých smeroch.

Uvedené vlastnosti nemusia byť pre všetky skupiny obrazov najvýhodnejšie, a to najmä pre tie, kde je jeden smer viac korelovaný ako ostatné, t.j. napr pohybový "blurring"(obrazy objektov v pohybe, sekvencie videozáznamu,...).

Wavelet s príslušnou smerovou vlastnosťou môže potom obraz výhodne reprezentovať a to najmä z hľadiska:

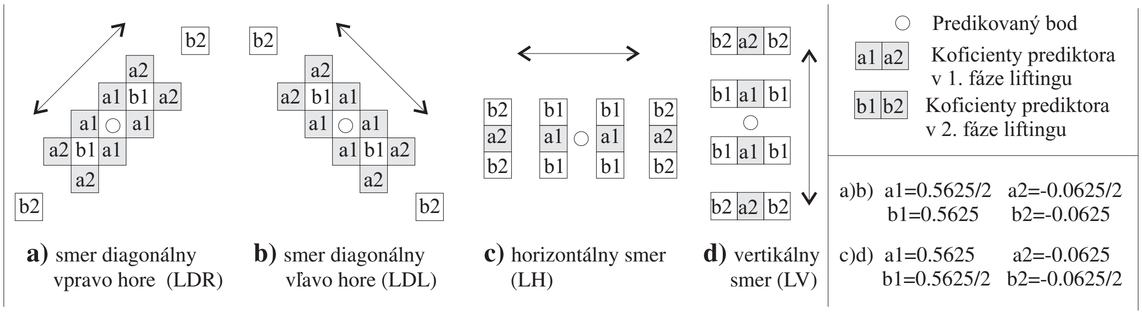
- - počtu operácií transformácie, t.j. dekorelácia najmä v požadovanom smere
- - vizuálnych vlastností, t.j šírenie kódovacej chyby iba jedným smerom

Pri praktickej implementácii potom môžeme celý postup vyjadriť v nasledovných krokoch:

1. Definovanie oblasti v obraze, prípadne obrazu celého, kde chceme použiť smerové wavelety
2. Zistenie smeru minimálneho gradientu (predpokladáme najvyššiu koreláciu, kódovacie chyby najmenej rušivé)
3. Voľba príslušného smerového waveletu z databázy
4. Transformácia a kódovanie (+informácie o použitom wavelete)

Pomocou lifting schémy a konceptu biortogonality pri Quincunx vzorkovaní, kde môžeme v princípe použiť ľubovoľné prediktory (časť 2.3.3), môžeme taktiež realizovať smerové wavelety.

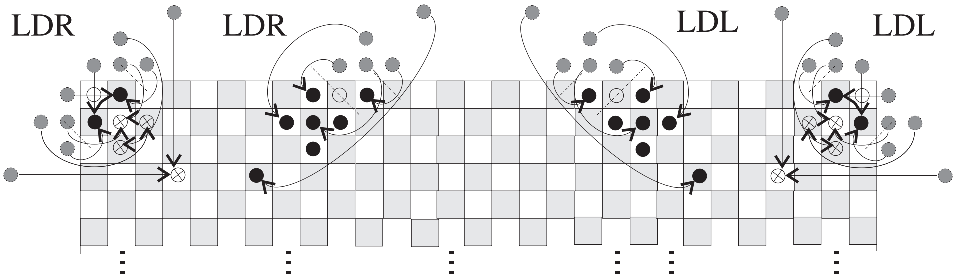
Na testovanie uvedeného prístupu boli vytvorené 4 rôzne druhy smerových waveletov, líšiace sa len prediktormi, spôsob ich aplikácie zostáva rovnaký. Prediktory boli použité v lifting schéme pri Quincunx vzorkovaní a sú zobrazené na Obr.7.11. Tieto wavelety pokrývajú osem základných smerov. Sú odvodené z interpolačného filtra 4. rádu,



Obr. 7.11: Prediktory smerových waveletov pre 8 základných smerov

ktorý je totožný s DD(4,4) a sú navrhnuté tak, aby mali smerové vlastnosti, t.j. najväčšiu schopnosť dekorelácie v želanom smere. Pritom, v smere naň kolmom potrebujeme taktiež aspoň minimálne dekorelačné vlastnosti, resp. istú regularitu. Z toho dôvodu treba mať prediktor aspoň v jednej z fáz na každej úrovni rozkladu dvojrozmerný (pre LDL a LDR v 1.fáze, pre LH a LV v 2.fáze).

Pri pokrytí viacerých smerov, prípadne ak chceme použiť iný pomer miery dekorelácie v navzájom kolmých smeroch, musíme použiť filtre väčšieho rádu.



Obr. 7.12: Symetrické rozšírenie signálu pri smerových waveletoch

Bázové funkcie takýchto waveletov majú výrazné smerové charakteristiky a sú zobrazené na Obr.7.13. Pri waveletoch so symetrickým rozšírením vidíme výrazný tvarový rozdiel spôsobený predpokladanou symetriou spektra. Ak by sme použili štandardný spôsob symetrizácie (SS) signálu, stratili by smerové wavelety časť so svojej prediktívnej schopnosti a obraz by bol na okrajoch reprezentovaný menej efektívne. Preto je navrhnutý nový spôsob smerovej symetrizácie (DS), (Obr.7.12), pri ktorom je os symetrie kolmá na smer waveletu. Iba v prípade ak nie je možná takáto symetrizácia (Obr.7.12 ľavý a pravý okraj), je použité pre dané body klasické symetrické rozšírenie.

Porovnanie tvaru vybraných bázových funkcií pri oboch druhoch symetrizácie je uvedené na Obr.7.13. Porovnanie oboch druhov symetrizácie pri kompresii obrazu nella je uvedené v Tabuľke 7.3. Vidíme, že symetrizácia, ktorá zohľadňuje smer waveletu, dosahuje mierne lepšie výsledky ako štandardná symetrizácia.

Bit. náročnosť[bpp]	2	1	0.5	0.25	0.1	0.05	0.01
PSNR[dB](SS)	41.93	36.64	32.84	29.59	25.88	23.56	19.18
PSNR[dB](DS)	41.94	36.64	32.85	29.61	25.91	23.67	19.19

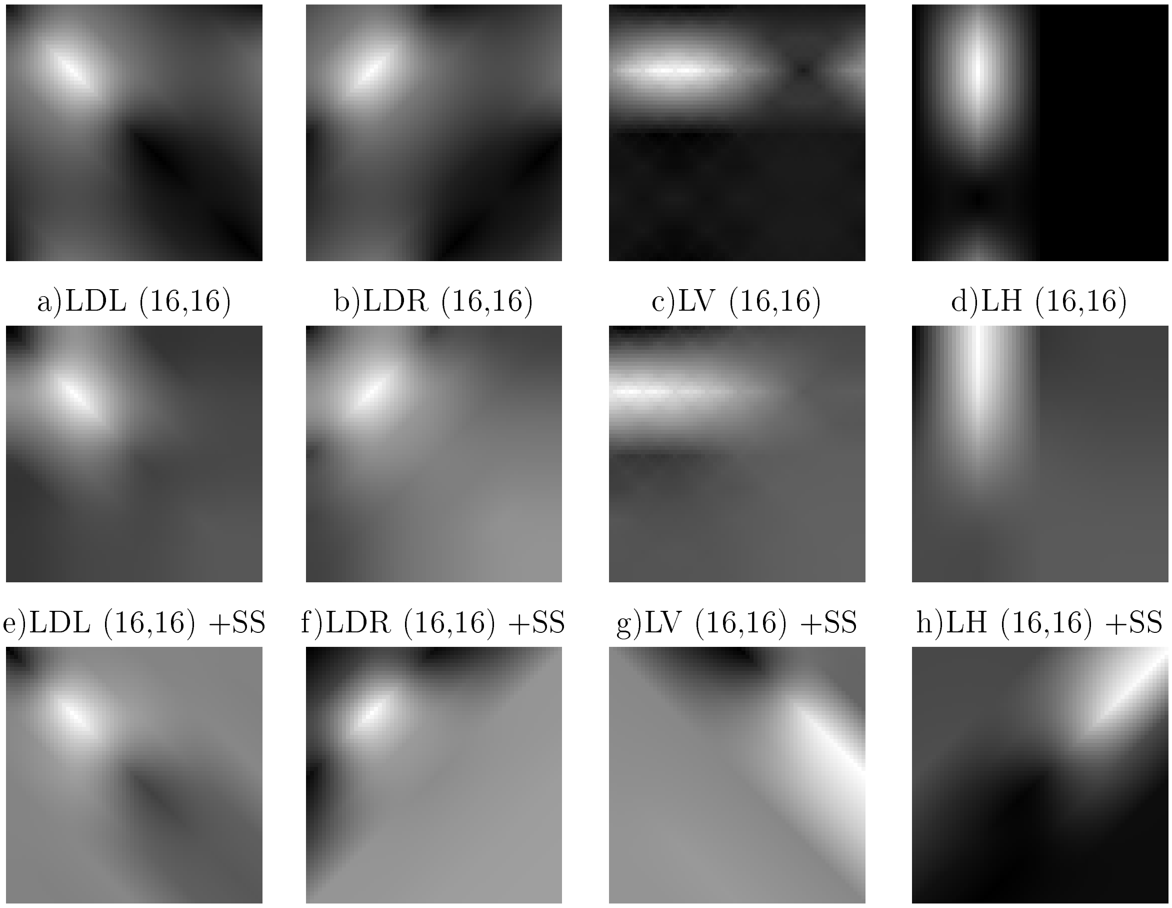
Tabuľka 7.9: Vplyv druhu symetrizácie na odstup signál/šum pri kompresii obrazu nella. (SS- štandardná symetrizácia, DS - smerová symetrizácia)

V Tabuľke 7.3 sú uvedené výsledky kompresie obrazu nella použitím smerových aj nesmerových waveletov (pre nižšie bitové náročnosti sú výsledky zobrazené aj na Obr.7.14)). Vidíme, že zo smerových waveletov je najúčinnejší LV (vertikálny smer), t.j. obraz nella je najviac korelovaný vo vertikálnom smere, čo pri kompresii spôsobuje oproti LH waveletu až 1-1.5dB rozdiel v PSNR. Neseparovateľné izotropné wavelety nie sú z tohto dôvodu až tak účinné (avšak vizuálne je obraz menej rušivý).

Ak zvýšime koreláciu v istom smere, zvýši sa aj účinnosť príslušného smerového waveletu voči ostatným. Príklady kompresie obrazu nella s pohybovým rozostrením [1] vo vybratých smeroch sú uvedené v Tabuľke 7.3. Vidíme, že sa účinnosť príslušných smerových waveletov voči ostatným zvýšila, čo je najviac viditeľné pri LDR wavelete, ktorý ťaží aj z vysokej korelácie obrazu nella v diagonálnom smere vpravo hore. Naviac pri smerových waveletoch pôsobia chyby v rekonštruovaných obrazoch vizuálne najmenej rušivo, čo vidno najmä na hranách v obraze pozdĺž smeru maximálnej korelácie.

Pri ďalších testovacích obrázkoch s pohybovým rozostrením sa dosahovali výsledky podobného charakteru. Z hľadiska PSNR vykazujú smerové wavelety nielen lepšie výsledky ako ostatné wavelety vytvorené pomocou Quincunx-u, ale aj výsledky porovnateľné, ba aj lepšie ako separovateľné wavelety podobného rádu, pričom vizuálne porovnanie vyznieva jednoznačne v prospech smerových waveletov.

[1] Pohybové rozostrenie obrazu bolo vykonané programom Paint Shop Pro, funkcia "motion blurring", parameter 20



a)LDL (16,16) b)LDR (16,16) c)LV (16,16) d)LH (16,16)

e)LDL (16,16) +SS f)LDR (16,16) +SS g)LV (16,16) +SS h)LH (16,16) +SS

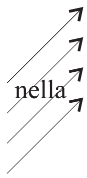
i)LDL (16,16) +DS j)LDR (16,16) +DS k)LDL (48,16) +DS l)LDR (48,16) +DS

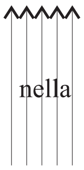
Obr. 7.13: Príklady bázových funkcií smerových waveletov. Čísla v zátvorkách udávajú poradové číslo bázovej funkcie. Pozn.: a)b)c)d) sú bez symetrizácie, ostatné s označeným druhom symetrizácie

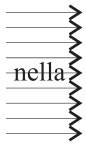
Bit. náročnosť[bpp]		2	1	0.5	0.25	0.1	0.05	0.01
PSNR [dB]	DD(4,4)	42.68	37.68	33.79	30.3	26.40	23.14	18.75
	CDF(2,2)	42.26	37.24	33.07	29.67	26.05	23.64	18.58
	LV	42.29	37.21	32.98	29.63	25.93	23.70	19.07
	LDR	41.94	36.64	32.85	29.61	25.91	23.67	19.19
	Neville rád 4	42.03	36.73	32.73	29.39	25.62	23.33	19.03
	LDL	41.72	35.98	32.06	28.66	25.31	23.06	18.72
	Neville rád 2	41.41	35.58	31.70	28.73	25.30	23.18	19.03
	LH	41.37	35.55	31.55	28.72	25.31	23.14	19.07

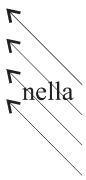
Tabuľka 7.10: Odstup signál/šum pre obrázok nella pri rôznych kompresných pomeroch a rôznych waveletoch (zoradené podľa dosiahnutých výsledkov)

Bit. náročnosť[bpp]		2	1	0.5	0.25	0.1	0.05	0.01
PSNR [dB]	LDR	53.29	49.03	45.41	41.42	35.76	31.75	23.30
	DD(4,4)	52.92	48.51	44.64	40.29	34.51	30.9	22.45
	Neville 4	52.81	48.36	44.23	40.02	34.17	30.58	22.51
	CDF(2,2)	51.17	47.33	43.08	39.13	33.57	30.23	22.08
PSNR [dB]	DD(4,4)	59.46	51.45	46.46	41.21	35.95	31.92	23.14
	LV	58.65	50.78	45.38	40.25	35.39	31.36	22.77
	CDF(2,2)	57.75	50.53	44.92	40.01	34.98	30.55	22.93
	Neville 4	53.29	47.88	43.21	38.97	33.93	30.23	22.78
PSNR [dB]	DD(4,4)	60.44	53.50	48.55	44.97	39.70	35.6	24.61
	CDF(2,2)	58.96	51.69	47.63	44.11	38.79	35.01	24.87
	LH	58.87	51.80	47.58	44.05	38.69	35.05	24.37
	Neville 4	56.35	51.17	47.64	44.07	38.65	34.94	25.06
PSNR [dB]	DD(4,4)	53.72	49.48	46.30	43.11	38.01	34.24	24.58
	LDL	53.50	49.20	46.11	43.12	37.94	33.99	23.83
	Neville 4	53.42	49.21	46.06	42.85	37.77	33.81	24.74
	LV	53.25	48.99	45.67	42.33	37.44	33.53	24.34







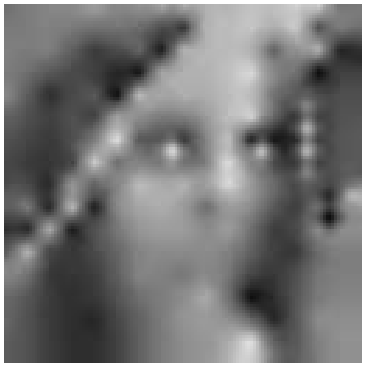


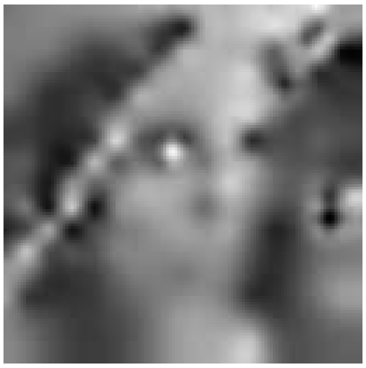
Tabuľka 7.11: Odstup signál/šum pri kompresii obrazu nella s rôznymi smermi pohybového rozostrenia algoritmom SPIHT pre rôzne druhy waveletov (zoradené podľa dosiahnutých výsledkov)

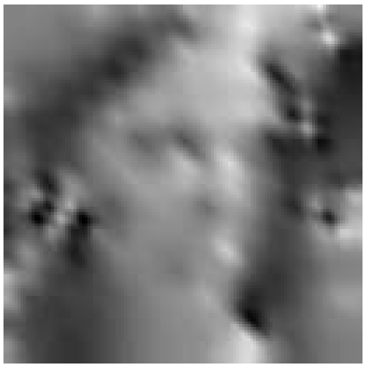

a)Originál


b)CDF(2,2)

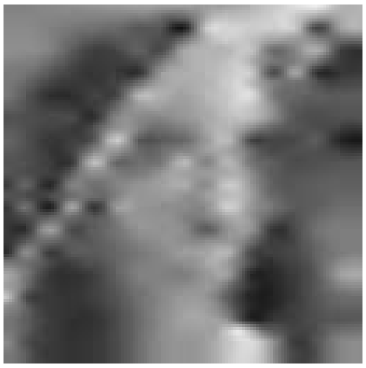

c)DD(4,4)


d)Neville rád 2


e)Neville rád 4

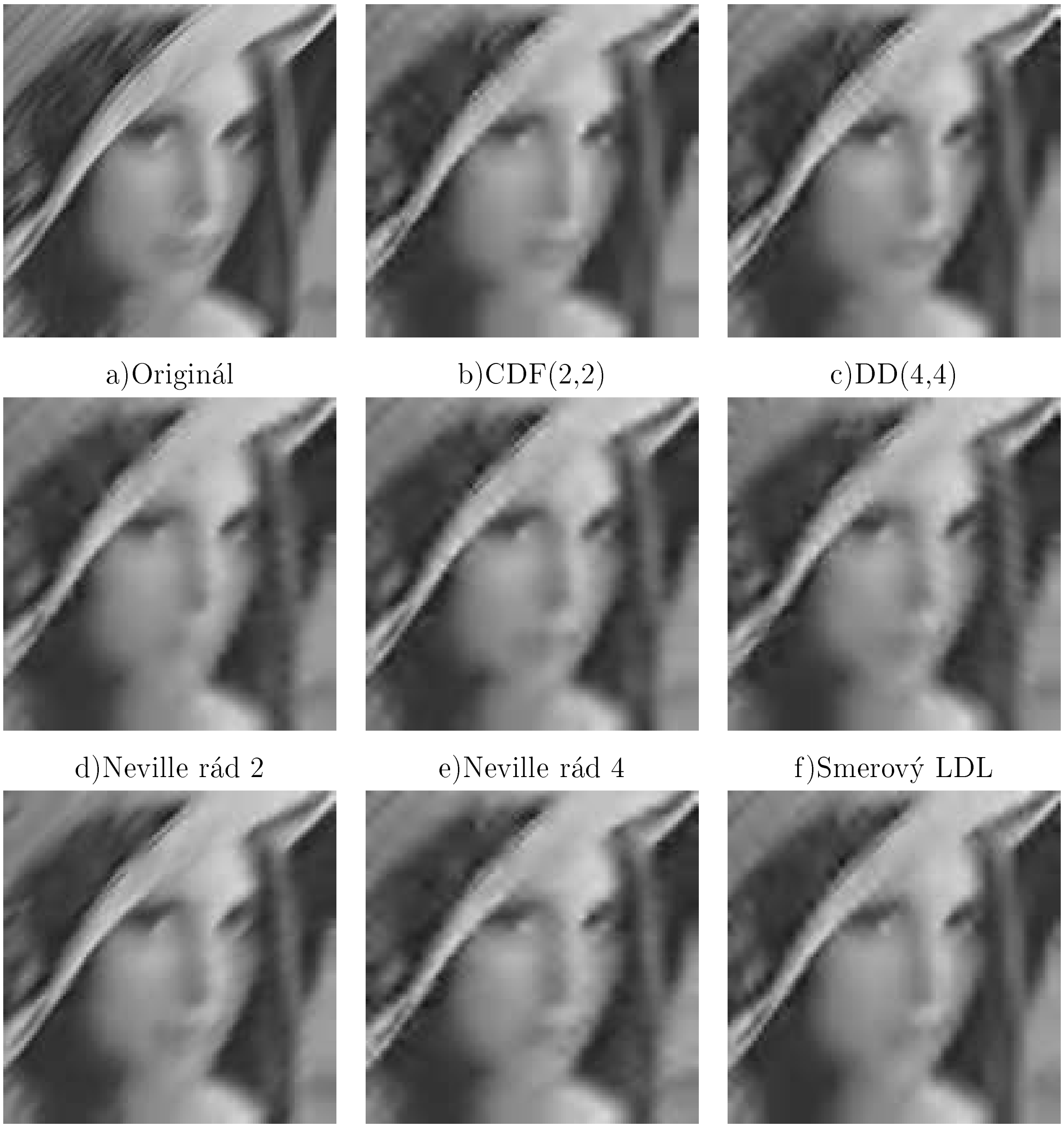

f)Smerový LDL


g)Smerový LDR


h)Smerový LH


i)Smerový LV

Obr. 7.14: Rekonštruovaný obraz nella pri kompresii 1:800 (bpp=0.01) algoritmom SPIHT použitím rôznych druhov waveletov: a) originálny obraz b) separovateľný CDF(2,2) c) separovateľný DD(4,4) d) neseparovateľný Neville rád 2 e) neseparovateľný Neville rád 4 f) Smerový LDL g) Smerový LDR h) Smerový LH i) Smerový LV



Obr. 7.15: Rekonštruovaný obraz nella s pohybovým rozostrením 45° vpravo hore pri kompresii 1:400 algoritmom SPIHT použitím rôznych druhov waveletov: a) originálny obraz b) separovateľný CDF(2,2) c) separovateľný DD(4,4) d) neseparovateľný Neville rád 2 e) neseparovateľný Neville rád 4 f) Smerový LDL f) Smerový LDR g) Smerový LH h) Smerový LV

Kapitola 8

Predikčné kódovanie s max. počtom nulových momentov

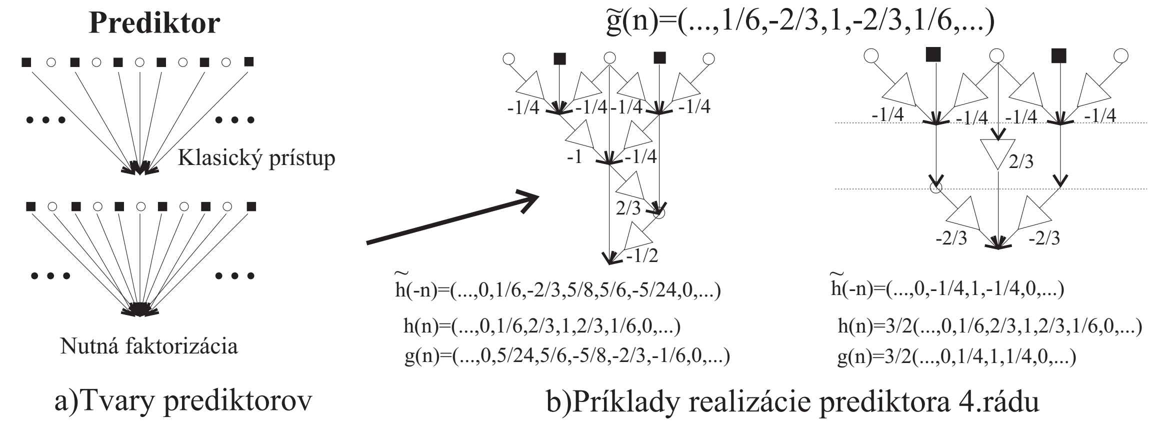
Lifting schéma nám poskytuje široký rámec možností manipulácie s dátami, pri zaručenej úplnej rekonštrukcii. Ak naša aplikácia nevyžaduje rekurzívnu predikciu (resp. stačí malá hĺbka rekurzie) resp. potrebujeme venovať maximálne úsilie predikcii, môžeme navrhnúť filtre tak, aby sme získali maximálny počet nulových momentov pre analyzujúci wavelet (= max. polynomické predikčné schopnosti). S výhodou na to môžeme použiť Nevillov rekurzívny algoritmus na polynomickú interpoláciu [3]. Ak máme daných N funkčných hodnôt funkcie $y_i = f(x_i)$,$y_{i+1} = f(x_{i+1})$,...,$y_l = f(x_l)$, potom interpolujúci polynóm $P(x)$ stupňa $N-1$ môžeme zostrojiť rekurzívne, začínajúc s polynómami nultého rádu (identické s funkčnými hodnotami v zadaných bodoch):

$$P_{ij\ldots kl}(x) = \frac{(x-x_l)P_{ij\ldots k}(x) - (x-x_i)P_{j\ldots kl}(x)}{x_i - x_l} \tag{8.1}$$

Ak chceme mať maximálnu mieru dekorelácie, musíme na predikciu použiť body z bezprostredného okolia predikovaného bodu. V tom prípade musíme prediktor nutne faktorizovať, v opačnom prípade by bol ťažko invertovateľný, resp. nestabilný. Známe konštrukcie interpolačných prediktorov predikujú párne body z nepárnych, resp. naopak [57][78][60]. Výhodou je, že pri iterácii takéto interpolátory zaručujú konvergenciu na hladkú funkciu [60], čo je výhodné v prípade waveletov. Nevýhodou je, že sa kvôli tvaru prediktorov nedajú faktorizovať. Oba druhy interpolačných prediktorov sú znázornené na Obr.8.1a.

Pri návrhu prediktorov Nevillovým algoritmom môžeme postupovať nasledovne [78]:

1. jeden z predikujúcich bodov nastavíme na 1, ostatné na 0



Obr. 8.1: Tvorba prediktorov pri klasickom prístupe a pri použití všetkých okolitých bodov(a) a príklady faktorizácie(b)

2. vykonáme interpoláciu predikujúcich bodov Nevillovým algoritmom

3. funkčná hodnota interpolačného polynómu v predikovanom bode, udáva predikčný koeficient od predikujúceho bodu nastaveného na hodnotu 1

4. opakujeme postup od bodu 1 pre všetky predikujúce body v prediktore

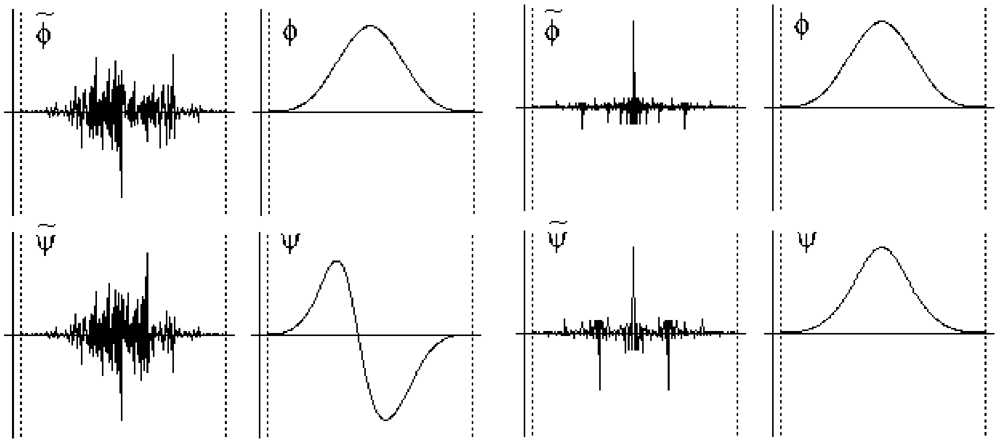
Ziskané výsledky po 6. rád sú uvedené v Tabuľke 8.1. Filtračné koeficienty sú vypočítané ako negatívna hodnota predikčných koeficientov (okrem $\tilde{g}(0) = 1$) vzhľadom na interpretáciu prediktorov podľa Obr.2.16. Prediktory nepárneho rádu majú dve zrkadlové nesymetrické riešenia, prediktory párneho rádu majú jedno symtetrické riešenie.

Koeficienty filtra		$\tilde{g}(-3)$	$\tilde{g}(-2)$	$\tilde{g}(-1)$	$\tilde{g}(0)$	$\tilde{g}(+1)$	$\tilde{g}(+2)$	$\tilde{g}(+3)$
rád prediktora	2			-1/2	1	-1/2		
	3			-1/3	1	-1	1/3	
	3		1/3	-1	1	-1/3		
	4		1/6	-2/3	1	-2/3	1/6	
	5		1/10	-1/2	1	-1	1/2	-1/10
	5	-1/10	1/2	-1	1	-1/2	1/10	
	6	-1/20	3/10	-3/4	1	-3/4	3/10	-1/20

Tabuľka 8.1: Koeficienty filtrov pri polynomickej interpolácii použitím bodov v bezprostrednom okolí predikovaného (interpolovaného) bodu

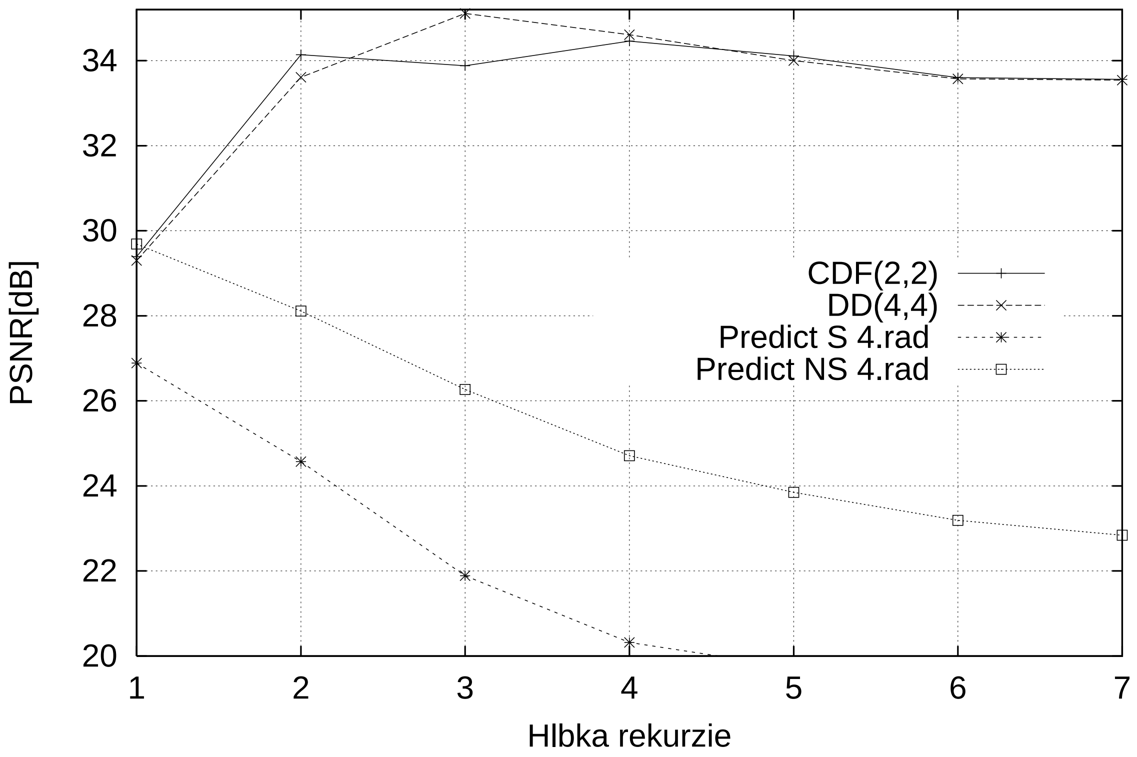
Príklady faktorizácie prediktora 4. rádu sú uvedené na Obr.8.1b. Klasický postup neumožňuje vytvorenie symetrického prediktora. Pri zavedení pozdĺžnych násobičiek do priečkových štruktúr, môžeme vytvoriť aj symetrické prediktory. Obe uvedené faktorizácie sú bez normalizácie. Základné wavelety a funkcie mierky pre zodpovedajúce wavelety sú zobrazené na Obr.8.2. Vidíme, že analyzačná časť je bez regularity (očakávané vzhľadom na rozdelenie momentových vlastností) a syntéza je regulárna, čo je výhodnejšie pre kompresiu obrazu ako prípad opačný.

Výkon uvedenej triedy prediktorov je ukázaný na Obr.8.3 na príklade prediktora 4. rádu. Vidíme, že s rastom hĺbky rekurzie klesá účinnosť prediktora 4. rádu v dôsledku malej regularity analyzačnej časti (a tým aj celkovej nestability). Avšak bez rekurzie dosahuje lepšie výsledky (s nesymetrickým prediktorom) než používané wavelety obdobného rádu.



a) asymetrický prediktor 4.rádu b) symetrický prediktor 4.rádu

Obr. 8.2: Funkcie mierky a základné wavelety DWT použitím prediktora 4.rádu so štyrmi nulovými momentami $\tilde{\psi}$, pre rôzne druhy implementácie prediktora v lifting schéme.

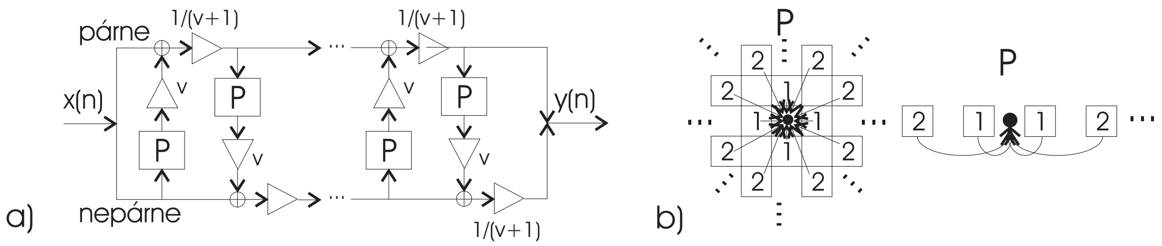


Obr. 8.3: Závislosť PSNR od hĺbky rekurzie DWT pri kompresii obrazu nella algoritmom SPIHT (implementované lifting schémou bez symetrizácie a úpravy energie) a pri bitovej náročnosti 1Bpp. Pozn: S - symetrický prediktor, NS - nesymetrický prediktor

Kapitola 9

Algoritmus na výpočet jednoducho invertovateľných DP filtrácií

Na vyhladzovanie signálu v praxi často používané filtračné postupy neumožňujú rekonštruovať pôvodné dáta z dát filtrovaných, resp. umožňujú to za cenu zvýšenej komplexnosti výpočtu. V ďalšom texte opisovaný algoritmus využíva podobné priečkové štruktúry ako lifting schéma, čím umožňuje úplnú rekonštrukciu signálu pri rovnakej komplexnosti výpočtu. Priečková štruktúra zodpovedajúca procesu vyhladenia signálu,



Obr. 9.1: Aplikácia priečkových štruktúr vo filtračnom postupe (a), tvar 1D prediktorov v separovateľnom a 2D prediktorov v neseparovaťeľnom (Quincunx) prípade (b)

resp. doprednej transformácii, je zobrazená na Obr.9.1a. Keďže sa jedná o DP filtráciu, prediktory sa používajú iba na aktualizáciu, a to tak, aby sme obraz vyhladili a zachovali pritom pôvodný dynamický rozsah. Aby sme zachovali dynamický rozsah, musia byť zavedené násobičky v pozdĺžnych vetvách, pričom však nesmie dôjsť k strate informácie, t.j. treba pracovať s reálnymi číslami, resp. uschovávať istý počet bitových rovín. Nech prediktory P sú v normovanom tvare:

$$\sum_{i=0}^{N-1} p_i = 1 \tag{9.1}$$

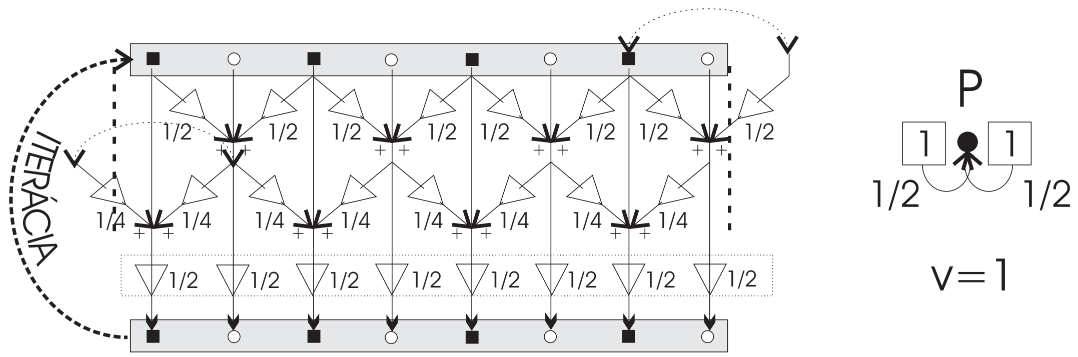
kde p_i sú koeficienty prediktora P rádu N. Potom v danej schéme "v" predstavuje váhu prediktora pri aritmetickom priemere s aktualizovanou hodnotou. Pri iterovaní postupu na Obr.9.1a celý signál konverguje k svojej jednosmernej zložke. Konvergencia sa urýchli pri väčšej váhe prediktora , avšak rozdiel medzi oboma navzájom sa aktualizujúcimi množinami bodov je výraznejší. Pri každom iteračnom kroku narastá potreba pamätať si k bitov pre desatinné miesta vzťahom:

$$k = U_l log_2(v+1), \quad v \in (0, \infty) \tag{9.2}$$

kde U_l je počet vykonaných iterácií. Aktualizácia je taktiež vykonávané s aktuálne vyžadovanou presnosťou. Celý postup môžeme vykonať separovateľne v oboch rozmeroch, alebo neseparovateľne, napr. použitím Quincunx vzorkovania a 2D prediktorov (Obr.9.1b). Príklad filtračného postupu použitím triviálneho symetrického DP filtra je na Obr.9.2. Inverzná transformácia, resp. rekonštrukcia vyšších frekvencií v obraze sa vykoná jednoduchým obrátením všetkých vykonaných krokov podobne ako tomu bolo pri lifting schéme.Vlastnosti uvedeného postupu môžeme zhrnúť v nasledujúcich bodoch (+ označujú klady, - označujú zápory):

- úplná rekonštrukcia (+)
- môžnosť zrýchlenia výpočtu faktorizáciou filtrov (+)
- rekonštrukcia s nezmenenou komplexnosťou výpočtu (+)
- jednoduché ošetrenie signálu na okrajoch (napr. symetria) (+)
- možné ľubovoľné rozmery obrazu (nie len mocniny čísla 2) (+)
- mierne hodnotové disproporcie medzi aktualizujúcimi sa množinami (-)

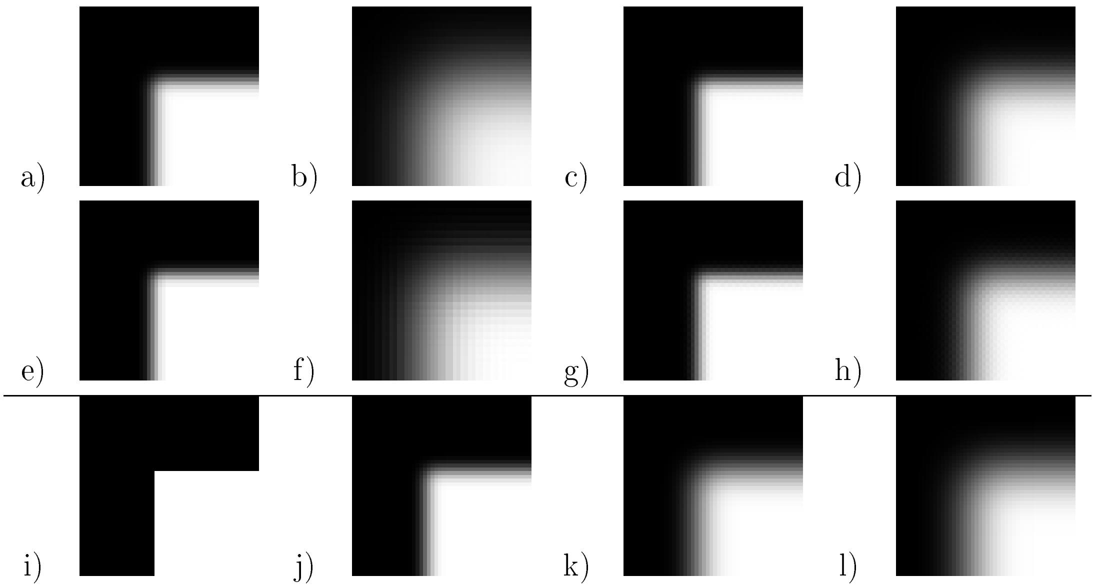
Na Obr.9.3 a Obr.9.4 sú ukázané výsledky uvedeného filtračného algoritmu a porovnané s klasickým filtračným postupom gaussovskými filtrami. Separovateľné filtrácie konvergujú rýchlejšie ako pri použití Quincunx-u. Pri separovateľných filtráciách majú hodnotové disproporcie formu pásov, pri Quincunx-e formu šachovnice, pričom



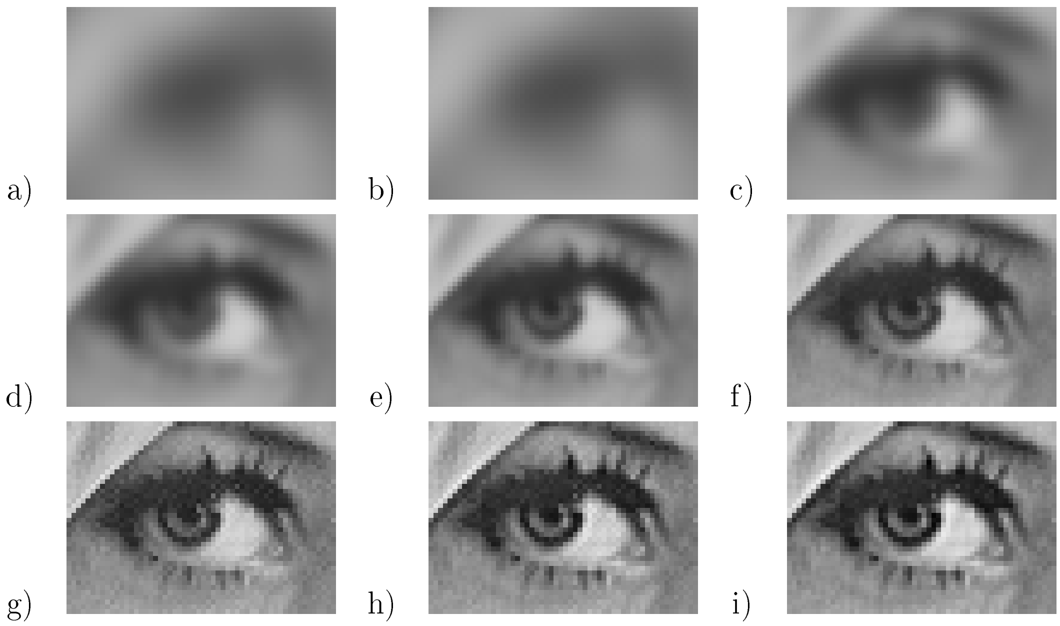
Obr. 9.2: Realizácia DP filtrácie pri použití triviálneho symetrického filtra

sú viditeľné až pri niekoľko-násobnom zväčšení obrazu. Vizuálne prijateľnejší je neseparovateľný prípad. Výsledky sú porovnateľné s gaussovskými filtrami.

Obrátením celého postupu, t.j. inverznou transformáciou (HP filtrácia) môžeme obraz zostriť. Pri viacerých iteráciách však postup už nie je efektívny. Príklad dosiahnutých výsledkov a jeho porovnanie s klasickým postupom je na Obr.9.4.



Obr. 9.3: DP filtrácia jednoduchého obrazca: a)Sfilter r=1,v=1,N=6 b)Sfilter r=3,v=1,N=6 c)Qfilter r=1,v=1,N=12 d)Qfilter r=3,v=1,N=12 e)Sfilter r=1,v=7,N=2 f)Sfilter r=3,v=7,N=2 g)Qfilter r=1,v=7,N=4 h)Qfilter r=3,v=7,N=4 i)Originál j)Gfilter r=2 k)Gfilter r=4 l)Gfilter r=6. Pozn.: Sfilter - separovateľný, Qfilter - použitím Quincunxu, r - rád, v - váha, N - počet iterácií



Obr. 9.4: Filtrovaný výrez z obrazu Lena: a)Gfilter r=6, b)Qfilter r=3,N=14 c)Qfilter r=1,N=14 d)Qfilter r=1,N=6 e)Qfilter r=1,N=2 f)Originál. Zostrenie hrán: g)Qfilter r=1,N=-1 h)Qfilter r=3,N=-1, i)Paint Shop Pro 5.01 (sharpen)

Kapitola 10

Záver

Obsahovú náplň tejto práce (v súlade s cieľmi vytýčenými v časti 2.5) tvoria predovšetkým rozšírenia a spôsoby aplikácie waveletovej transformácie (WT) v transformačných kóderoch na kompresiu obrazu. Sú odvodené a vytvorené viaceré modifikácie WT, ktorých vlastnosti a účinnosť pri kompresii obrazu sú otestované na reálnych obrazoch. Väčšina diskutovaných modifikácií WT využíva lifting schému, čím je umožnená bezstratová kompresia a jednoduchá hardverová realizácia. Pri kompresii obrazu použitím všetkých vytvorených WT bol použitý princíp progresívneho kódovania adaptáciou algoritmu SPIHT, ktorý bol v práci využitý aj na efektívny spôsob kompresie obrazu využitím rôznych typov blokových transformácií. Od hlavného smerovania práce, t.j. stratovej kompresii obrazu sa odchyľuje vytvorenie algoritmu na bezstratovú DP filtráciu obrazu, ktorý využíva princípy lifting schémy. Viaceré časti práce tvoria aj teoretické príspevky týkajúce sa základov diskutovaných oblastí.

Ťažiskom celej práce sú kapitoly 3 až 9. Kapitola 3 sa venuje použitiu rôznych blokových transformácií v progresívnych kóderoch ako náhrady DWT. V kapitole 4 sú použitím konceptu subpásmových transformácií odvodené v maticovom tvare biortogonálne podmienky úplnej rekonštrukcie a maticový tvar DWT. Rozšíreniu WT pomocou hybridizácie sa venuje kapitola 5. Kapitola 6 sa venuje lifting schéme v častiach 6.1, 6.2, 6.3 po stránke teoretickej, v časti 6.4 z hľadiska implementácie WT pri použítí algoritmu SPIHT skúmaním vplyvu symetrizácie resp. normalizácie WT. V kapitole 7 je navrhnutý koncept realizácie neseparovateľných 2D WT použitím vzorkovania quincunx a 2D prediktorov. Okrem adaptácie skupiny Nevillových filtrov sú tu navrhnuté a otestované aj dve nové skupiny waveletov: izotropné 2D wavelety skonštruované pomocou $1D \to 2D$ transformácie TORING (časť 7.1) a smerové wavelety (časť 7.3). V kapitole 8 je skonštruovaná a otestovaná skupina separovateľných WT s maximálnou schopnosťou polynomicej predikcie dát. V kapitole 9 sú využité priečkové štruktúry lifting schémy na návrh algoritmu výpočtu jednoducho invertovateľných DP filtrácií.

Domnievam sa, že ciele práce sa podarilo splniť, pričom výsledkom sú prínosy v oblasti teoretickej ako aj oblasti aplikačnej:

1. pôvodné prínosy v teoretickej oblasti

    - odvodenie biortogonálnych podmienok úplnej rekonštrukcie v maticovom tvare (4.8)(4.9) a maticového tvaru DWT (4.10) použitím filtračných matíc (kapitola 4)
    - rozšírenie WT zavedením konceptu hybridných waveletov (kapitola 5)
    - formulácia a dôkaz dvoch liem pomáhajúcich prechádzať medzi tvarmi polyfázovej reprezentácie FB (časť 6.1), vysvetlenie eliminácie aliasingu v lifting schéme (časť 6.2), odvodenie algorimov preusporiadania keficientov medzi Mallatovou a lifitng reprezentáciou (časť 6.3) v kapitole 6
    - navrhnutie konceptu neseparovateľných 2D WT použitím vzorkovania quincunx a 2D prediktorov s využitím lifting schémy, odvodenie $1D \to 2D$ transformácie TORING (7.2)-(7.5)mapujúcej prediktory prototypových 1D WT spĺňajúcich (7.1) na 2D prediktory tvoriace neseparovateľné 2D WT s izotropnými bázovými funkciami (kapitola 7)

2. pôvodné prínosy v aplikačenj oblasti

    - zlepšenie kompresného pomeru pri zachovaní rovnakého skreslenia použitím a)opakovania transformácie v DP pásme Obr.3.3 b) primeraným zväčšením transformačného bloku (Obr.3.5)(vizuálne aj menej rušivé - Obr.3.6) v progresívnom kóderi využívajúcom blokové transformácie (kapitola 3)
    - zlepšenie kompresného pomeru pri použití rôznych DWT pri algoritme SPIHT použitím renormalizácie filtrov (časť 6.4) v kapitole 6
    - navrhnutie konceptu realizácie neseparovateľných 2D WT použitím vzorkovania quincunx a 2D prediktorov, konštrukcia izotropných 2D waveletov pomocou transformácie TORING (časť 7.1), konštrukcia smerových waveletov (časť 7.3) (kapitola 7)

  - konštrukcia separovateľných WT s maximálnou schopnosťou polynomicej predikcie (kapitola 8)
  - vytvorenie algoritmu výpočtu jednoducho invertovateľných DP filtrácií (kapitola 9)

V práci obsiahnutá problematika transformačného kódovania použitím waveletovej transformácie je veľmi rozsiahla, v súčastnosti sa rýchlo rozvíjajúca a poskytuje široký priestor pre ďalšiu prácu. Už jednotlivé názvy väčšiny kapitol v práci by mohli predstavovať dosť široké témy samostatných prác. Niektoré z aplikovaných princípov sa ukázali ako čiastočne účinné (WT s maximálnou schopnosťou polynomickej predikcie) avšak väčšina potvrdila svoj potenciál pri kompresii resp. spracovaní obrazu. S prácou najtesnejšie súvisiace okruhy na ktoré by som sa chcel v budúcnosti zamerať (s ohľadom na dosiahnuté výsledky a najnovšie trendy) by som mohol zhrnúť nasledovne:

- pokračovať v použití separovateľných waveletov avšak zamerať hlavne na podmieňovanie, t.j. prediktívne zohľadnenie reprezentácie objektov vo waveletovom spektre
- konštrukcia progresívneho kódera s využitím blokových transformácií a algoritmov na potlačenie blokového efektu
- optimalizácia zmiešavania báz, predovšetkým štúdium zmiešaných báz pri použití waveletových paketových transformácií (WPT) a výber najlepšej bázy
- konštrukcia neseparovateľných waveletov s využitím princípov transformácie TORING pri iných typoch vzorkovania, rozšíriť koncept aj pre WPT
- rozšírenie konceptu smerových waveletov - zabudovanie adaptivity, vyvinúť kompletný kódovací proces
- vyvinutie všeobecnejších filtračných algoritmov využitím lifting schémy

Okrem uvedených okruhov by som širší rámec ďalšej práce sformuloval v týchto bodoch:

- použitie multiwaveletov a adekvátne rozšírenie lifting schémy a úprava kompresných algoritmov

- viac sa zamerať na oblasť fraktálovo-waveletových kóderov
- využitie WT resp. WPT pri kódovaní objektov v obraze
- návrh nelineárnych WT
- rozšírenie práce o oblasti kompresie pohyblivého obrazu a zvuku

Literatúra

[1] Pratt,W.,K.: *Digital Image Processing*, John Wiley & Sons, New York, 1978.

[2] Rosenfeld, A., Kak, A., C.: *Digital Picture Processing*, Vol. 1, Academic Press, London, 1982.

[3] Stoer, J., Bulirsch, R.: *Introduction to Numerical Analysis*, Springer Verlag, New York, 1980.

[4] Rabbani, M., Jones, P., W.: *Digital Image Compression Techniques*, Published by SPIE - The International Society for Optical Engineering, Bellingham, Washington, 1991

[5] Wallace, G., K.: *The JPEG still Picture Compression Standard*, Communications of the ACM, Vol.34, No.4, April 1991, str. 30-44

[6] Malvar, H., S.: *Signal processing with Lapped Transforms*, Artech House, 1991

[7] Akanasu, A., N., Haddad, R., A.: *Multiresolution signal decomposition* , Academic press, 1992.

[8] Daubechies, I.: *Ten lectures on wavelets*, SIAM, 1992.

[9] Chui, Ch., K.: *An introduction to wavelets*, Academic press, NewYork, 1992.

[10] Chui, Ch., K. editor: *Wavelets: A tutorial in Theory and Applications*, Academic Press, 1992.

[11] Vetterli, M., Kovačević, J.: *Wavelets and Subband Coding*, Prentice Hall, 1995.

[12] Strang, G.,Nguyen, T.: *Wavelets and Filter Banks*, Wellesley-Cambridge Press, 1996.

[13] Burrus, S., C., Gopinath, A., Guo, H.: *Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms*, Prentice Hall, 1998.

[14] Akanasu, A., N., Smith M.(editors): Subband and Wavelet Transforms, Design and Application, Kluwer Academic Publishers, 1988.

[15] Cohen, A.: *Wavelets and multiscale Signal processing*, Champan& Hall, 1995.

[16] Newland,D.E.: *An introduction to Random vibrations, spectral and wavelet analysis*, Longman Scientific & Technical, 1993.

[17] Erlenbacher.G, editor: *Wavelets: theory and applications*, Oxford University Press, 1996.

[18] Benedetto,J., Frazier,M.,W.: *Wavelets: mathematics and applications*, CRC, 1994.

[19] Meyer.Y.: *Wavelets:algoritms and applications*, SIAM, 1993.

[20] SIGGRAPH 95 Course Notes: *Wavelets and their Applications in Computer Graphics*, organized by Fournier,A., University of British Columbia, 1995.

[21] Polec, J., Pavlovičová, J., Oravec, M.: *Vybrané metódy kompresie dát*, Faber, Bratislava, 1996.

[22] Polec, J.: *Neštandardné postupy v použití diskrétnych ortogonálnych transformácií pre kompresiu údajov*, Dizertačná práca, EF STU, Bratislava, 1993.

[23] Hudecová, M., Polec, J., Vargic, R.: *Discrete Orthogonal Transforms in Hommomorphic Filtering of Image, Image processing and Neural Networks'93*, Conference with International Participation, Liptovský Mikuláš 1993.

[24] Polec, J., Vargic, R.: *Decreasing of Information Redundance n-dimensional Signal with (n+1) - dimensional Discrete Orthogonal Transform*, International Conferance on Digital Signal Processing'93, Košice 1993.

[25] Polec, J., Pavlovičová, J., Vargic, R.: *New ordering sequences and bases Functions of Discrete Fourier and Discrete Hartley Transforms for Transforms Coders*, International Workshop on Image Processing, June 1994, Journal on Communications, Vol.XLV, July - August 1994, Budapest, 1994, str. 75-76.

[26] Vargic, R.: *Compression of images using orthogonal and biorhogonal wavelets*, Proceeding of internationalcompetition of student's scientific works '96 organized by Foundation of J.Murgas for Telecommunications, Bratislava, 1996.

[27] Polec, J., Vargic, R.: *Interpolative Methods with Orthogonal ransforms*, Proceedings of 2nd International Workshop of Tempus Telecomnet Project, February 1997, Smolenice.

[28] Vargic, R.: *Kompresia obrazu pomocou waveletovej transformácie*, Rigorózna práca, FEI STU v Bratislave, Marec 1997.

[29] Vargic, R.: *Lifting scheme and fast wavelet transform*, Proceeding of international competition of scientific works in telecommunications'97 organized by Foundation of J.Murgaš for Telecommunications, Bratislava, May 1997.

[30] Polec, J., Vargic, R.: *LOT with Nonstandard Basis Functions*, Proceedings of 3rd International Workshop TEMPUS Telecomnet, Košice, Slovak Republic, 2.9.1997, str. 112-115 (in slovak).

[31] Vargic, R.: *Lossy image compression using multidimensional wavelets and Lifting scheme*,Proceeding of international competition of scientific works in telecommunications'98 organized by Foundation of J.Murgas for Telecommunications, Bratislava, May 1998, str. 48-51 (in slovak)

[32] Vargic, R.: *Embedded Coding of Still Images Using Block Transforms*, Proceedings of 3rd International Conference on Multimedia Technology and Digital Telecommunication Services, Budapest, October 28-30, 1998, str. 213-218

[33] Vargic, R.: *An Approach to 2 Dimensional Wavelet Transform and its use for Image Compression*, Radioengineering, Vol. 7, No. 4, Decebmer 1998., str. 1-6

[34] Coifman R., Wickerhauser, M., V.: *Entrophy-Based Algorithms for Best Basis Selection*, IEEE Transaction on Information theory, Vol. 38, March 1992.

[35] Ramchandran, K., Vetterli, M.: *Best wavelet packet bases in rate-distortion sense*, IEEE Transaction on Image Processing, Vol. 2, April 1993.

[36] Herley,C., Vetterli,M.: *Orthogonal Time-Varying Filter Banks and Wavelet Packets*, IEEE Transactions on signal processing, Vol.42, October 1994.

[37] Ramchandran,K., Vetterli,M., Herley,C.: *Wavelets, Subband Coding, and Best Bases*, Proceedings of the IEEE, Vol. 84, No.4, pp 541-560, 1996.

[38] Xiong, Z., Ramchandran, K., Orchard, M., T.: *Space-Frequency Quantization for Wavelet Image Coding*, IEEE Trans. on Image Processing, May 1997, Vol. 6, str. 677-693.

[39] Davis, G., Nosratinia, A.: *Wavelet-based Image Coding: An Overview*, Applied and Computational Control, Signals, and Circuits, Vol. 1, No. 1, Spring 1998.

[40] Sweldens, W.: *Wavelets: What Next?*, Proc. of the IEEE, Vol. 84, Nr. 4, str. 680-685, 1996.

[41] Fischer,Y., editor: *Fractal Image compression*, Springer-Verlag, 1994.

[42] Krupnik,H., Malah D., Karnin E.: *Fractal representation of images via the discrete wavelet transform*, in IEEE 18-th Conv. of EE in Israel, Tel-Aviv, Mar.1 1995

[43] Davis, M., G.: *A Wavelet-Based Analysis of Fractal Image Compression*, IEEE Transaction on Image Processing, Vol. 6, 1997.

[44] Rinaldo, R., Calvagno, G.: *Image Coding by Block Prediction of Multiresolution Subimages*, IEEE Transaction on Image Processing, Vol. 4, No. 7, str.909-920, July 1995.

[45] Mallat, S.: *Zero-Crossings of a Wavelet Transform*, IEEE Transactions on Information Theory, Vol. 37, July 1991, str. 1019-1033.

[46] Xia, X., Suter, B., W.: Vector-Valued Wavelets and Vector Filter Banks, IEEE Transactions on signal processing, Vol. 44, march 1996.

[47] Gersho, A., Gray, R., M.: *Vector quantization and signal compression*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1992.

[48] Villasenor, J.,D., Belzer, B., Liao, J.: *Wavelet filter evaluation for Image compression*, IEEE Transactions on Image processing, Vol. 4, August 1995.

[49] Goh,S.,S.: *Displacement in wavelet decomposition of images*, Signal Processing, Vol. 44, June 1995.

[50] Da Silva,E.,A.,B., Ghanbari,M.: *On the Performance of linerar Phase Wavelet Transforms in Low Bit-Rate Image Coding*, IEEE transactions on image processing, Vol. 5, May 1995.

[51] Xia, X, Geronimo,J.,S., Hardin,P., Suter,B.,W.: Design of Prefilters for Discrete Multiwavelet Transforms, IEEE Transactions on signal processing, Vol. 44, januar 1996.

[52] Antonini, M., Barlaud, M., Mathieu, P., Daubechies, I.: *Image coding using wavelet transform*, IEEE Trans. Image Proc., Vol. 3, Nr. 2, str. 205-220, April 1995.

[53] Belzer,B.m Lina Jean-Marc, Villasenor,J.: Complex, Linear-Phase Filters for Efficient Image Coding, IEEE transactions on signal processing, Vol. 43. October 1995.

[54] Rioul,O.: *Regular wavelets: A discrete-Time Approach*, IEEE Transactions on signal processing„ Vol. 41, december 1993.

[55] Shah, A., I.: *Theory, Design and Structures for Multidimensional Filter Banks and Applications in Coding of Interlaced Video*, Ph.D. Thesis, Columbia University 1994.

[56] Sweldens, W., Schröder, P.: *Building your own wavelets at home*, in Wavelets in Computer Graphics, str 15-87, ACM SIGGRAPH Course notes, 1996.

[57] Kovačević, J., Sweldens, W.: *Wavelet families of increasing order in arbitrary dimensions*, Preprint, Bell Laboratories, Lucent Technologies, December 1997.

[58] Boor, C., Ron,A.: *On multivariate polynomial interpolation*, Constr. Approx., Nr. 2, str. 287-302, 1990.

[59] Uytterhoeven, G., Bultheel, A.: *The Red-Black Wavelet Transform*, TW Report 271, Department of Computer Science, Katholieke Universiteit Leuven, December 1997.

[60] Herley, C.: *Exact Interpolation and Iterative Subdivision Schemes*, IEEE Transactions on signal processing, Vol. 43, 1995.

[61] Wong, P., W., Noyes, S.: *Space-Frequency Localized Image compression*, IEEE Transactions on image processing, Vol. 3, May 1994.

[62] Lewis, A., S., Knowles, G.: *Image Compression using the 2-D Wavelet Transform*, IEEE Transactions on Image Processing, Vol. 1, No. 2, str. 244-250, December 1993.

[63] Xiong, Z., Guleryuz, I., Orchard, M., T.: *A DCT-based Embedded Image Coder*, IEEE Signal Processing Letters, vol. 3, str. 289-290, November 1996.

[64] Davis, G,. Chawla, S.: *Image Coding Using Optimized Significance Tree Quantization*, Proc. Data Compression Conference, 1997, str. 387-396.

[65] Rogers, J., K., Cosman, P.: *Wavelet Zerotree Image Compression with Packetization*, IEEE Signal Processing Letters, vol. 5, str. 105-107, May 1998.

[66] Chou, J., Crouse, M., Ramchandran, K.: *A Simple Algorithm for Removing Blocking Artifacts in Block-Transform Coded Images*, IEEE Signal Processing Letters, vol. 5, str. 33-35, February 1998.

[67] Tran, T., D., Nguyen, T., Q.: *A progressive transmission image coder using linear phase paraunitary filter banks*, 31st Asilomar Conference on SSC, Pacific Grove, CA, Nov. 1997.

[68] Manduca, Armando: *Embedded Zerotree Wavelet Compression of Medical Images*, IEEE Engineering in Medicine & Biology 17th Annual Conference, Montreal, 1995

[69] Nagarajan, K,. Kresh, E., Rao, S., S., Kresh., Y.: *Constrained ECG Compression Using Best Adapted Wavelet Packet Bases*, IEEE Signal Processing Letters, Vol. 3, No. 10, October 1996

[70] Strela, V., Heller, P., Strang, G., Topiwala, P., Heil, C.: *Multiwavelet filter banks for data compression*, Proc. IEEE ISCAS, Seattle, 1995.

[71] Strela, V., Heller, P., Strang, G., Topiwala, P., Heil, C.: *The application of multiwavelet filter banks to signal and image processing*, IEEE Trans. on Image Proc. (1998).

[72] Sweldens, W.: *The Lifting Scheme: A new philosophy in biorthogonal wavelet constructions*, In A. F. Laine and M. Unser, editors, Wavelet Applications in Signal and Image Processing III, str. 68-79, Proc. SPIE 2569, 1995.

[73] Sweldens, W.: *A custom-design construction of biorthogonal wavelets*, Appl. Comput. Harmon. Anal., Vol. 3, Nr. 2, str. 186-200, 1996.

[74] Sweldens, W.: *The Lifting Scheme: A Construcion of Second Generation Wavelets*, Preprint, November 1997.

[75] Daubechies, I., Sweldens, W.: *Factoring Wavelet Transforms Into Lifting Steps*, J. Fourier Anal. Appl., Vol. 4, Nr. 3, str. 247-269, 1998.

[76] Uytterhoeven, G., Wulpen, F.: *Waili: Wavelets with Integer Lifting* Report TW262,Department of Computer Science, K.U.Leuven, July 1997.

[77] Uytterhoeven, G., Rose, D., Bultheel, A.: *Wavelet Transforms Using the Lifting Scheme*, Report ITA-Wavelets-WP1.1,Department of Computer Science, K.U.Leuven, April 1997.

[78] Fernández, G., Periaswamy, S.: *LIFTPACK: A Software Package for Wavelet Transforms using Lifting*, Technical Report TR-96-04, Department of Computer Science, University of South Carolina, 1996.

[79] Zorin, D., Schröder, P., Sweldens, W.: *Interpolating Subdivision for Meshes with Arbitrary Topology*, Computer Graphics Proceedings (SIGGRAPH 96), str. 189-192, 1996.

[80] Calderbank, R,. C., Daubechies, I., Sweldens, W., Yeo, B.: *Losless Image Compression using Integer to Integer Wavelet Transforms*, International Conference on Image Processing (ICIP) 1997, Vol. I, str. 596-599.

[81] Ramaswamy, V.: *Losless Image Compression Using Wavelet Decomposition*, PhD Thesis, University of South Florida, August 1998.

[82] Chao, H., Fisher, P.: *An Approach to Fast Integer Reversible Wavelet Transforms for Image Compression*, Proceedings of Guangzhou International Symposium on Computational Mathematics", 11-15.8 1997, Guangzhou, China

[83] Claypole, R., Davis, G., Sweldens, W., Baraniuk, R.: *Nonlinear Wavelet Transforms for Image Coding*, Proceedings of the 31st Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers, Vol. 1, str.662-667, 1997.

[84] Devitte, S., Cornelis, J.: *Lossless Integer Wavelet Transform*, IEEE Signal Processing Letters, Vol. 4, No. 6, June 1997.

[85] Memon, N., Wu, X., Yeo, B.: *Entropy coding techniques for lossless image compression with reversible integar wavelet transforms*, IBM Research Report, Oct. 22, 1997

[86] Wu, X.: *High-Order Context Modeling and Embedded Conditional Entropy Coding of Wavelet Coefficient for Image Compression*, Department of Computer Science, University of Western Ontario, Preprint

[87] Shapiro, J., M.: *Embedded image coding using zerotrees of wavelet coefficients*, IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 41, str. 3445-3462, April 1992.

[88] Said, A., Pearlman, W. A.: *A new fast and efficient image codec on set partitioning in hierarchical trees*," IEEE Trans.on Circuits Syst. Video Tech., vol. 6, str. 243-250, June 1996

[89] Burrows, M., Wheeler, D., J.: *A Block-sorting Lossless Data Compression Algorithm*, Digital Systems Research Center, Research Report 124, May 1994.

[90] Nelson, M.: *Data Compression with the Burrows-Wheeler Transform*, Dr.Dobb's Journal, Sep. 1996.

[91] Guo, H., Burrus, C., S.: *Waveform and Image Compression Using the Burrows Wheeler Transform and the Wavelet Transform*, IEEE Proc. ICIP'97, submitted.

[92] Gormish, J., Schwartz, E., Boliek, M., Zandi, A., Keith, A.: *Lossless and nearly lossless compression for high quality images*, Proc. of IS&T/SPIE's 9th Annual Symposium, Vol. 3025, San Jose, February 1997.

[93] Wu, X., Memon, N.: *Context-based, Adaptive, Lossless Image Codec*, IEEE Trans. on Communications, Vol. 45, No. 4, str. 437-444, April 1997.

Príloha A. Zoznam použitých skratiek, symbolov a pojmov

Skratky

1D,2D	Jednorozmerný, Dvojrozmerný
bpp	Počet bitov na bod (bits per pixel)
BT	Blokové transformácie (Block Transform)
CQF	Konjugované kvadratúrne filtre
DCT	Diskrétna kosínusová transformácia
DOT	Diskrétna ortogonálna transformácia
DLT	Diskrétna lineárna transformácia
DP	Dolnopriepustný
DWT	Diskrétna waveletová transformácia
EC	Entropický kóder
EOB	Koniec bloku (End of Block)
EZW	Embedded zero-tree wavelet algoritmus
FB	Banka filtrov (Filter bank)
FFT	Rýchla Fourierova transformácia
FWT	Rýchla waveletová transformácia (Fast wavelet transfrom)
GLBT	Zovšeobecnená prekryvná biortogonáln transformácia
HP	Hornopriepustný
KLT	Karhunen-Loevova transformácia
JPEG	Joint Photographics Experts Group
JSM	Jednosmerný
KIO	Konečná impulzová odpoveď
MPEG	Moving Picture Experts Group
LOT	Prekryvná ortogonálna transformácia (Lapped orthogonal transform)
LVS	Ľudský vizuálny systém
MRA	Analýza s viacúrovňovým rozlíšením (Multiresolution analysys)
MSE	Stredná kvadratická chyba (Mean Square Error)
NIO	Nekonečná impulzová odpoveď
NSD	Najväčší spoločný deliteľ
pdf	Funkcia hustoty pravdepodobnosti (Probability Density Function)

PSD	Výkonová hustota spektra (Power Spektral Density)
PSNR	Odstup signál/šum (Peak Signal to Noise Ratio)
Q	Kvantizátor (Quantizer)
QMF	Kvadratúrne zrkadlové filtre (Quadrature Mirror Filters)
SBC	Subpásmové kódovanie (Subband Coding)
SBT	Subpásmová transformácia (Subband Transform)
SPIHT	Subband Partitioning in Hierarchical Trees (algoritmus)
STFT	Krátka Fourierova transformácia (Short Time Fourier Transform)
SWT	Spojitá waveletová transformácia
TC	Transformačné kódovanie (Transform Coding)
VQ	Vektorový kvantizátor
WPT	Waveletová paketová transformácia
WR	Waveletové rady
WT	Waveletová transformácia
ZT	Stromy nulových koeficientov (Zerotrees)

Matematické symboly

$\mathcal{Z}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{C}$	množiny celých, reálnych a komplexných čísel
$\mathcal{R}^N$, $\mathcal{C}^N$	N- rozmerný priestor nad množnou reálnych a komplexných čísel
$L^2(\mathcal{R})$	vektorový priestor merateľných, po štvorcoch integrovateľných funkcií $f(x)$, kde $x \in \mathcal{R}$
$\star$	označenie komplexnej konjugácie
$\bigoplus$	ortogonálny súčet
$\sim$	označenie duality (napr. $h(n)$ a $\tilde{h}(n)$ sú impulzové charakteristiky navzájom duálnych filtrov)
$\ddot{}$	označenie reverzie bitov (ak $k = bit_0 ... bit_m \Rightarrow \ddot{k} = bit_m ... bit_0$)
$\bar{x}$	stĺpcový vektor, $\bar{x}^T = [x(0), x(1), ..., x(N-1)]$, $N \in \mathcal{Z}$
$\langle f(x), g(x) \rangle$	skalárny súčin, $\langle f(x), g(x) \rangle = \sum_{x=-\infty}^{\infty} f(x) g^\star(x) \quad , x \in \mathcal{Z}$ $\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) g^\star(x) dx \quad , x \in \mathcal{R}$
$h(n) * x(n)$	konvolúcia $\quad h(n) * x(n) = \sum_k h(k) x(n-k), \quad n, k \in \mathcal{Z}$
$\delta(x)$	$\delta(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$, $x \in \mathcal{R}$ alebo $x \in \mathcal{Z}$ (Kroneckerov impulz)
$\mathbf{I}$, $\mathbf{I}_N$	jednotková diagonálna matica rozmerov NxN

$\mathbf{0}_N$	nulová matica rozmerov NxN
A	operácia aktualizácie v lifting schéme
$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$	transformačné matice DLT
$c(n), d(n)$	waveletové koeficienty(DP resp. HP charakteru)
$\tilde{F}_k(z)$, $F_k(z)$	prenosové funkcie k-teho filtra pri analýze/syntéze v M-pásmovej FB
$h(n)$, $H(z)$	impulzová charakteristika filtra a odpovedajúca prenosová funkcia
$\tilde{h}(n)$, $\tilde{g}(n)$	impulzové charakteristiky filtrov analizačej časti 2-kanálovej FB
$h(n)$, $g(n)$	impulzové charakteristiky filtrov syntetizačej časti 2-kanálovej FB
$h_{mr}(n)$, $g_{mr}(n)$	koeficienty pre zmenu rozlíšenia
K, $\tilde{K}$	počet nulových momentov waveletu resp. jeho duálneho waveletu (t.j. násobnosti nuly v prenosových funkciách ich generujúcich filtrov)
K_N	normalizačná konštanta, $K_N \in \mathcal{R} - \{0\}$
$\mathbf{P}(z)$	polyfázová matica
P	operácia predikcie v lifting schéme
$P_p(z)$	prenosová funkcia polpásmového filtra
$R_a(z)$, $R_p(z)$	prenosové funkcie charakterizujúce aliasing resp. celkový prenos v 2-kanálovej banke filtrov
r	renormalizačný koeficient
$Ring_k^n\{bod\}$	k-te prstencové okolie bodu v prípade n-rozmerného Quincunxu
$S_i(z)$, $T_i(z)$	polynómy predikcie resp. aktualizácie v i-tom kroku lifting schémy
$\sigma_t^2(f)$, $\sigma_\omega^2(f)$	miera rozptylu energie funkcie $f(t)$ v čase resp. vo frekvencii
$\psi(t)$, $\varphi(t)$	základný wavelet a funkcia mierky
$\mathbf{T}_a$, $\mathbf{T}_s$	elementárne transformačné matice pre subpásmové transformácie
U	počet úrovní rozkladu pri WT
V_i, W_i	sumačné resp. diferenčné podpriestory priestoru $L^2(\mathcal{R})$
$w(k)$	k-ty waveletový spektrálny koeficient

Slovník pojmov

Basic wavelet (mother wavelet)	Základný wavelet
Bit allocation	Alokácia bitov
Bit rate	Bitová náročnosť
Cefficient scaning	Načitavanie koeficientov
Compact support	Kompaktná podpora

Conjugate quadrature filters (CQF)	Konjugované kvadratúrne filtre
Decomposition relations	Vzťahy pre rozklad
Dilatation	Zmena mierky
Domain	Reprezentácia
Fast wavelet transfrom (FWT)	Rýchla waveletová transformácia
Filter Bank (FB)	Banka filtrov
Halfband filter	Polpásmový filter
Inner product	Skalárny súčin
Interscale coefficients	Koeficienty pre zmenu rozlíšenia
Mirror filter	Zrkadlový filter
Multirate systems	Systémy s rôznym taktovaním
Multiresolution	Viacúrovňové rozlíšenie
Orthogonal decomposition	Ortogonálny rozklad
Quadrature mirror filters (QMF)	Kvadratúrne zrkadlové filtre
Predict/update	Predikcia/aktualizácia
Rate-distortion	Závislosť skreslenia od bitovej náročnosti
Regularity	Regularita
Scaling function	Funkcia mierky
Scaling coefficient	Koeficient mierky
Signal expansion	Rozšírenie signálu
Subband coding (SBC)	Subpásmové kódovanie
Subband transform	Subpásmova transformácia
Two scale relations	Relácie zmeny rozlíšenia
Wavelet series	Waveletové rady
Wavelet packet transform (WPT)	Waveletová paketová transformácia
Zerotree (ZT)	Strom nulových koeficientov