

Vlastnosti SWT

Linearita:

Vyplýva priamo z linearity skalárneho súčinu

Posun v čase:

$$g(t) = f(t - b_0) \Rightarrow SWT_g(a, b) = SWT_f(a, b - b_0)$$

Zmena mierky:

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} f\left(\frac{t}{s}\right) \Rightarrow SWT_g(a, b) = SWT_f\left(\frac{a}{s}, \frac{b}{s}\right)$$

Základné charakteristiky waveletov

- 1) *Existencia nosiča* na intervale vypovedá o tom, že funkcia (wavelet) má nenulové funkčné hodnoty len na danom intervale. Ak sú mimo neho funkčné hodnoty presne nulové, oovoríme, že na danom intervale $\langle a, b \rangle$ *má kompaktný nosič*. Ak sú „približne“ nenulové, t.j. zanedbateľne malé hovoríme, že má *efektívny nosič*
- 2) *Počet nulových momentov*. *K-ty moment* $\psi(t)$ definujeme ako $m(k) = \int t^k \psi(t) dt$. Platí, že ak $\psi(t)$ je K krát *diferencovateľná* a pre $t \rightarrow \pm\infty$ klesá dostatočne rýchlo, potom prvých $K-1$ momentov bude nulových. Potom ak $f(t)$ je na nejakom intervale polynómom max. $K-1$ stupňa, pre wavelety $\psi_{a,b}(t)$ podporované v tomto intervale budú príslušné waveletové koeficienty $SWT_f(a,b)$ nulové.
- 3) *Regularita* (Daubechies 1988) poskytuje *mieru hladkosti funkcie* $f(t)$. Je to také maximálne číslo r pre ktoré platí $|F(\omega)| \leq c/(1+|\omega|^{r+1})$, $\omega \in R$. Potom $f(t)$ je $r-1$ krát spojite diferencovateľná, r -tá derivácia môže byť nespojitá.

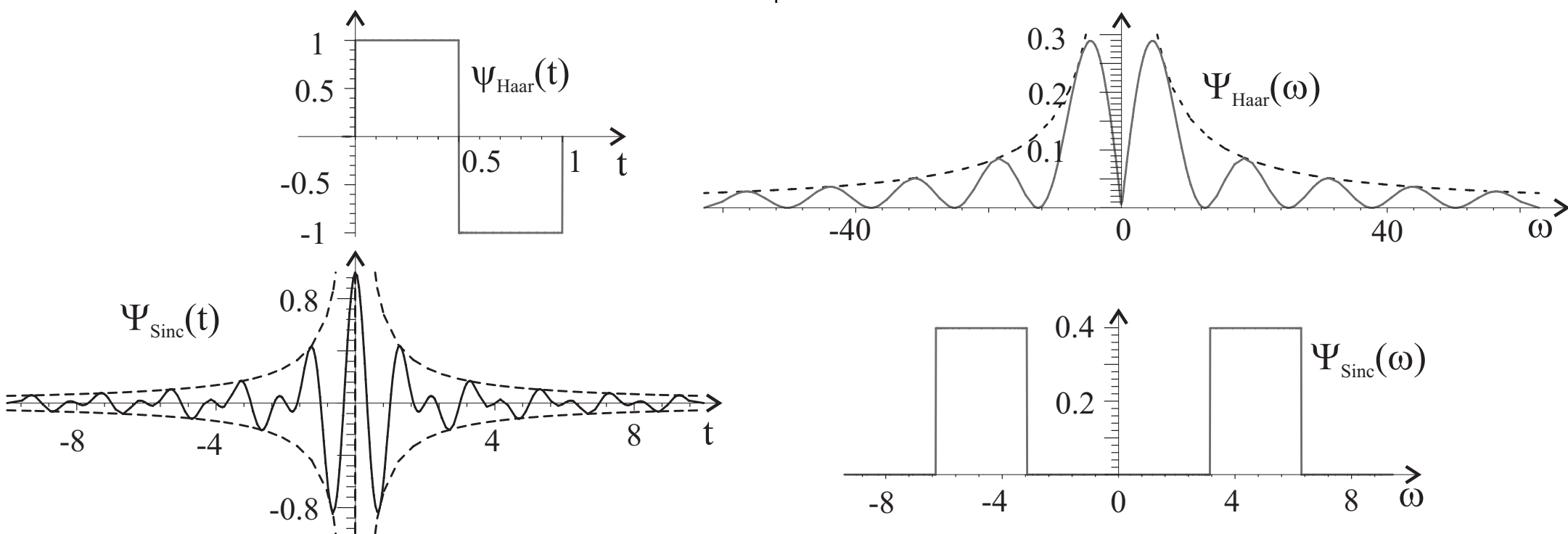
Príklady waveletov

Haarov wavelet:
$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{pre } 0 < t < 0.5 \\ -1 & \text{pre } 0.5 < t < 1 \\ 0 & \text{ináč} \end{cases}.$$

Sinc wavelet:
$$\psi(t) = 2\varphi(2t) - \varphi(t), \text{ kde } \varphi(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

Morletov wavelet:
$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-j\omega_0 t} e^{-t^2/2}.$$

Wavelet	Počet nulových momentov	Regularita r	Charakter resp. podpora v čase	Charakter resp. podpora vo frekvencii
Haar	1	0	$<0, 1>$	$1/\omega$
Sinc	∞	∞	$1/t$	$< \pi, 2\pi >$
Daubechies N	N	$\alpha(N)$	$< 0, 2N-1>$	$1/\omega^{\alpha(N)}$



Časové a frekvenčné priebehy triviálneho Haarovho a Sinc waveletu.

Waveletové rady a rámce

Redundancia SWT (oba parametre a , b sú spojité) sa dá znížiť, prípadne odstrániť *vzorkovaním* a , b . Potom hovoríme o *waveletových rámcoch (Wavelet Frames – WF) resp. waveletových radoch (WR)*.

Pri voľbe vzorkovania sú dôležité otázky kompletnosti, redundancie a minimálnosti výslednej množiny funkcií.

Štandardná voľba *typu* vzorkovacej mriežky

- $a = a_0^m$.
- $b = nb_0a_0^m$ (volíme tak, aby bola pomocou σ_{ab_t} pri danej mierke a “pokrytá” celá časová os)

T.j.

Parameter m určuje *úroveň rozlíšenia*

Parameter n určuje *posun v čase*

Pre $\psi(t)$ (a analogicky pre $\tilde{\psi}(t)$) dostávame množinu funkcií:

$$\psi_{mn}(t) = a_0^{-\frac{m}{2}} \psi(a_0^{-m}t - nb_0) , \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

Každú $f(t) \in L^2(R)$ potom môžeme vyjadriť superpozíciou vo *waveletových rámcoch* (*Wavelet Frames* – *WF*):

$$f(t) = \sum_m \sum_n d_{m,n} \tilde{\psi}_{m,n}(t) \qquad d_{m,n} = \langle f(t), \psi_{m,n}(t) \rangle \qquad m, n \in \mathbb{Z}$$

Koeficienty $d_{m,n}$ nazývame *waveletové koeficienty*.

Rekonštrukcia je možná, ak

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{m,n} \left| \langle f, \psi_{m,n} \rangle \right|^2 \leq B\|f\|^2; \qquad \forall f(t) \in L^2(R)$$

Možností na voľbu $\{\tilde{\psi}_{m,n}\}$ je viacero. Štandardná voľba je tzv. *duálny rámec*:

$$B^{-1}\|f\|^2 \leq \sum_{m,n} \left| \langle f, \tilde{\psi}_{m,n} \rangle \right|^2 \leq A^{-1}\|f\|^2 \quad \forall f(t) \in L^2(R)$$

Najbežnejšia sa redundancia reprezentácie vo waveletových rámcoch odstraňuje voľbou vzorkovacej mriežky :

$$a_0 = 2, b_0 = 1$$

Platí :

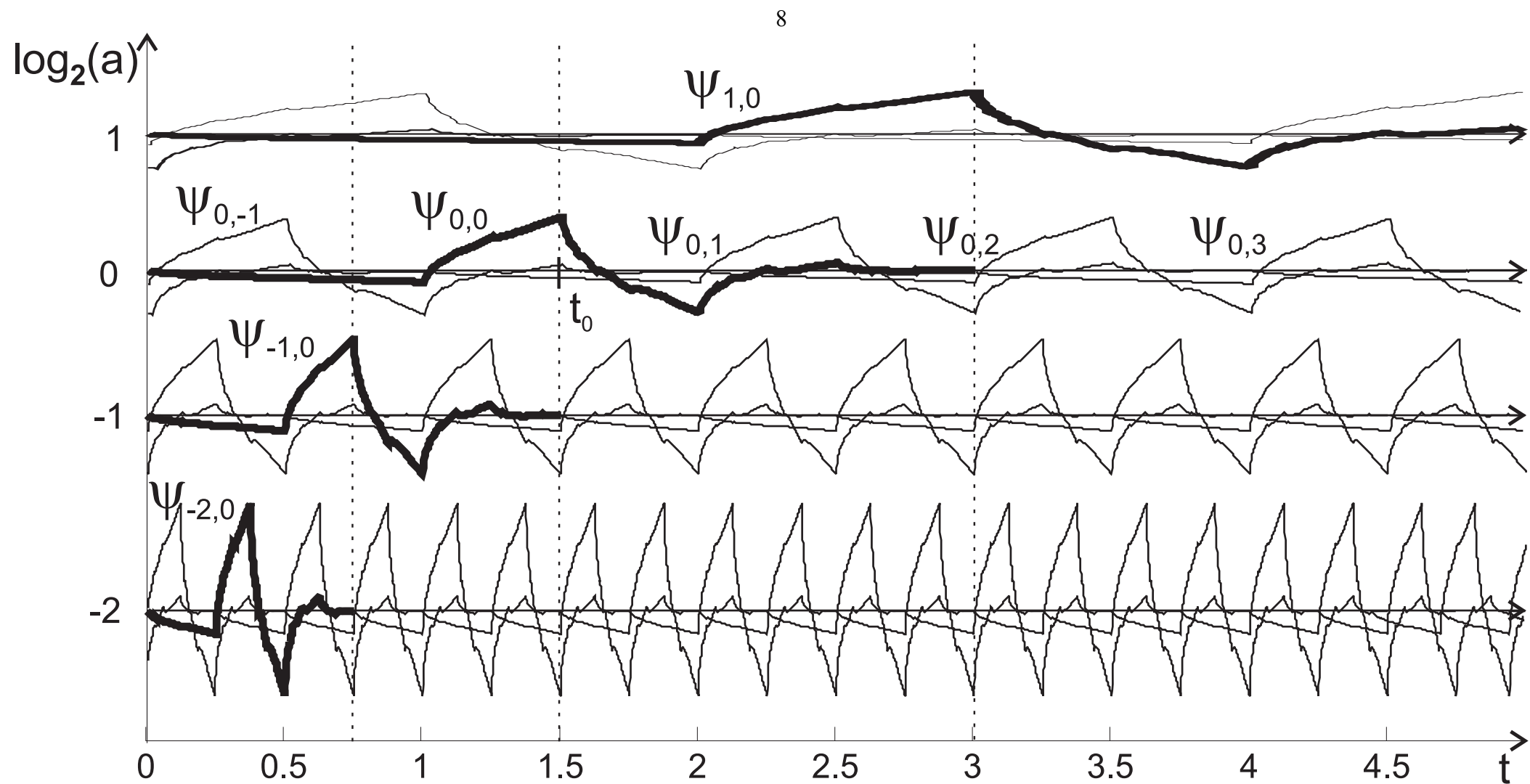
$$\psi_{m,n}(t) = 2^{-\frac{m}{2}} \psi(2^{-m}t - n)$$

funkciu $\psi_{m,n}(t)$ potom nazývame *dyadický wavelet* a vzťahmi (WF):

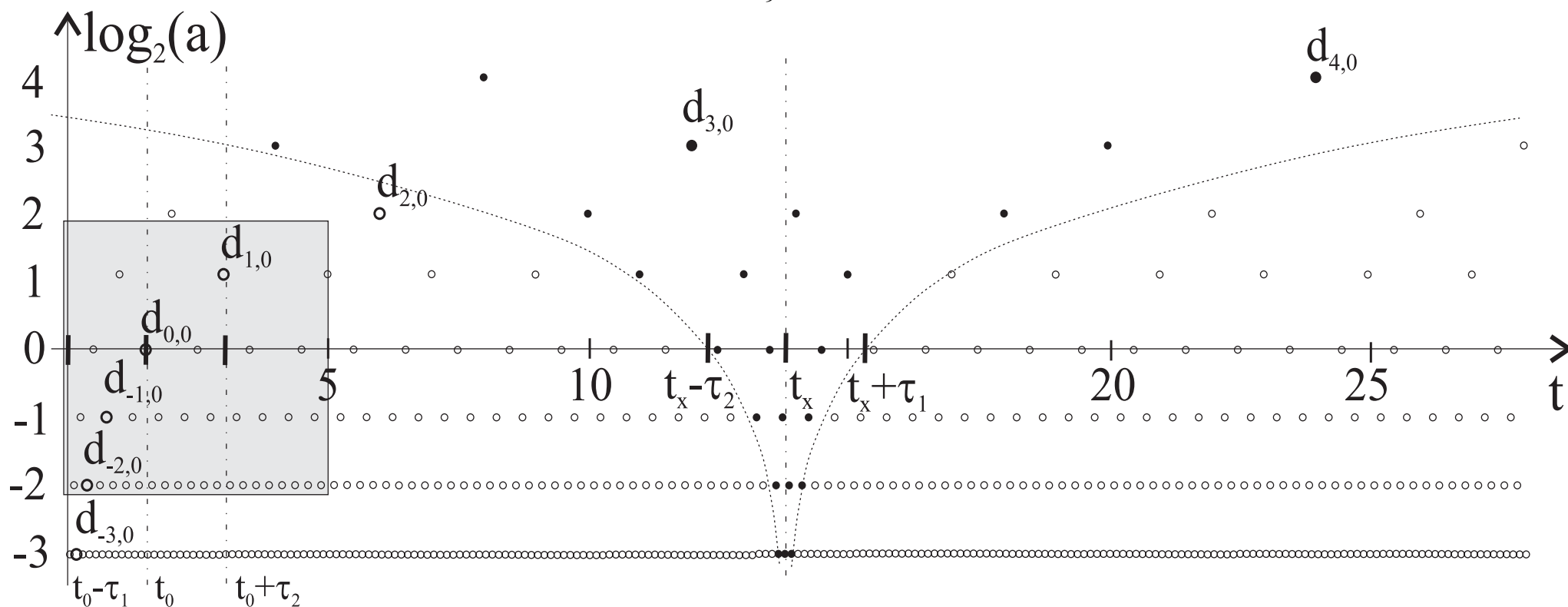
$$f(t) = \sum_m \sum_n d_{m,n} \tilde{\psi}_{m,n}(t) \quad d_{m,n} = \langle f(t), \psi_{m,n}(t) \rangle \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

sú definované *waveletové rady (WR)*.

Triadické wavelety? M-adické wavelety?

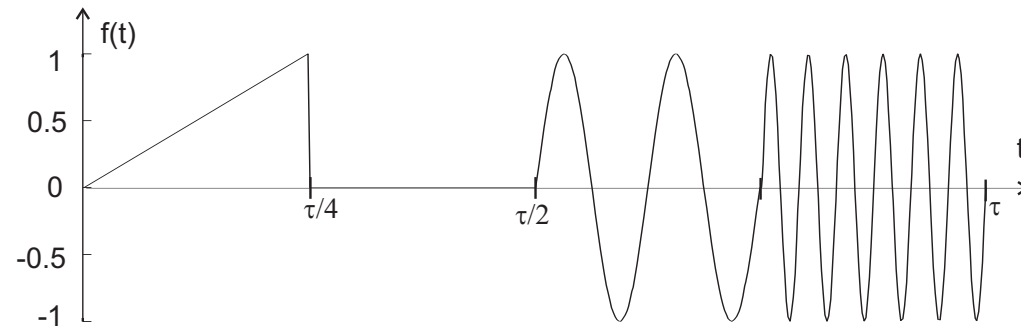


Poloha bázových funkcií (odvođených od Db2) v TS rovine pri dyadických waveletových radoch

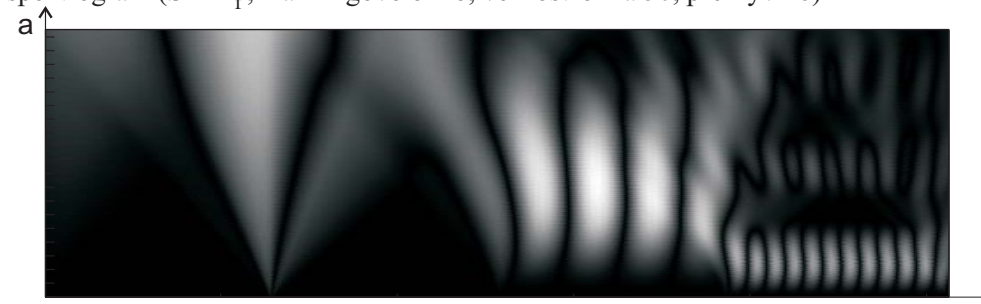
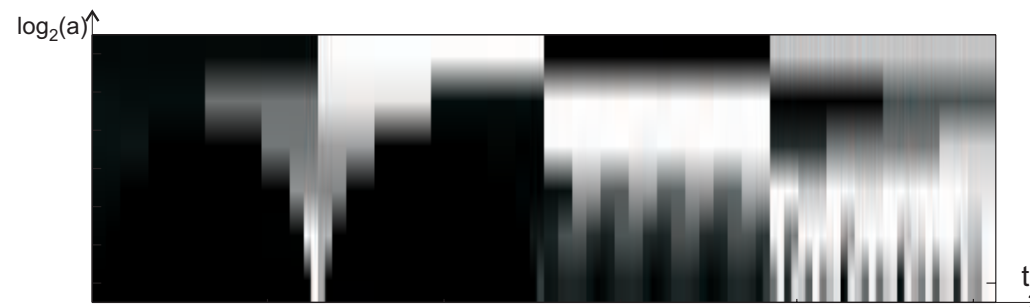


Príklad zobrazenia koeficientov $d_{m,n}$ v TS rovine. Koeficienty $d_{m,0}$ sú zvýraznené. V strede je znázornená sféra vplyvu signálu v čase t_x na koeficienty $d_{m,n}$ pri $\psi_{m,n}(t)$ s kompaktným nosičom na intervale $\langle t_0 - \tau_1, t_0 + \tau_2 \rangle$.

Oblasť TS roviny použitá v predchádzajúcom obrázku je sivo zvýraznená.



a) vstupný signál

b) spektrogram (STFT_f , Hanningovo okno, veľkosť okna 50, prekryv 48)c) škálogram (SWT_f , ako $\psi(t)$ použitý Db2)d) diskretný škálogram (WR_f , ako $\psi(t)$ použitý Db2)

Ortogonalita, biortogonalita a semiortogonalita

Pre ortonormálne wavelety platí $\tilde{\psi} \equiv \psi^$ a*

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m} \rangle = \delta(j-l)\delta(k-m) \quad j, k, l, m \in \mathbb{Z}$$

čo charakterizuje ortogonalitu v rovnakých úrovniach rozlíšenia a aj medzi rôznymi úrovňami.

Pár $(\psi, \tilde{\psi})$ spĺňa podmienku *biortogonality* (hovoríme o *biortogonálnych waveletoch*), ak množiny $\{\psi_{m,n}\}$ a $\{\tilde{\psi}_{m,n}\}$ sú duálne bázy, spĺňajúce podmienku biortogonality:

$$\langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{l,m} \rangle = \delta(j-l)\delta(k-m) \quad j, k, l, m \in \mathbb{Z}$$

Wavelet $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ $j, k, l, m \in \mathbb{Z}$ sa nazýva *semiortogonálny* (nazývaný aj pre-wavelet), ak platí:

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m} \rangle = \delta(j-l) \quad j, k, l, m \in \mathbb{Z}$$

t.j. je zachovaná ortogonalita len medzi rôznymi úrovňami rozlíšenia.

Prechod k analýze viacúrovňovým rozlíšením (MultiResolution Analysis - MRA)

Označme :

$$W_m = L(\{\psi_{m,n}\}, n \in \mathbb{Z})$$

$$\tilde{W}_m = L(\{\tilde{\psi}_{m,n}\}, n \in \mathbb{Z})$$

$L^2(\mathbb{R})$ potom môžeme vyjadriť ako priamu sumu podpriestorov W_m resp. $\tilde{W}_m$:

$$L^2(\mathbb{R}) = \dots \oplus W_1 \oplus W_0 \oplus W_{-1} \oplus \dots$$

$$L^2(\mathbb{R}) = \dots \oplus \tilde{W}_1 \oplus \tilde{W}_0 \oplus \tilde{W}_{-1} \oplus \dots$$

Ako odstrániť nekonečné sumy pri reprezentácii resp. aproximácii signálu ???

Analýza signálu viacúrovňovým rozlíšením

Signál pri *analýze viacúrovňovým rozlíšením* (AVR) rozkladáme do systému hierarchických podpriestorov, pričom každý z podpriestorov charakterizuje rôzne rýchle zmeny v signále. AVR pozostáva zo sekvencie uzavretých podpriestorov priestoru $L^2(R)$:

$$\{0\} \dots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \dots L^2(R)$$

← horšia aproximácia lepšia →

Otázky:

- Časovo frekvenčné okná a viacúrovňovosť
- Ako to odpovedá hierarchii priestorov V ?

Vlastnosti MRA:

- kompletnosť

$$\mathcal{V}_\infty = \{0\} \quad \mathcal{V}_{-\infty} = \left\{ L^2(\mathcal{R}) \right\} .$$

- Invariancia vzhľadom na

$$\begin{array}{ll} \text{zmenu mierky} & - f(t) \in V_m \Leftrightarrow f(2^m t) \in V_0 \quad \forall m \in \mathbb{Z} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{posun v čase} & - f(t) \in V_0 \Leftrightarrow f(t - n) \in V_0 \quad \forall n \in \mathbb{Z} \end{array}$$

- Existencia bázy - existuje také $\varphi \in V_0$, že množina $\{\varphi(t - n), n \in \mathbb{Z}\}$ je ortonormálnou bázou V_0 . Funkciu $\varphi \in V_0$ nazývame *funkcia mierky*
- Existencia *bázy ortogonálneho doplnku*. Nech W_m je ortogonálny doplnok V_m do V_{m-1} . Potom existuje taký ortonormálny wavelet $\psi \in W_0$, že množina $\{\psi(t - n), n \in \mathbb{Z}\}$ je ortonormálnou bázou podpriestoru W_0 .

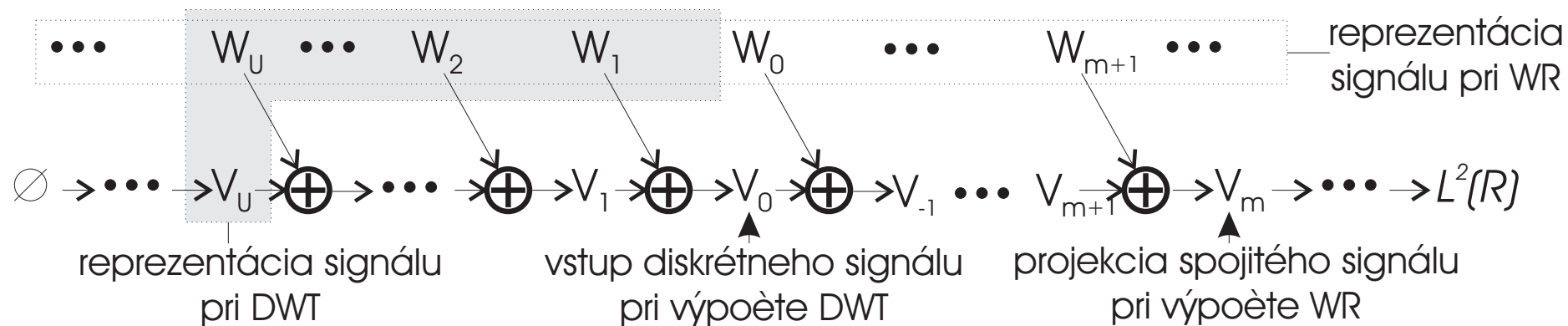
Dôsledky:

- Aby AVR bola úplná, musia mať funkcie mierky *jednosmernú zložku*, t.j. $\int \varphi(t) dt \neq 0$
- $\{\varphi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \varphi(2^{-m}t - n), n \in \mathbb{Z}\}$ je bázou V_m .
- $\{\psi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \psi(2^{-m}t - n), n \in \mathbb{Z}\}$ je bázou W_m

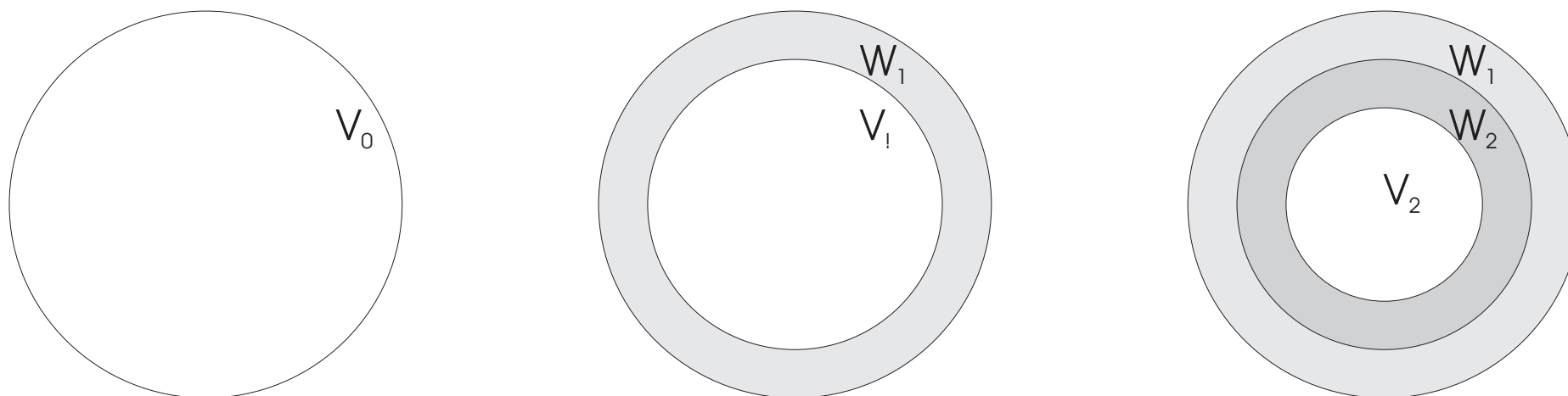
Platia nasledovné relácie:

$$V_m = V_{m+1} \oplus W_{m+1} \quad L_2(R) = \underbrace{\dots \oplus W_2 \oplus W_1 \oplus W_0 \oplus W_{-1} \oplus W_{-2} \dots}_{V_0}$$

Vidíme, že priestory V_m majú *aproximačný charakter*, pričom W_m obsahujú iba *detaily* na rôznych úrovniach rozlíšenia.



Hierarchia aproximačných V_m a diferenčných W_m podpriestorov v MRA



Znázornenie hierarchie aproximačných V_m a diferenčných W_m podpriestorov v rovine.

Keďže V_0 je obsiahnuté vo V_{-1} , pre $\varphi(t) \in V_0$ platí aj, že $\varphi(t) \in V_{-1}$. Bázou vo V_{-1} je $\{\sqrt{2}\varphi(2t - n), n \in \mathbb{Z}\}$, takže $\varphi(t)$ môžeme vyjadriť ako lineárnu kombináciu:

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n) \varphi(2t - n)$$

Na základe vlastností ortogonálnom doplnku platí analogicky

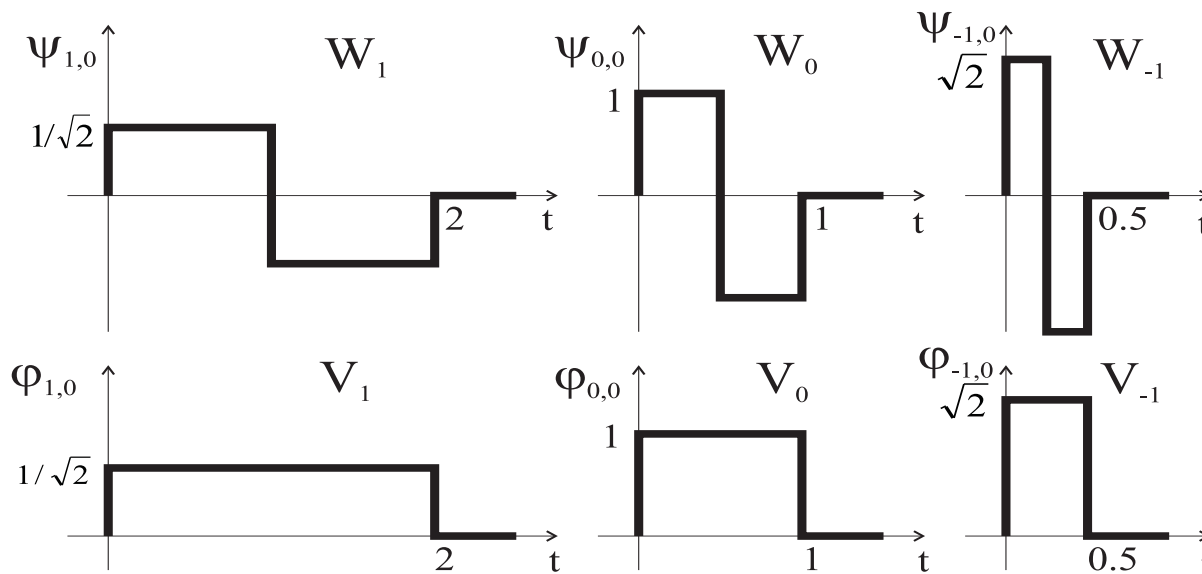
$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{mr}(n) \varphi(2t - n)$$

Tieto dva vzťahy sa nazývajú *relácie zmeny rozlíšenia* resp. *dilatačné rovnice*.

Koeficienty h_{mr} a g_{mr} charakterizujú vzťahy medzi bázami na susedných úrovniach rozlíšenia a nazývajú sa *koeficienty pre zmenu rozlíšenia* resp. *dilatačné koeficienty*

Uvedomme si, že platí (na základe vlastností AVR)

$$\varphi_{m+1,n}(t) = 2^{-1/2} \varphi_{m,n}(t/2) \quad \psi_{m+1,n}(t) = 2^{-1/2} \psi_{m,n}(t/2)$$

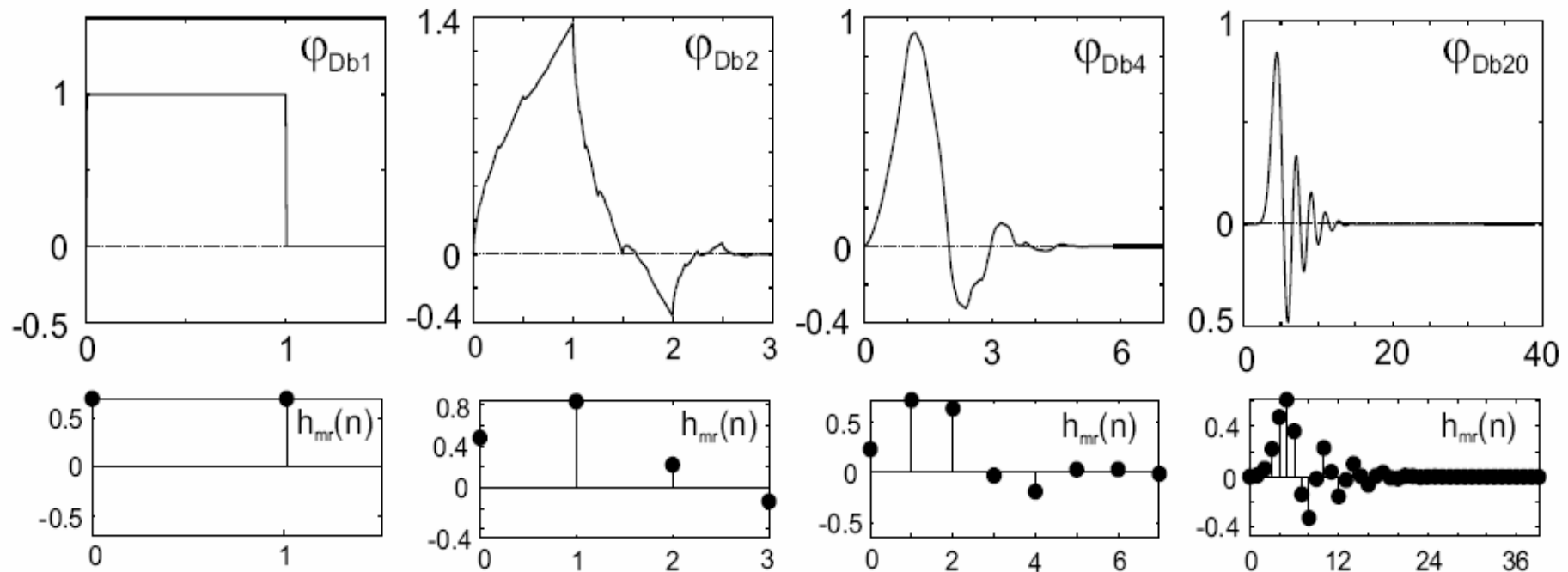


Na báзовých funkciách pre Haarovu WT môžeme vidieť, že

- 1) Priamy súčet podpriestorov V_1 a W_1 je V_0 , t.j. báзовé funkcie V_0 sa dajú vyjadriť ako lineárna kombinácia báзовých funkcií V_1 a W_1
- 2) Bázy vo V_1 a W_1 môžeme vyjadriť pomocou bázy V_0 , t.j.:

$$\varphi_{1,n}(t) = (\varphi_{0,n}(t) + \varphi_{0,n+1}(t)) \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad h_{mr} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\psi_{1,n}(t) = (\varphi_{0,n}(t) - \varphi_{0,n+1}(t)) \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad g_{mr} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$



Obr. 1.14. Príklady funkcií mierok $\varphi(t)$ a zodpovedajúcich dilatačných koeficientov $h_{mr}(n)$ pre Daubechieovej (Db) wavelety rádu 1, 2, 4, 20. Vidíme, že dĺžky $h_{mr}(n)$ presne zodpovedajú *nosičom* funkcií mierky.

+ DEMO V MATLABE

Algoritmus výpočtu Waveletových radov a disktrétnej waveletovej transformácie

Nech funkcia $s(t) \in L(R)$. Potom súradnice jej *priemetu* do priestoru V_m môžeme vyjadriť ako:

$$c_m(n) = \langle s(t), \varphi_{m,n}(t) \rangle$$

Získavame diskretnú množinu *koeficientov mierky* $c_m(n)$.

Aká informácia sa do nich uložila? $\rightarrow$ spravme spätnú rekonštrukciu

$$\hat{s}_{V_m}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_m(n) \varphi_{m,n}(t)$$

Získavame $\hat{s}_{V_m}(t) \in V_m$ - *aproximáciu* (ap_m) funkcie $s(t)$ vo V_m .

Analogicky priemetom $s(t)$ do W_m získame *waveletové koeficienty* $d_m(n)$:

$$d_m(n) = \langle s(t), \psi_{m,n}(t) \rangle$$

Aká informácia sa do nich uložila? $\rightarrow$ spravme spätnú rekonštrukciu

$$\hat{s}_{W_m}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_m(n) \psi_{m,n}(t)$$

Získavame $\hat{s}_{W_m}(t) \in W_m$ - *detail* (de_m) funkcie $s(t)$ vo W_m .

Projekciou $s(t)$ do V_{m+1} a W_{m+1} môžeme získať koeficienty:

$$c_{m+1}(n) = \langle s(t), \varphi_{m+1,n}(t) \rangle$$

$$d_{m+1}(n) = \langle s(t), \psi_{m+1,n}(t) \rangle$$

priamo. A podobne do všetkých ostatných priestorov W_i (to predsa chceme, nie?)

➔ Keď poznáme vzťahy medzi bázami podpriestorov na susedných úrovniach rozlíšenia, môžeme tieto koeficienty vypočítať rýchlejšie?

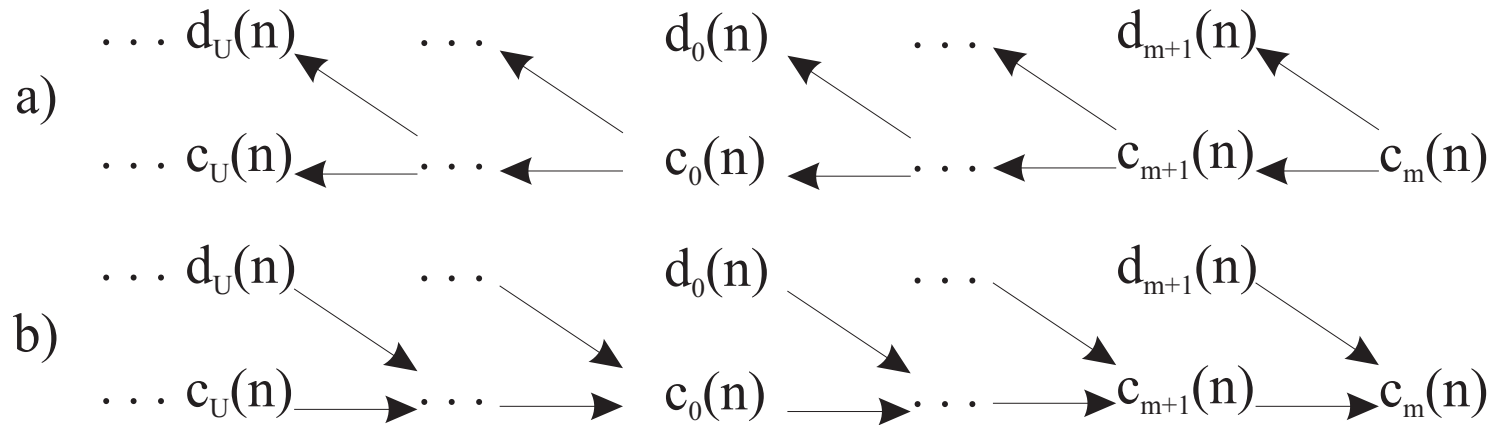
Odpoveď je ÁNO:

rozklad:

$$c_{m+1}(n) = \sum_k h_{mr}(k - 2n)c_m(k) \quad d_{m+1}(n) = \sum_k g_{mr}(k - 2n)c_m(k)$$

rekonštrukcia:

$$c_m(n) = \sum_k h_{mr}(n - 2k)c_{m+1}(k) + \sum_k g_{mr}(n - 2k)d_{m+1}(k)$$



Rozklad(a) a rekonštrukcia(b) koeficientov mierky pri výpočte WR a DWT

Odvozenie:

Chceme odvodiť vzťah: $c_{m+1}(n) = \sum_k h_{mr}(k-2n)c_m(k)$

Vieme, že platí: $\varphi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \varphi(2^{-m}t - n)$

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n) \varphi(2t - n)$$

Vynásobíme obe strany druhej rovnice $2^{-m/2}$ a za t dosadíme $2^{-m}t - n$:

$$2^{-m/2} \varphi(2^{-m}t - n) = 2^{-m/2} \cdot 2^{1/2} \sum_k h_{mr}(k) \varphi(2(2^{-m}t - n) - k)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{m,n}(t) &= \sum_k h_{mr}(k) 2^{-(m-1)/2} \varphi(2^{-(m-1)}t - 2n - k) = \\ &= \sum_k h_{mr}(k) \varphi_{m-1,2n+k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_m(n) &= \langle f(t), \varphi_{m,n}(t) \rangle = \left\langle f(t), \sum_k h_{mr}(k) \varphi_{m-1,2n+k} \right\rangle = \sum_k h_{mr}(k) \langle f(t), \varphi_{m-1,2n+k} \rangle = \\ &= \sum_k h_{mr}(k) c_{m-1}(2n+k) = \sum_k h_{mr}(k-2n) c_{m-1}(k) \end{aligned}$$

T.j: $c_{m+1}(n) = \sum_k h_{mr}(k-2n)c_m(k)$

Výpočet waveletových radov

Pri výpočte *waveletových radov* z $s(t) \in L^2(R)$ môžeme zvoliť počiatočné V_m tak, aby $\hat{s}_{V_m}(t) \in V_m$ aproximovalo $s(t)$ s ľubovoľnou presnosťou. T.j. začneme:

$$c_m(n) = \langle s(t), \varphi_{n,m}(t) \rangle$$

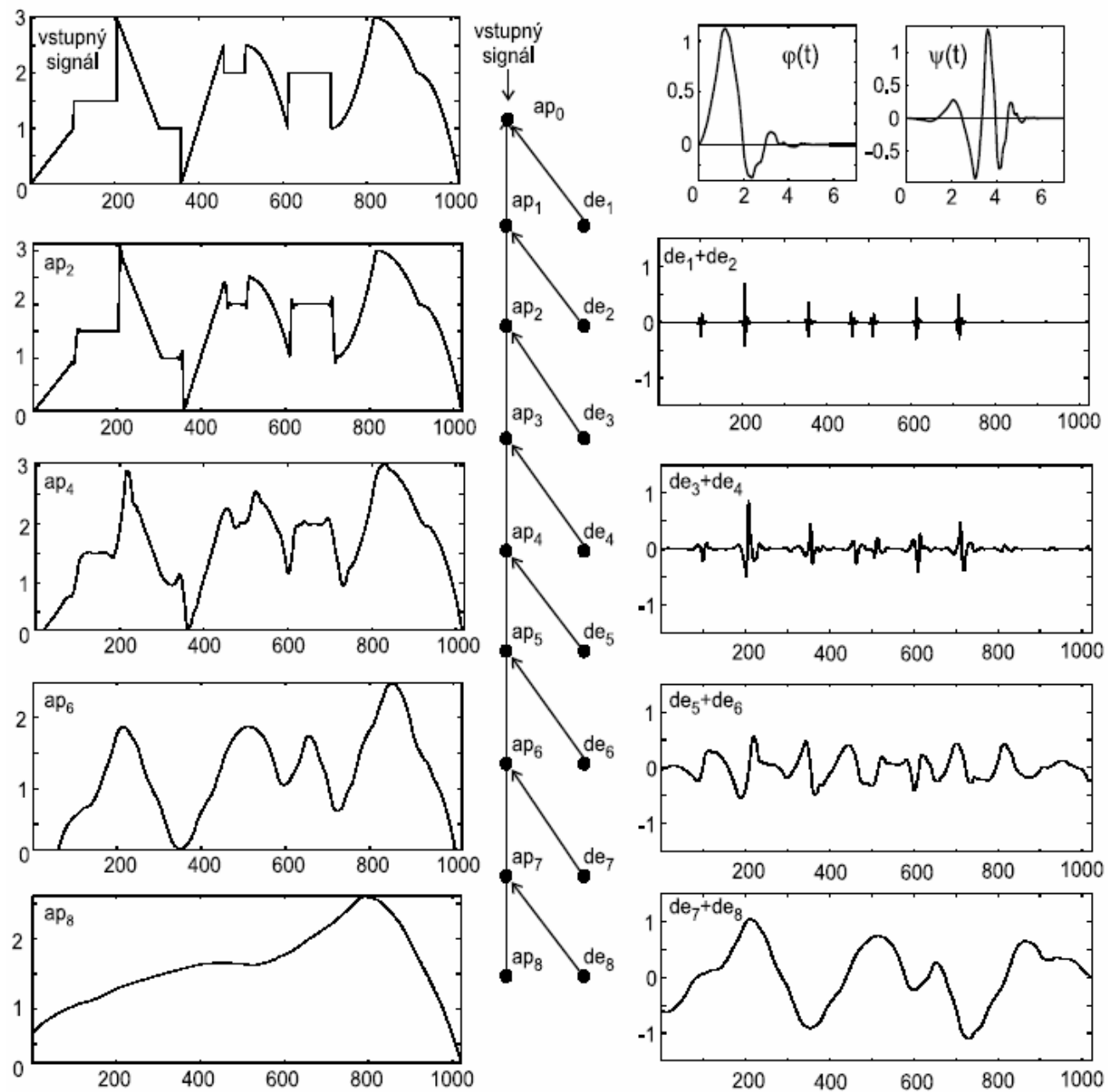
a ďalej pokračujeme v diskkrétnej oblasti pomocou vzťahu na výpočet rozkladu, často iba po želanú úroveň rozkladu (napr. U).

V tejto reprezentácii môžeme $\hat{s}_{V_m}(t) \in V_m$ vyjadriť sumou rekonštrukcií signálu z koeficientov v príslušných podpriestorov, t.j. (zbytkovej) aproximácie signálu $\hat{s}_{V_u}(t)$ a postupným pridávaním detailov $\hat{s}_{W_i}(t)$:

$$\hat{s}_{V_m}(t) = \hat{s}_{V_u}(t) + \hat{s}_{W_u}(t) + \hat{s}_{W_{u-1}}(t) \dots + \hat{s}_{W_m}(t)$$

t.j. napr. pre $m=0$:

$$ap_0(t) = ap_U(t) + de_U(t) + de_{U-1}(t) \dots + de_0(t)$$



Výpočet DWT

Pri výpočte *diskrétnej waveletovej transformácie* (DWT) interpretujeme vstupné dáta $x(n)$, $n \in \mathbb{Z}$ ako projekčné koeficienty $c_0(n)$ nejakého spojitého signálu $s(t)$ do V_0 a ďalej pokračujeme rozkladmi ako pri WR.

Ak je signál konečnej dĺžky L , potom pre max. počet úrovní rozkladu U platí

$$U \leq \log_2 L$$

Keďže vstupný signál aj výpočet projekčných koeficientov je diskretný v čase, *báza projekčných priestorov bude diskretná, vytvorená z koeficientov pre zmenu rozlíšenia.*

Celá transformácia potom môže byť vyjadrená v maticovom tvare ako ostatné diskkrétne lineárne transformácie.

rozklad:

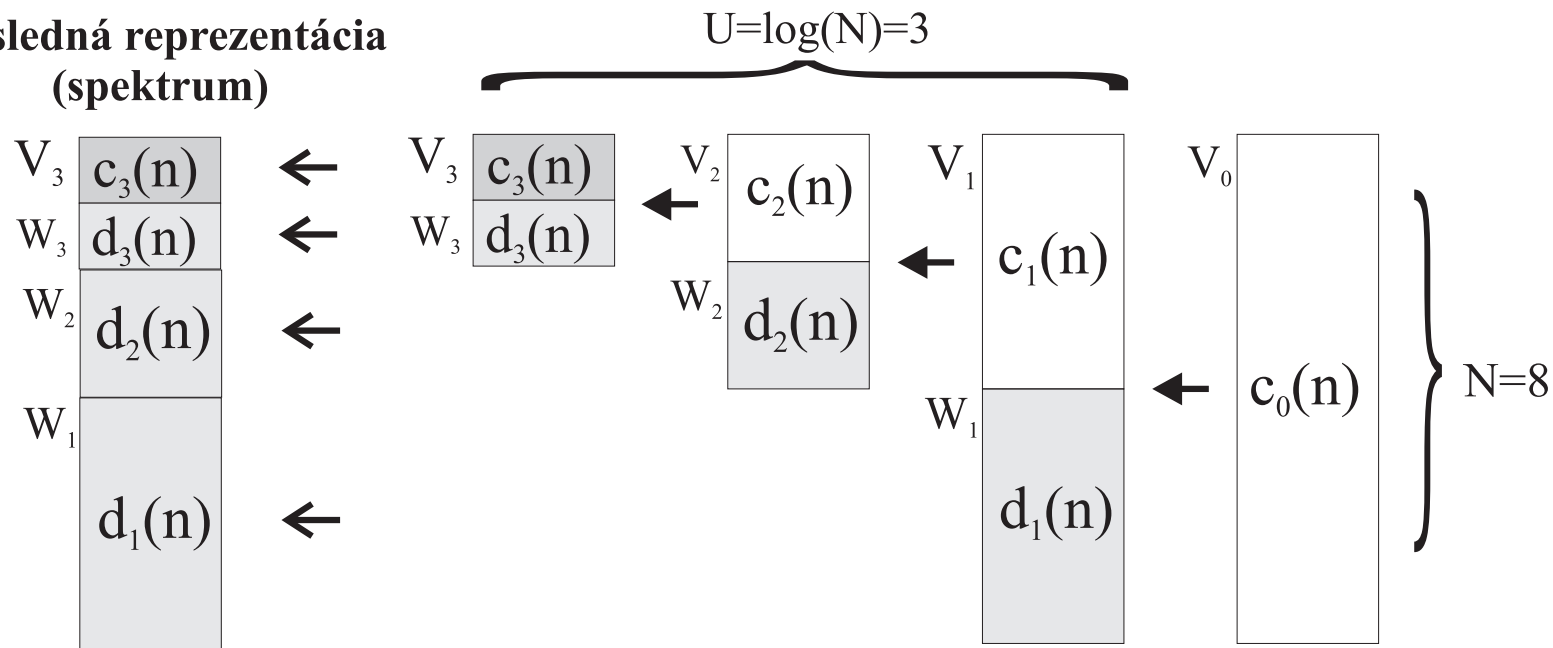
$$c_{m+1}(n) = \sum_k h_{mr}(k - 2n)c_m(k) \quad d_{m+1}(n) = \sum_k g_{mr}(k - 2n)c_m(k)$$

rekonštrukcia:

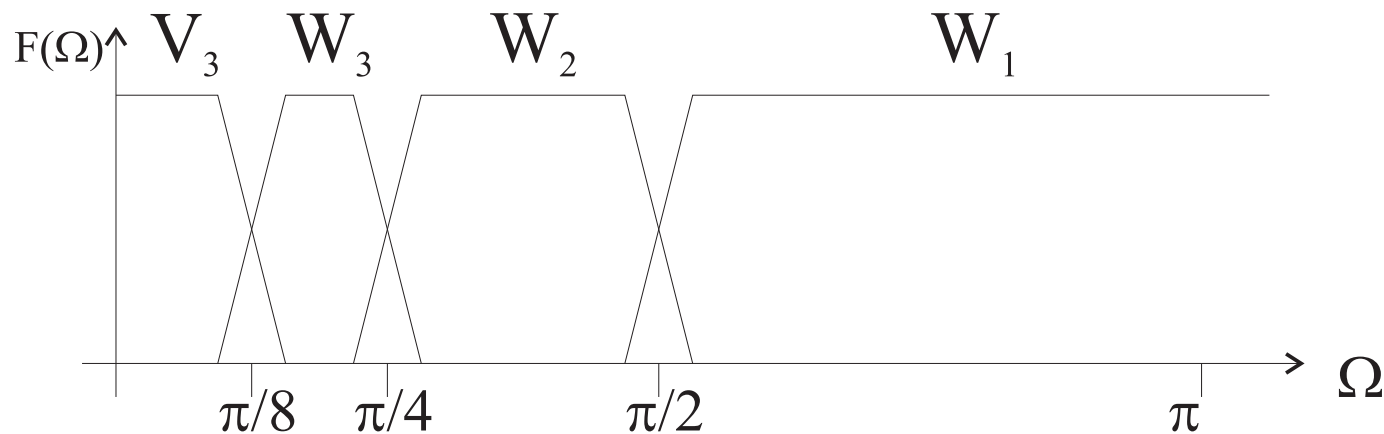
$$c_m(n) = \sum_k h_{mr}(n - 2k)c_{m+1}(k) + \sum_k g_{mr}(n - 2k)d_{m+1}(k)$$

Výpočet WR a DWT sa v praxi realizuje bankami filtrov.

Výsledná reprezentácia (spektrum)

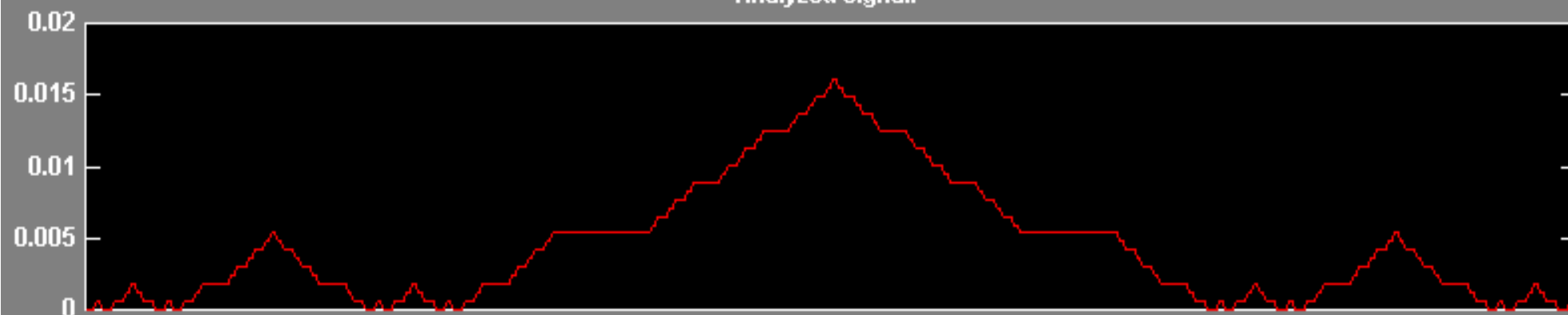


Výpočet koeficientov pri DWT a veľkosti vstupného vektora 8.

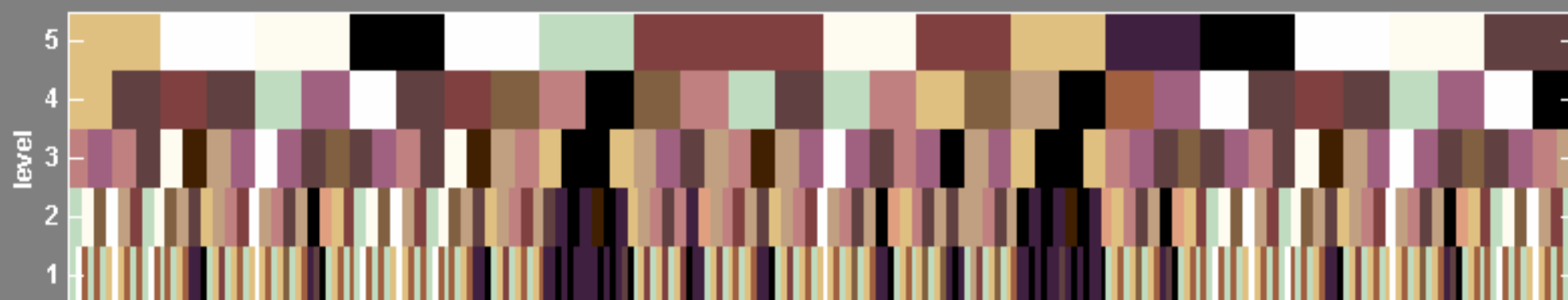


Označme diskretný vstup pre DWT ako $f(n)$. Na príklade jeho DTFT $f(\Omega)$ je znázornené, ktoré časti spektra budú vyjadrené v ktorých podpriestoroch.

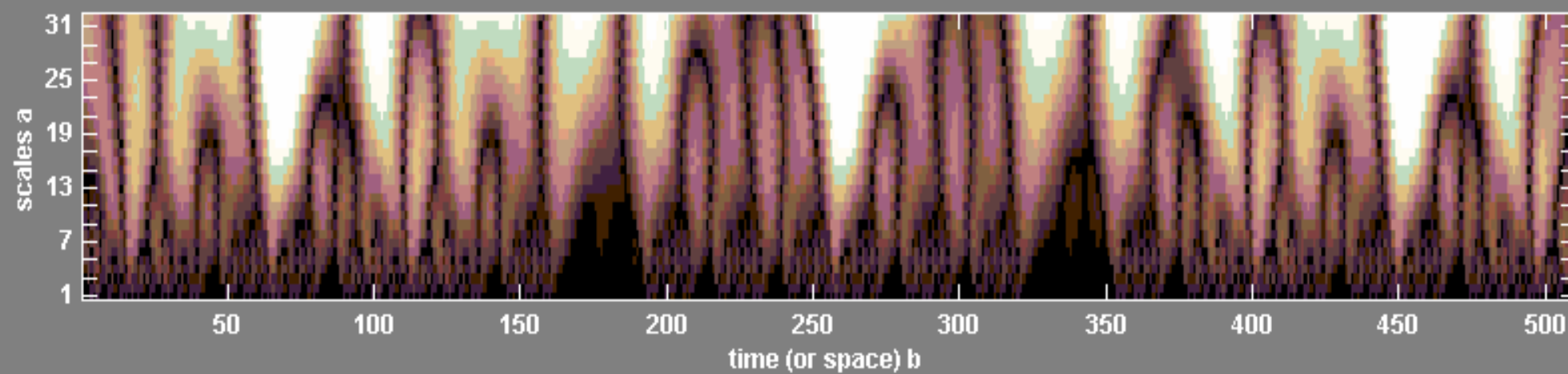
Analyzed signal.



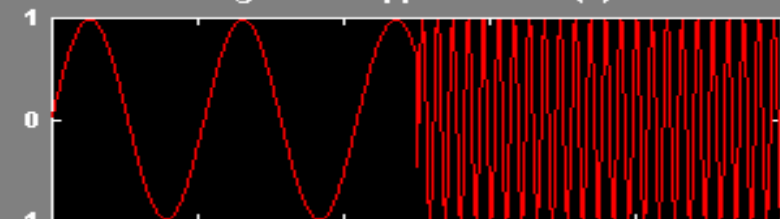
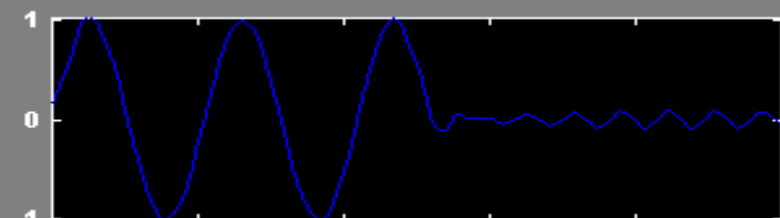
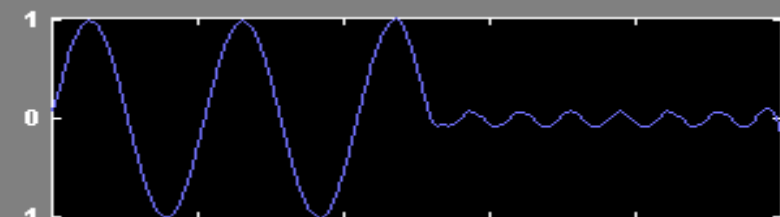
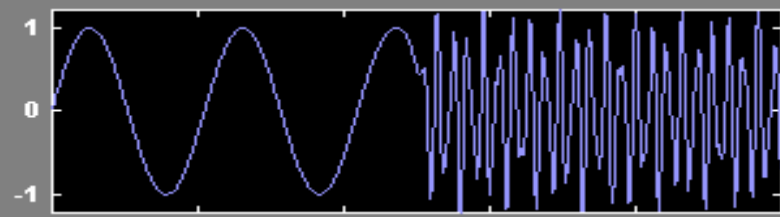
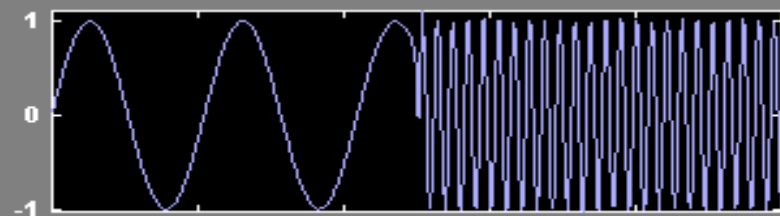
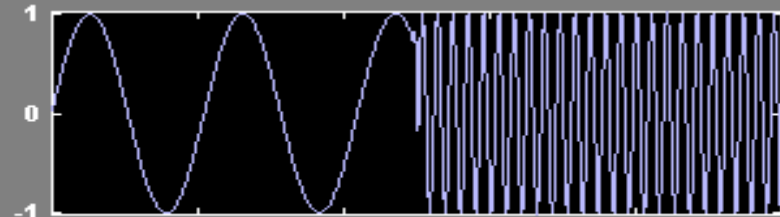
Discrete Transform, absolute coefficients.



Absolute Values of $C_{a,b}$ Coefficients for $a = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ \dots$

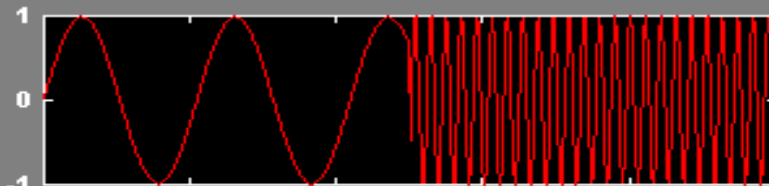
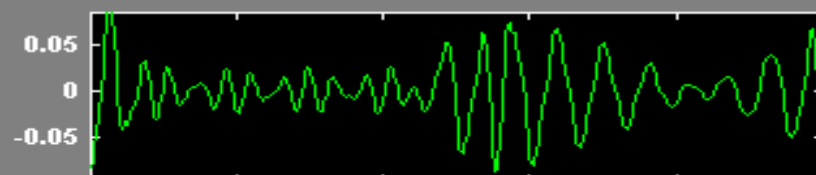
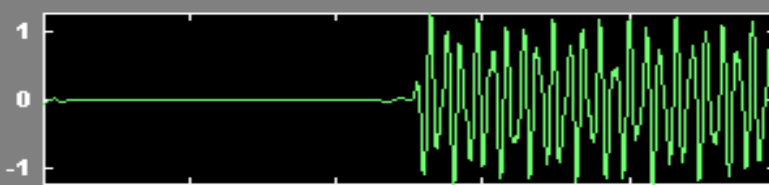
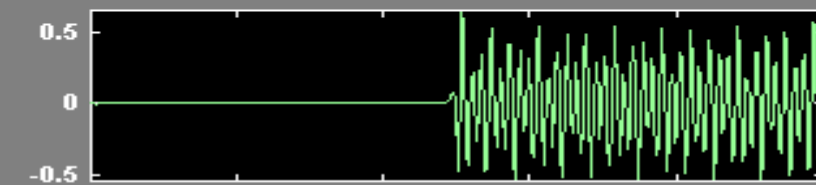
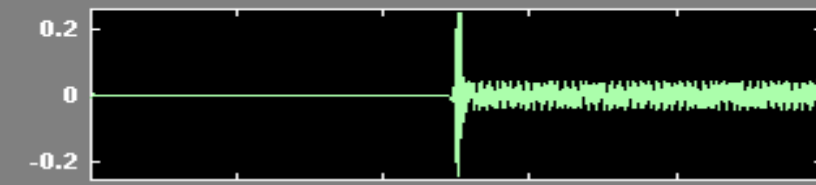
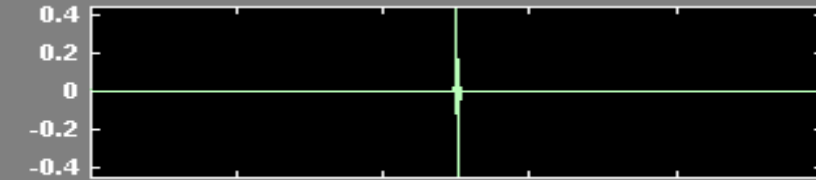


Signal and Approximation(s)

 s  a_5  a_4  a_3  a_2  a_1 

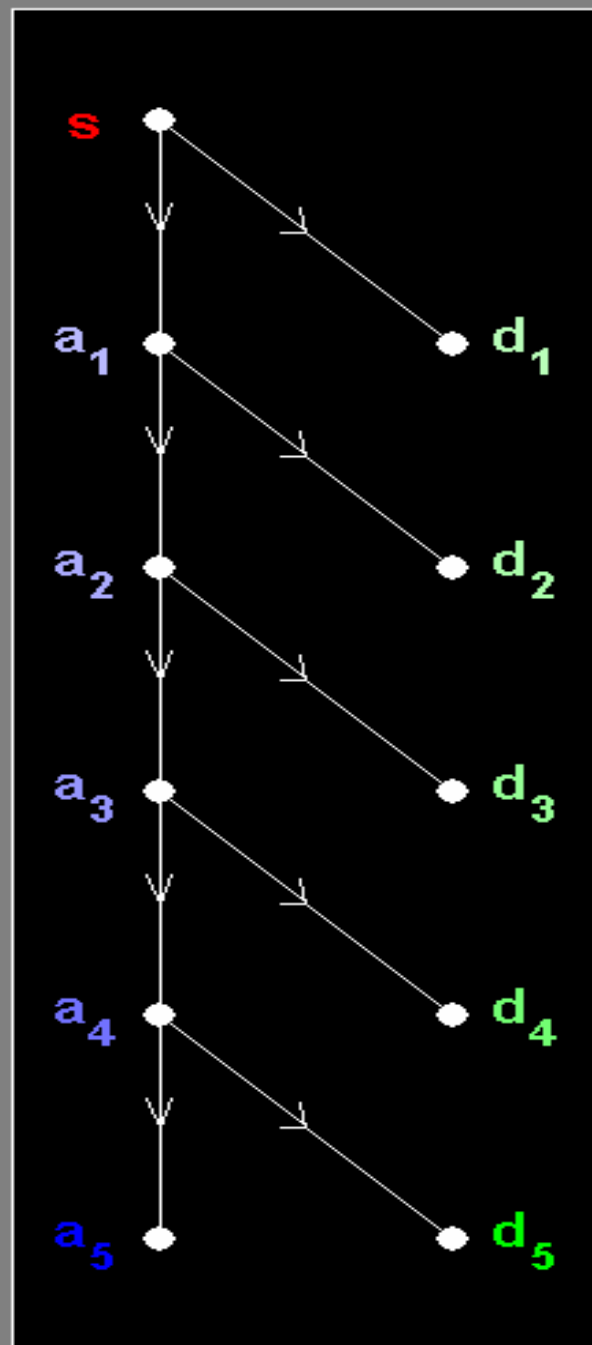
200 400 600 800 1000

Coefs, Signal and Detail(s)

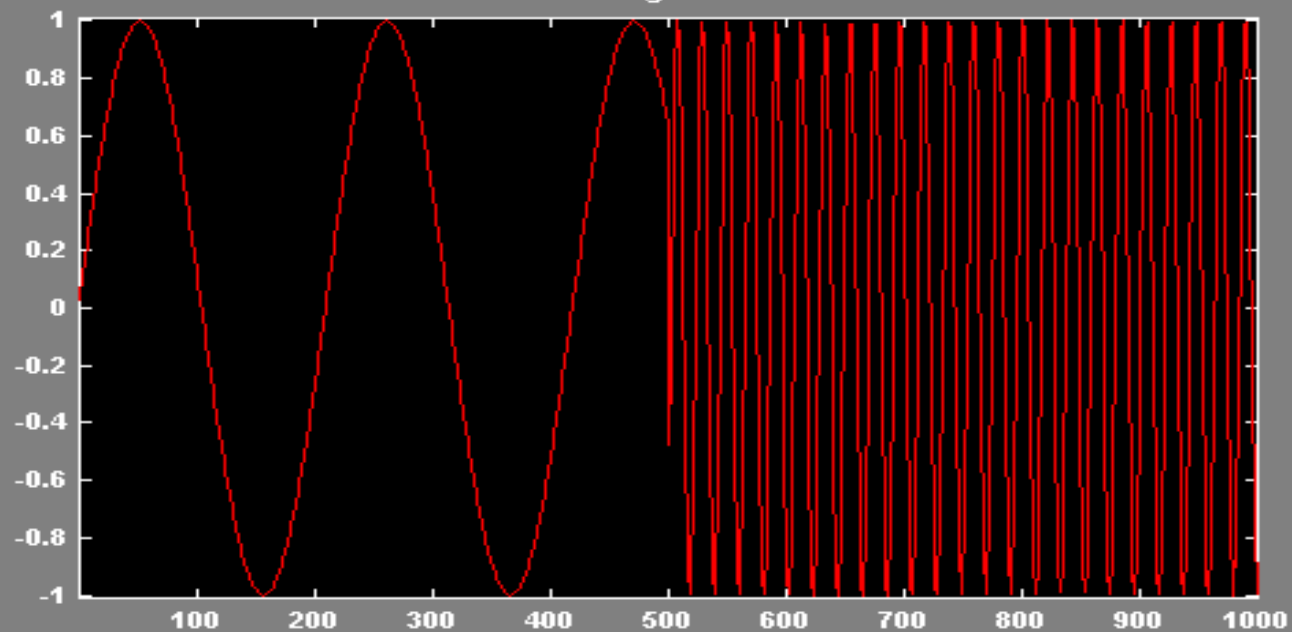
 cfs  s  d_5  d_4  d_3  d_2  d_1

200 400 600 800 1000

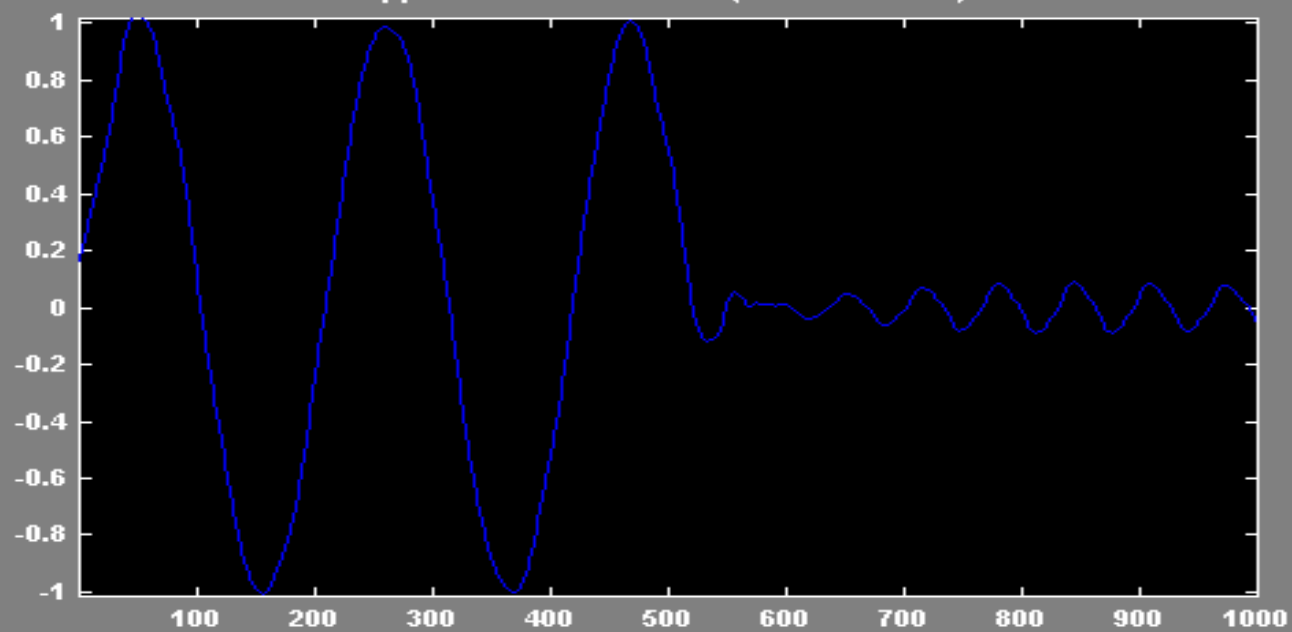
DWT : Wavelet Tree

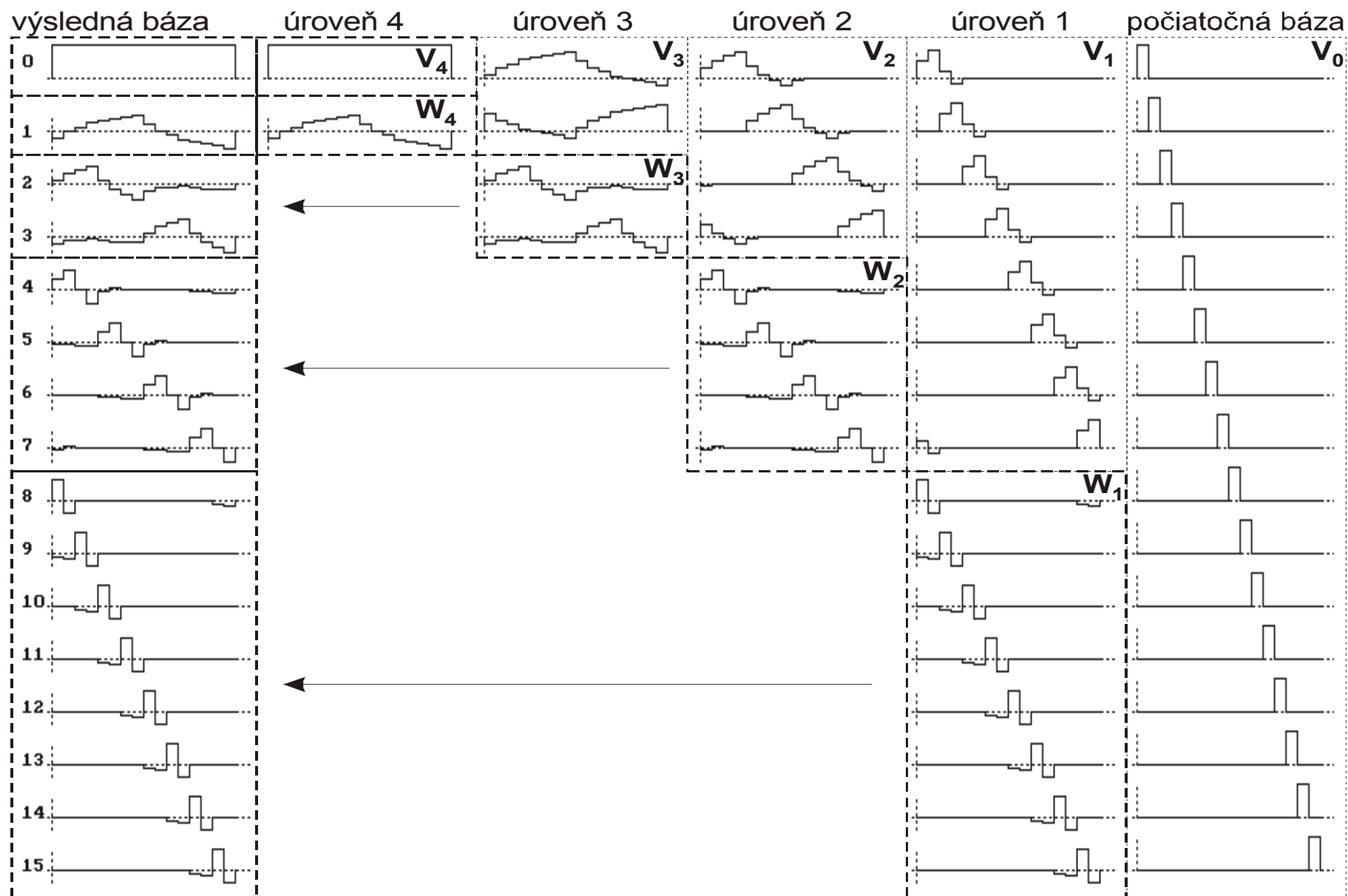


Signal

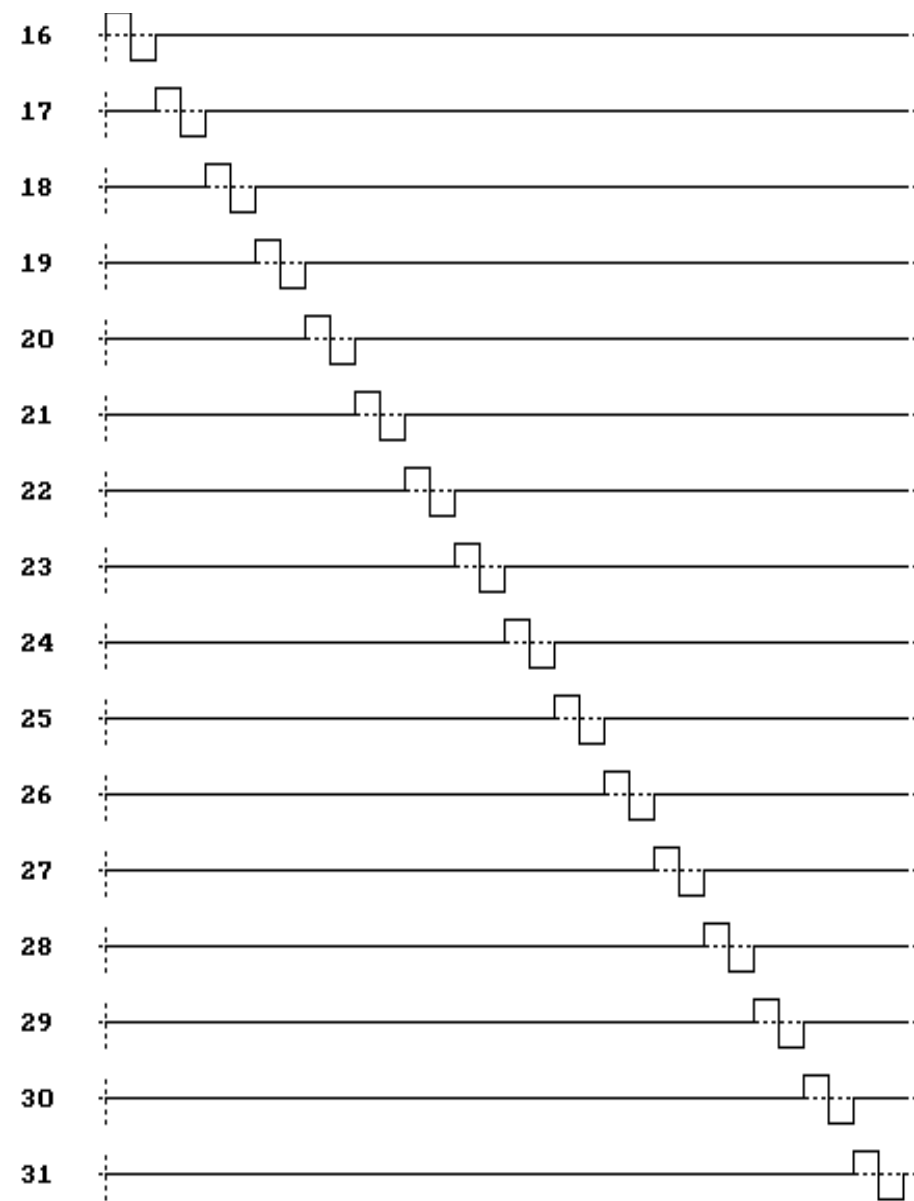
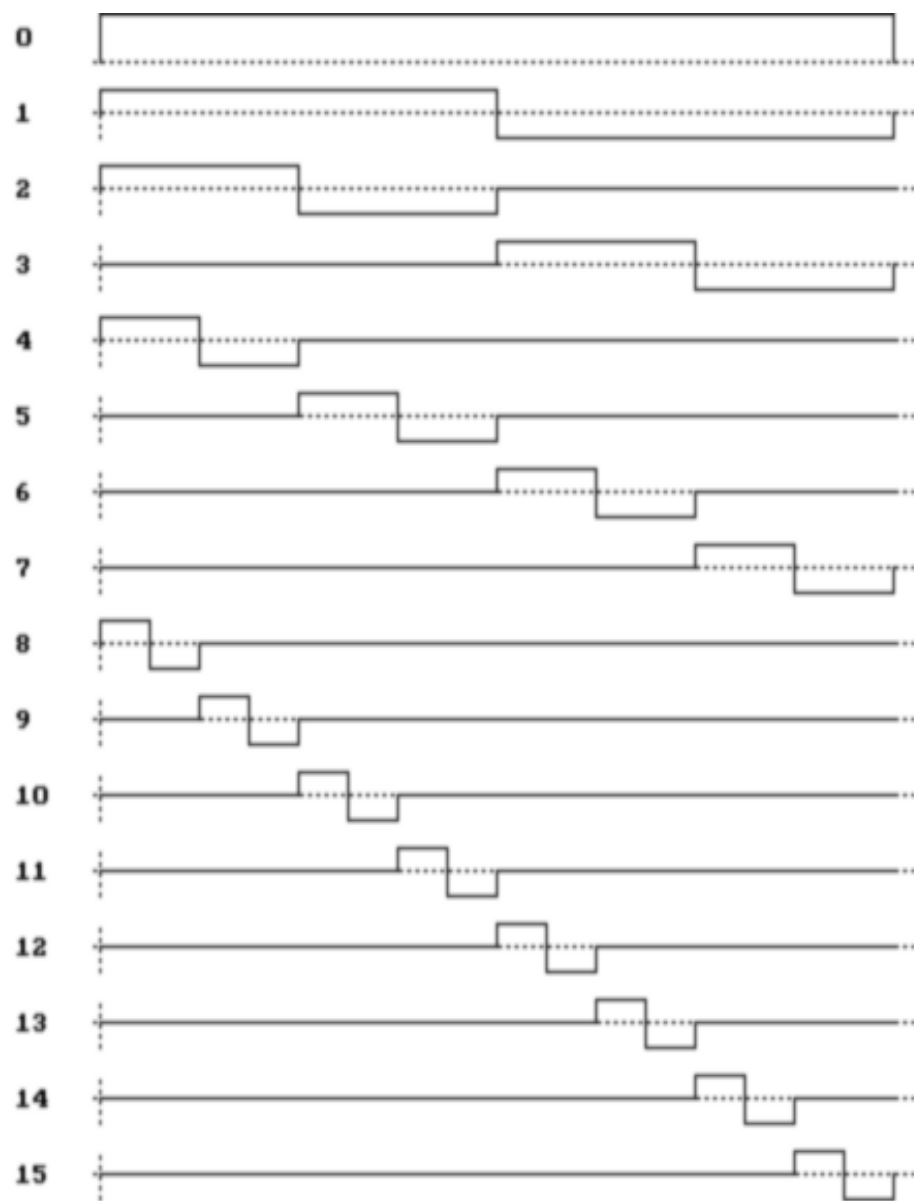


Approximation at level 5 (reconstructed).

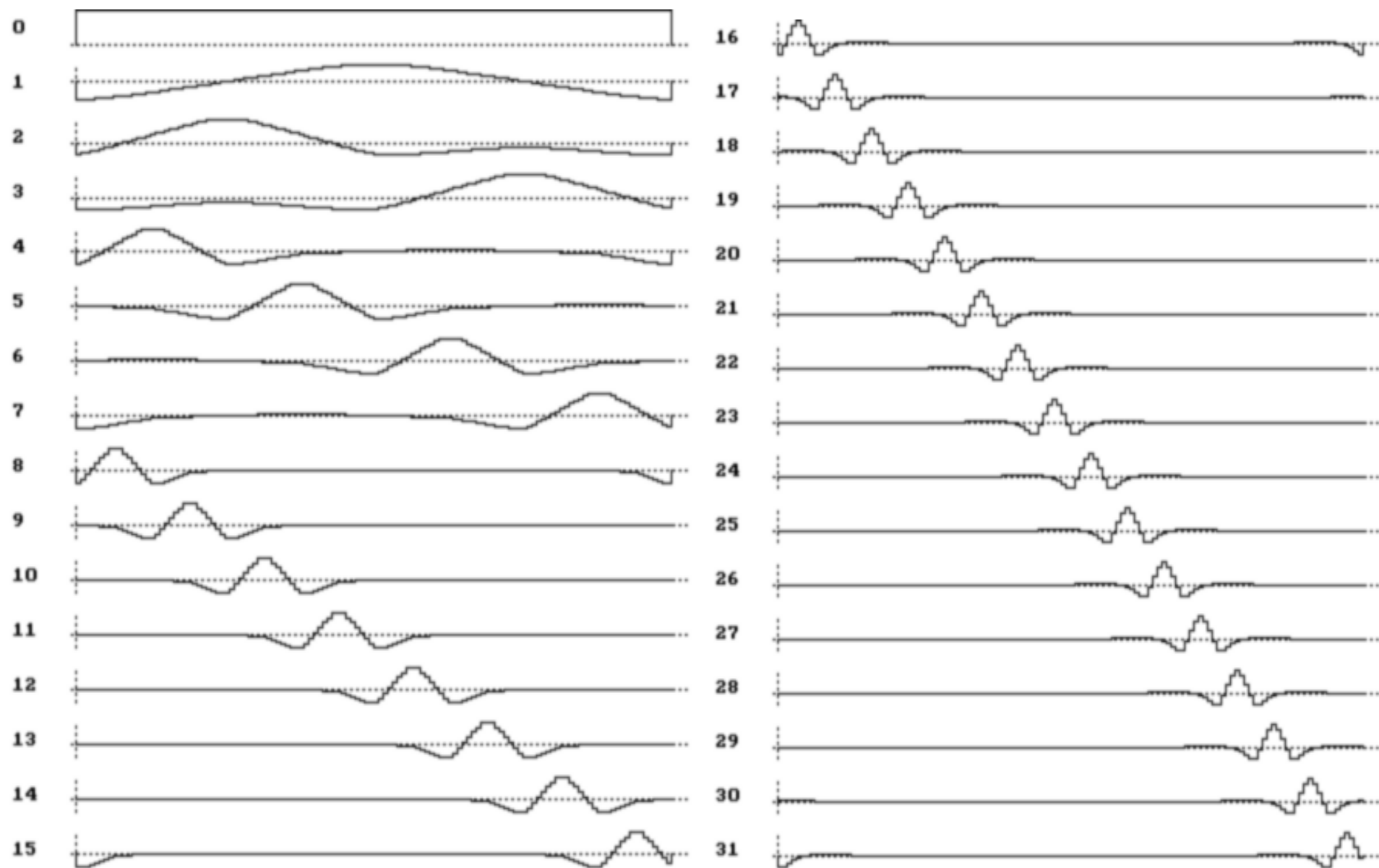




Štruktúra bázy pri ortogonálnej DWT s Db2. Pri vstupe do V_0 je báza tvorená posunmi jednotkových impluzov. Pri rozklade signálu do ďalších podpriestorov predstavujú bázové vektory čoraz lepšiu aproximáciu waveletov.



Bázové funkcie diskkrétnej waveletovej bázy o veľkosti $N=32$ pre Haarov wavelet



Prvých 32 bazových funkcií diskkrétnej waveletovej bázy o veľkosti $N=128$ pre FBI(9,7) wavelet