DWT v maticovom tvare.

Uvažujme nasledovné tvary rovníc:

Rozklad(analýza):

$$c_{m+1}(n) = \sum_k h_{mr}(k-2n)\, c_m(k)$$

$$d_{m+1}(n) = \sum_k g_{mr}(k-2n)\, c_m(k)$$

Rekonštrukcia(syntéza):

$$c_m(n) = \sum_k h_{mr}(n-2k)\, c_{m+1}(k) + \sum_k g_{mr}(n-2k)\, d_{m+1}(k)$$

Tieto vzťahy môžeme prepísať do maticového tvaru ako transformácie:

$$\begin{aligned} c_{m+1}(n) &= \sum_k h_{mr}(k-2n)\, c_m(k) \\ d_{m+1}(n) &= \sum_k g_{mr}(k-2n)\, c_m(k) \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{m+1} \\ \mathbf{D}_{m+1} \end{pmatrix} = \mathbf{T}_a^{(m)} \mathbf{C}_m$$

$$c_m(n) = \sum_k h_{mr}(n-2k)\, c_{m+1}(k) + \sum_k g_{mr}(n-2k)\, d_{m+1}(k) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{C}_m = \mathbf{T}_s^{(m)} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{m+1} \\ \mathbf{D}_{m+1} \end{pmatrix}$$

, kde T_a , T_s sú ***štvorcové*** transformačné matice pre analýzu, resp. pre syntézu a $\mathbf{C}_m$ resp. $\mathbf{D}_m$ sú stĺpcové vektory (matice) :

$$\mathbf{C}_m = \left(c_m(0), c_m(1), \ldots, c_m(N_m - 1)\right)^T$$
$$\mathbf{D}_m = \left(d_m(0), d_m(1), \ldots, d_m(N_m - 1)\right)^T$$

kde veľkosť vektorov je:

$$N_m = 2^{-m} N_0$$

Pozn.: *v ďalšom texte budeme* h_{mr} , g_{mr} *používať bez označenia "mr".*

Maticový zápis pri periodickom rozšírení signálu

$$\mathbf{H}_m = \overbrace{\begin{pmatrix} h(0) & h(1) & \dots & \dots & \dots & h(-1) \\ \dots & h(-1) & h(0) & h(1) & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & h(-1) & h(0) & h(1) \end{pmatrix}}^{N_m} \qquad \mathbf{G}_m = \overbrace{\begin{pmatrix} g(0) & g(1) & \dots & \dots & \dots & g(-1) \\ \dots & g(-1) & g(0) & g(1) & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & g(-1) & g(0) & g(1) \end{pmatrix}}^{N_m} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} a\\a\\a\\a \end{pmatrix}}\right\} \frac{N_m}{2}$$

$$\mathbf{H}_m^T = N_m \left\{ \begin{pmatrix} h(0) & \vdots & \dots & \vdots \\ h(1) & h(-1) & \dots & \vdots \\ \vdots & h(0) & \dots & \vdots \\ \vdots & h(1) & \dots & h(-1) \\ \vdots & \vdots & \dots & h(0) \\ h(-1) & \vdots & \dots & h(1) \end{pmatrix} \right. \qquad \mathbf{G}_m^T = N_m \left\{ \begin{pmatrix} g(0) & \vdots & \dots & \vdots \\ g(1) & g(-1) & \dots & \vdots \\ \vdots & g(0) & \dots & \vdots \\ \vdots & g(1) & \dots & g(-1) \\ \vdots & \vdots & \dots & g(0) \\ g(-1) & \vdots & \dots & g(1) \end{pmatrix} \right.$$

Analýza: $\mathbf{C}_{m+1} = \mathbf{H}_m \mathbf{C}_m \quad \mathbf{D}_{m+1} = \mathbf{G}_m \mathbf{C}_m$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C}_{m+1} \\ \mathbf{D}_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_m \\ \mathbf{G}_m \end{pmatrix} \mathbf{C}_m \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{T}_a^{(m)} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_m \\ \mathbf{G}_m \end{pmatrix}$$

Syntéza: $\mathbf{C}_m = \begin{pmatrix} \mathbf{H}^T{}_m & \mathbf{G}^T{}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{m+1} \\ \mathbf{D}_{m+1} \end{pmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{T}_s^{(m)} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}^T{}_m & \mathbf{G}^T{}_m \end{pmatrix}$

Všeobecne platí (vynechajme indexy "m"):

$$\mathbf{T_a T_s} = \mathbf{I}_N = \mathbf{T_s T_a}$$

Vyjadrime:

$$\mathbf{I}_N = \begin{pmatrix} \mathbf{I_{N/2}} & \mathbf{0_{N/2}} \\ \mathbf{0_{N/2}} & \mathbf{I_{N/2}} \end{pmatrix} = \mathbf{T}_a \mathbf{T}_s = \begin{pmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{H}^T & \mathbf{G}^T \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} \mathbf{HH}^T & \mathbf{HG}^T \\ \mathbf{GH}^T & \mathbf{GG}^T \end{pmatrix}$$

z čoho vyplýva:

$$\mathbf{HH}^T = \mathbf{GG}^T = \mathbf{I} \qquad \mathbf{HG}^T = \mathbf{GH}^T = 0$$

T.j. impulzové charakteristiky filtrov sú ortogonálne k párnym posunom svojich duálov a ortogonálne navzájom „nakríž“ = podmienky ***biortogonality***. A zároveň, aby bola splnená rovnosť na pravej strane, musia spĺňať $g(n)$ dodatočnú podmienku:

$$g(n) = \pm(-1)^n h(M-n), \qquad \text{M-nepárne}$$

V prípade Haarovej DWT:

- **Rozklad (= dopredná transformácia)**

$$c_{m+1}(n) = \sum_k \widetilde{h}_{mr}(k-2n)c_m(k) \qquad d_{m+1}(n) = \sum_k \widetilde{g}_{mr}(k-2n)c_m(k)$$

$$\mathbf{C}_{m+1} = \widetilde{\mathbf{H}}_m \mathbf{C}_m \qquad \mathbf{D}_{m+1} = \widetilde{\mathbf{G}}_m \mathbf{C}_m$$

$$\tilde{h}_{mr} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,1) \qquad \tilde{g}_{mr} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,1)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_m = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \tilde{\mathbf{G}}_m = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Príklad vstupného signálu:

$$c_0(n) = (1,2,3,4,5,6,7,8)^T \qquad N_0 = 8$$

$$c_1(n) = \frac{\sqrt{2}}{2}(3,7,11,15)^T \qquad d_1(n) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1,-1,-1,-1)^T$$

$$\mathbf{T}_a = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{H}}_m \\ \tilde{\mathbf{G}}_m \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Reprezentácia signálu po jednom transformačnom kroku:

$$\left(c_1(n), d_1(n)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(3,7,11,15,-1,-1,-1,-1\right)^T$$

➔ Ďalšie kroky analogicky ... (ešte 2 kroky)

- **Rekonštrukcia (= spätná transformácia)**

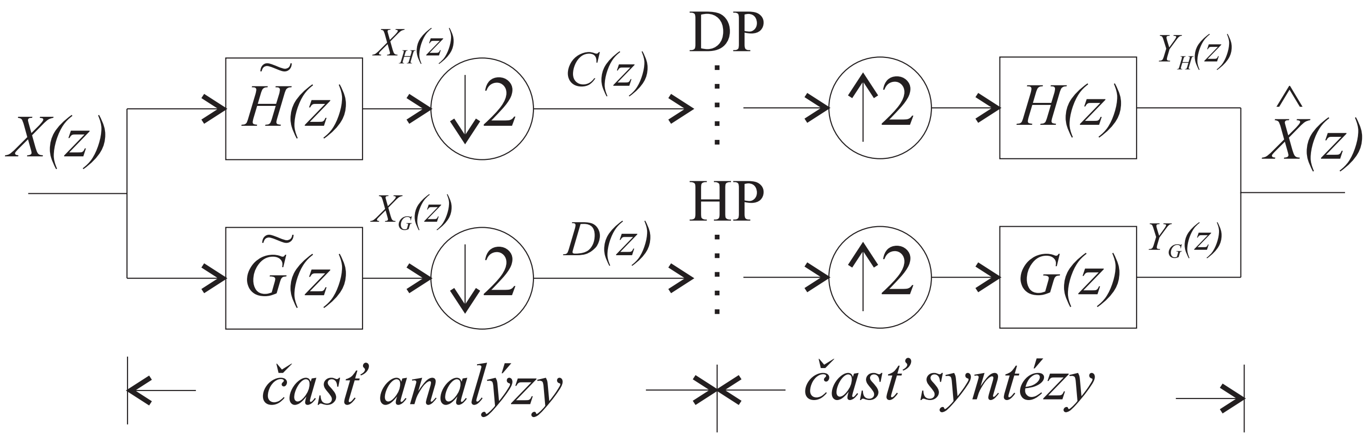
$$c_m(n) = \sum_k h_{mr}(n-2k)c_{m+1}(k) + \sum_k g_{mr}(n-2k)d_{m+1}(k)$$

$$\mathbf{C}_m = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_m & \mathbf{G}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{m+1} \\ \mathbf{D}_{m+1} \end{pmatrix} = \mathbf{T}_s \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{m+1} \\ \mathbf{D}_{m+1} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H}_m = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{G}_m = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{T}_s = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Vektory bázy, do ktorej sme transformovali, sú stĺpcové vektory z matice $\mathbf{T}_s$.

Dvojpásmové banky filtrov



Platí(V1):

$$c(n)=\sum_k \widetilde{h}(2n-k)\,x(k) \qquad d(n)=\sum_k \widetilde{g}(n-2k)\,x(k)$$

$$\hat{x}(n)=\sum_k h(n-2k)\,c(k)+\sum_k g(n-2k)\,d(k)$$

DWT(V2):

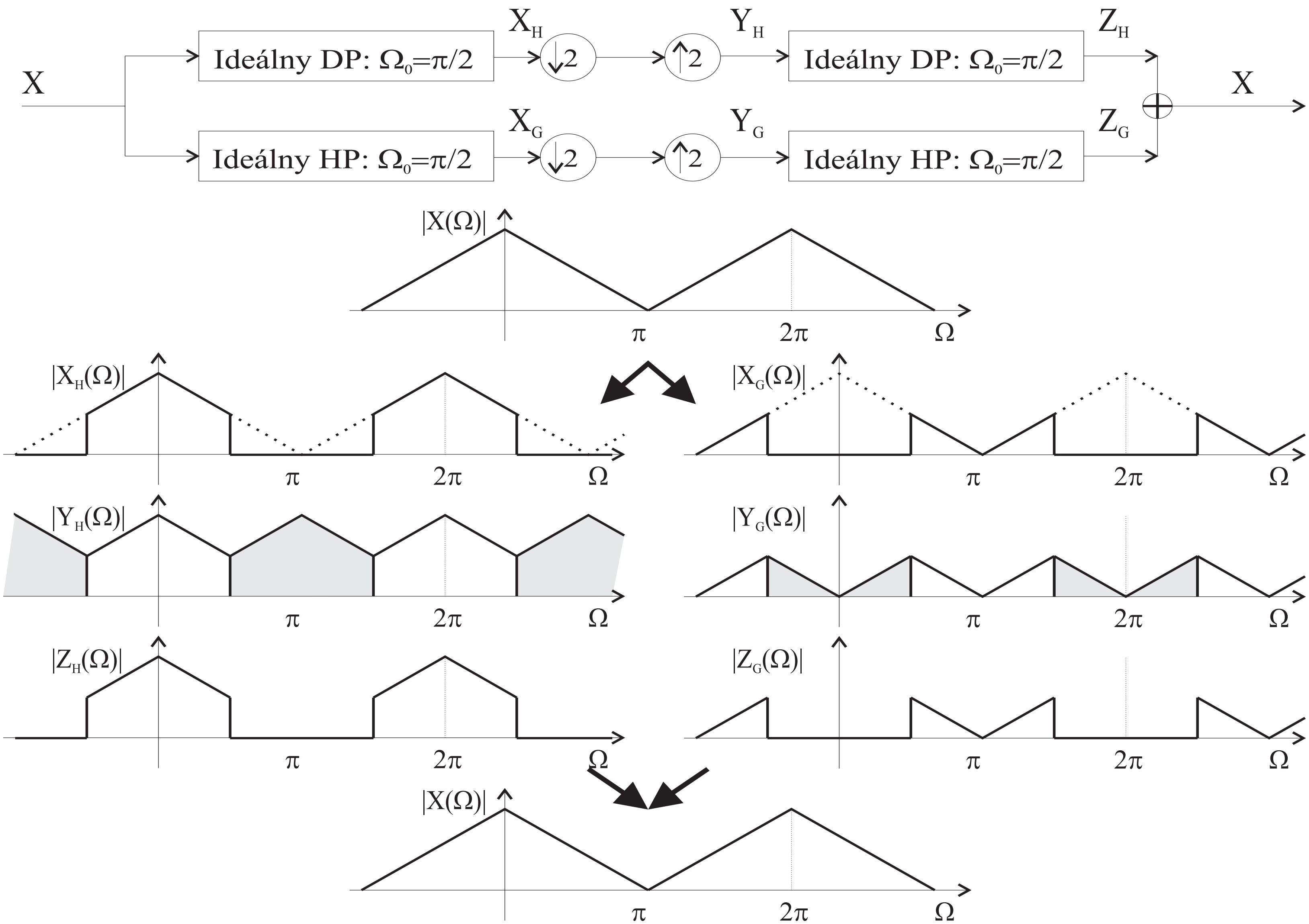
$$c_{m+1}(n)=\sum_k \widetilde{h}_{mr}(k-2n)\,c_m(k) \qquad d_{m+1}(n)=\sum_k \widetilde{g}_{mr}(k-2n)\,c_m(k)$$

$$c_m(n)=\sum_k h_{mr}(n-2k)\,c_{m+1}(k)+\sum_k g_{mr}(n-2k)\,d_{m+1}(k)$$

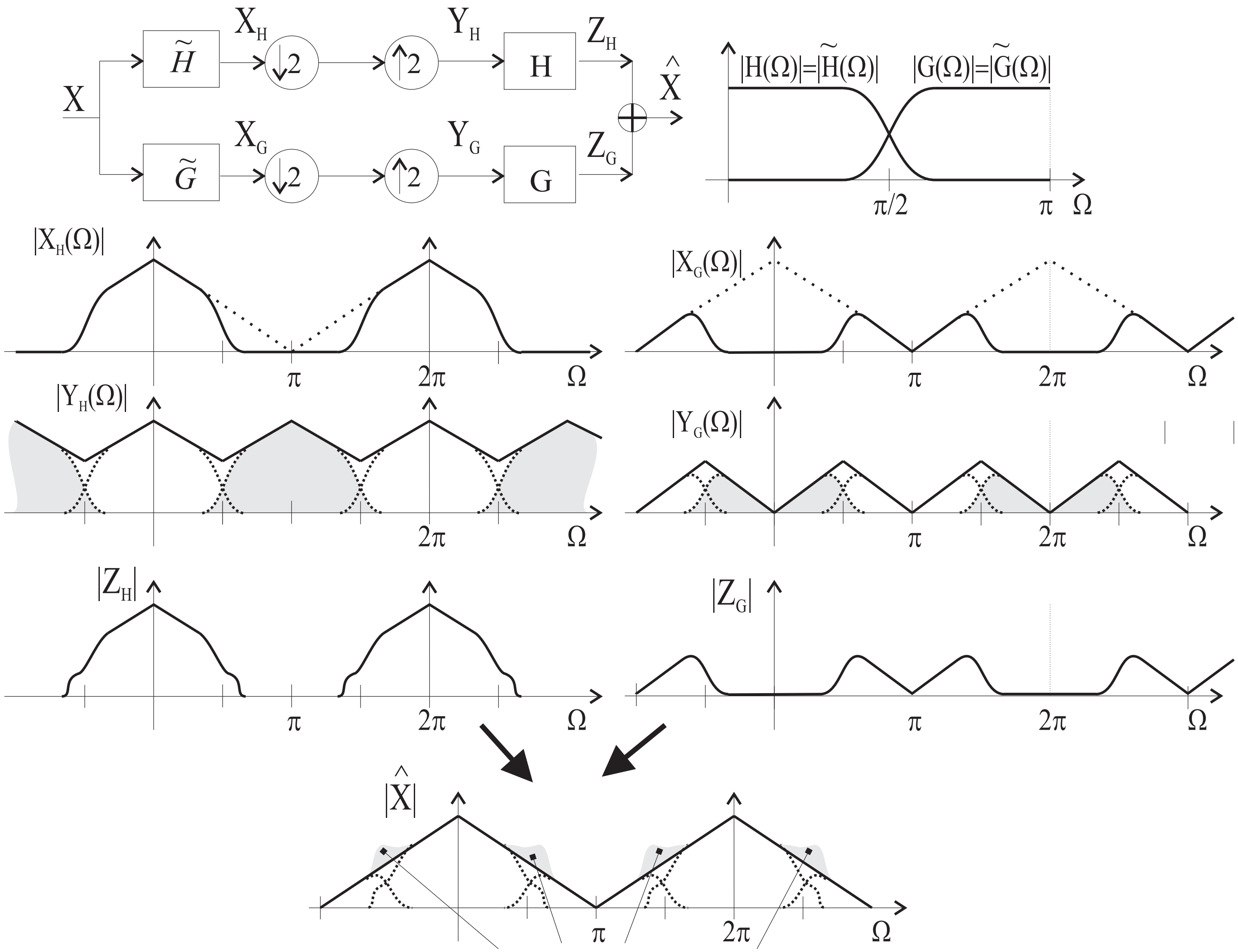
T.J.AK PLATÍ $\widetilde{h}(n)=\widetilde{h}_{mr}(-n) \qquad h(n)=h_{mr}(n)$

$\widetilde{g}(n)=\widetilde{g}_{mr}(-n) \qquad g(n)=g_{mr}(n)$ SÚ V1 a V2 TOTOŽNÉ !!!

Ako dosiahneme úplnú rekonštrukciu?

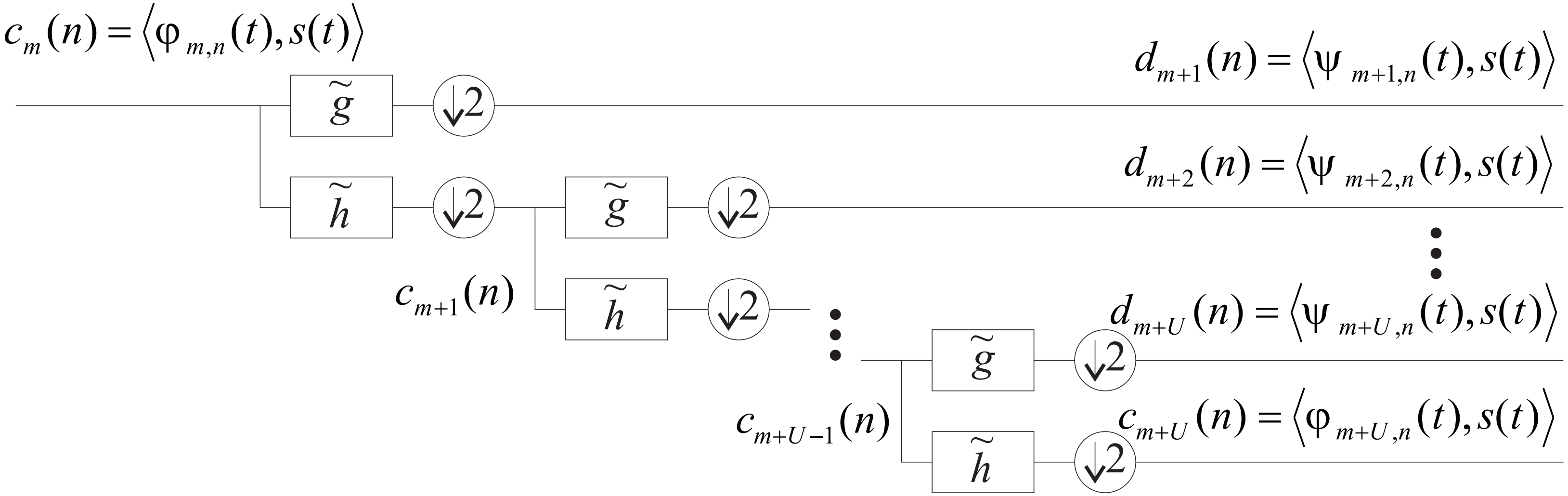


Ak filtre nie su ideálne?

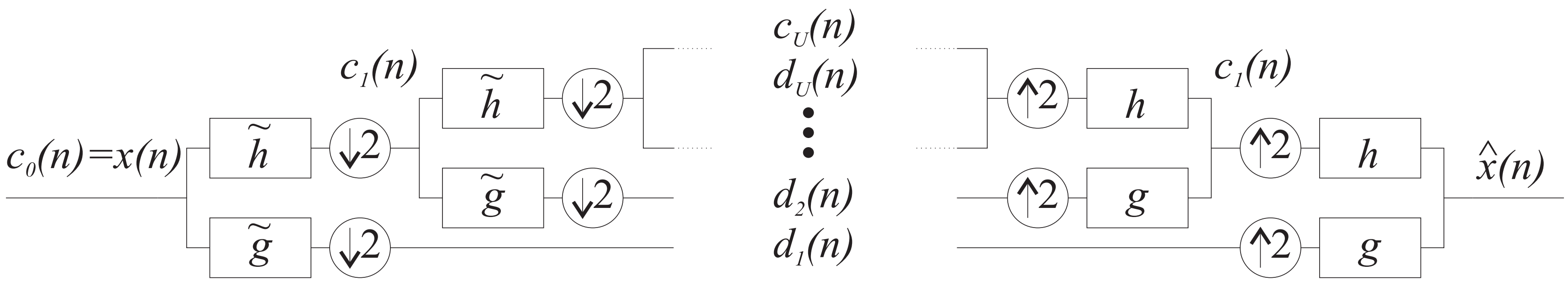


Pri úplnej rekonštrukcii sa aliasing z DP a HP časti navzájom eliminuje

Realizácia výpočtu WR pomocou bánk filtrov:



Realizácia výpočtu DWT a IDWT pomocou bánk filtrov:



Aký je rozdiel medzi BF s úplnou rekonštrukciou a BF ktoré realizujú wavelety?

→ Pri waveletoch je nutná aspoň jedna prenosovej funkcie DP filtra v $\Omega=\pi$ lebo potrebujeme Banku filtrov *iterovať*

→ Design kalsických Bánk filtrov je viac zameraný na rozdelenie subpásiem vo frekvenčnej oblasti, na selektivitu filtrov a na vznikajúci aliasing, pričom sa často ani nepožaduje úplná rekonštrukcia

Vzťah medzi h a g pri ortogonálnych waveletoch:

$$f(t) = \sum_m \sum_n d_{m,n} \tilde{\psi}_{mn}(t)$$

Generovanie $f(t)=\sum_m\sum_n d_{m,n}\tilde{\psi}_{mn}(t)$, $f(t)=\sum_m\sum_n d_{m,n}\tilde{\psi}_{mn}(t)$ z $f(t)=\sum_m\sum_n d_{m,n}\tilde{\psi}_{mn}(t)$, $f(t)=\sum_m\sum_n d_{m,n}\tilde{\psi}_{mn}(t)$ - kaskádové algoritmy

Ako vypočítať $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ ak poznáme koeficienty pre zmenu mierky?

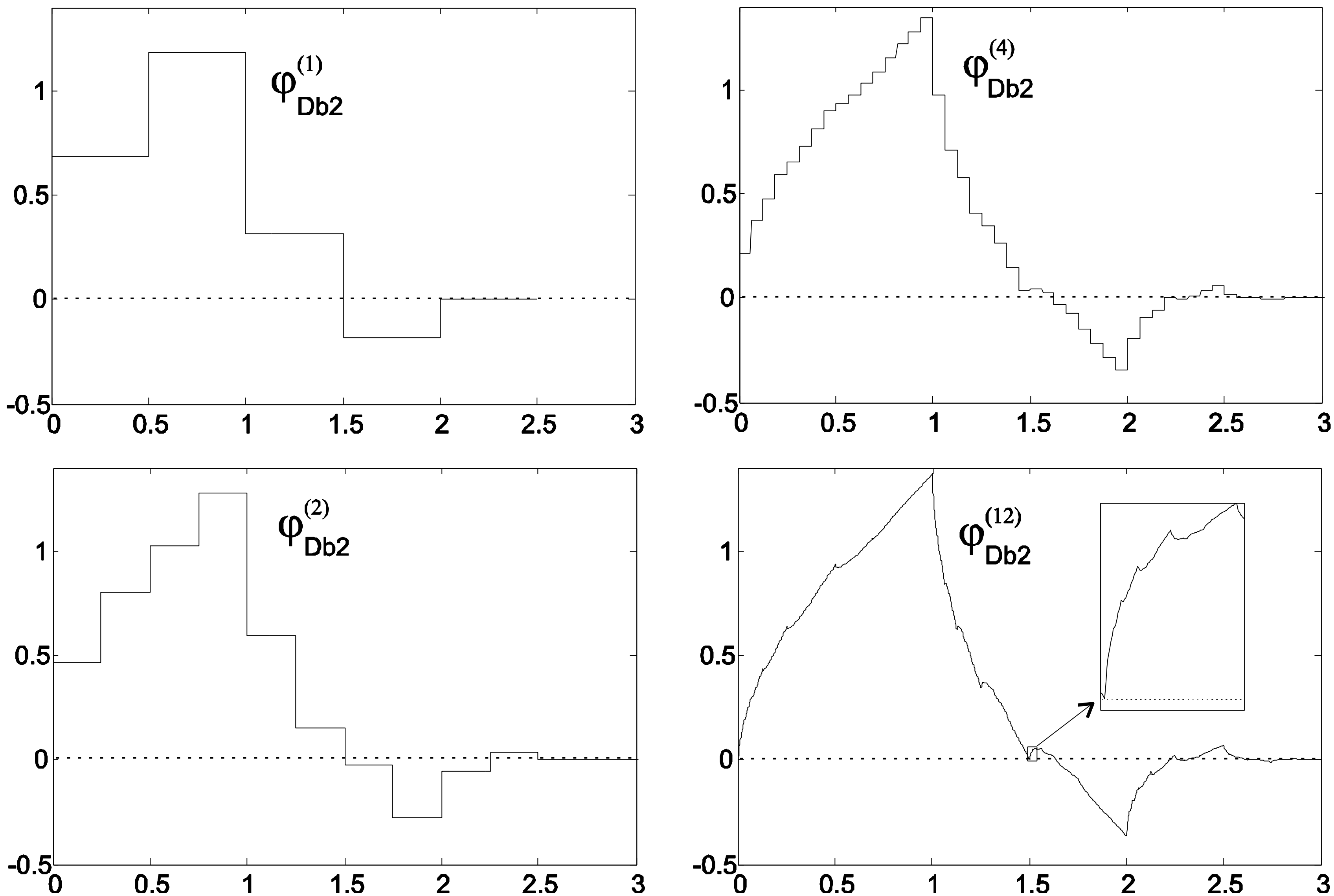
Vychádzajme z rovníc:

$$\varphi(t) = \sqrt{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n)\varphi(2t-n) \qquad \psi(t) = \sqrt{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{mr}(n)\varphi(2t-n)$$

Tieto rovnice môžeme riešiť *iteračne*, pričom ak postup bude konvergovať k pevnému bodu, potom je pevný bod hľadaným riešením. Iterácie sú definované:

$$\varphi^{(k+1)}(t) = \sqrt{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n)\varphi^{(k)}(2t-n) \qquad \psi^{(k+1)}(t) = \sqrt{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n)\psi^{(k)}(2t-n)$$

Uvedený iteračný postup sa nazýva aj *kaskádový algoritmus*.



Generovanie funkcie mierky Db2 waveletu kaskádovým algoritmom v čase. Výpočet zobrazený po 1,2,4 a 12 iteráciách. Počiatočný signál bola "Box" funkcia. Vpravo dole je zo zväčšeniny zrejmý fraktálový charakter. Porovnajte s tvarmi bázových funkcií priestorov *V*

K-regulárne filtre

FIR filter s impulzovou odpoveďou $h(n)$, ktorá spĺňa podmienky:

a) $f(t) = \sum_m \sum_n d_{m,n} \tilde{\psi}_{mn}(t)$

b) $f(t) = \sum_m \sum_n d_{m,n} \tilde{\psi}_{mn}(t)$

sa nazýva *K- regulárny* vtedy ak platia nasledovné **ekvivalentné** tvrdenia:

1) $f(t) = \sum_m \sum_n d_{m,n} \tilde{\psi}_{mn}(t)$ má *K-násobnú nulu* v $\psi(t) \in L^2(R)$

2) prvých K-diskrétnych aj spojitých waveletových momentov je nulových, t.j.:
$\psi(t) \in L^2(R)$, $\psi(t) \in L^2(R)$, pre $\boldsymbol{\psi(t) \in L^2(R)}$

3) polynomické sekvencie stupňa $\psi(t) \in L^2(R)$ môžu byť vyjadrené lineárnou kombináciou posunov $h(n)$. Polynómy stupňa $\psi(t) \in L^2(R)$ môžu byť vyjadrené lineárnou kombináciou posunov $f(t) = \sum_m \sum_n d_{m,n} \tilde{\psi}_{mn}(t)$