

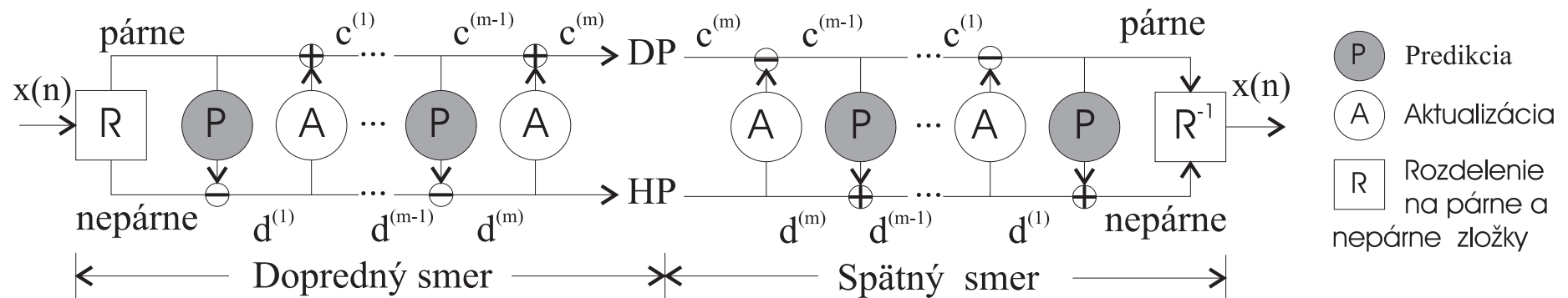
Lifting schéma

- Lifting schéma umožňuje jednoducho zlepšiť špecifické vlastností danej WT – odtiaľ názov „*lifting*“
- Jednoducho opisuje závislosti medzi párami filtrov, ktoré zdieľajú ten istý HP, resp. DP filter. Takto môžeme začať z triviálneho prípadu "lenivého" waveletu a postupne vybudovať pár filtrov s požadovanými vlastnosťami, t.j. postupujeme podľa tzv. *Lifting schémy*
- Umožňuje efektívne realizovať klasické WT s nasledovnými výhodami:
 - urýchlenie implementácie WT (napr. v 1D prípade až dvojnásobne)
 - možnosť vykonať výpočty bez použitia prídavnej pamäte (t.j. "in-place")
 - jednoduchý dizajn vlastných WT (naviac so zaručenou invertovateľnosťou)
- Umožňuje jednoducho rozširovať klasickú WT, zaujímavé su napr.
 - konštrukcia nelineárnych WT (napr. adaptívnych, celočíselných)
 - použitie WT pre nerovnomerne navzorkované signály
 - konštrukcia WT na intervaloch, krivkách, povrchoch

Konštrukcia lifting schémy je založená na koncepte polyfázového rozkladu bánk filtrov:

- každú FB, môžeme rozložiť (faktorizovať jej filtre) na jednoducho invertovateľnú postupnosť krokov
- Tieto kroky tvoria v algoritme priečkovú štruktúru, ktorú môžeme interpretovať ako postupnosť *predikcií* a *aktualizácií* dvoch množín v obraze až po ich vzájomnú dekoreláciu

Principiálne môžeme waveletovú transformáciu implementovanú lifting schémou prekresliť podľa nasledovného obrázku. Sú vyznačené základné bloky lifting schémy: *rozdelenie*, *predikcia* a *aktualizácia*:



- cieľom predikcie je získanie čo najmenších hodnôt v HP časti po doprednej transformácii.
- aktualizáciou sa snažíme zachovať v DP časti čo najviac vlastností pôvodného obrazu, čo sa stáva dôležitým najmä pri rekurzii v DP časti (aby bola predikcia aj naďalej účinná)

Príklad A: Lenivý wavelet

Aké vlastnosti má naše spektrum?

Vstupný signál je jednoducho podvzorkovaný, takže máme najhorší možný aliasing. Charakter oboch zložiek signálu je rovnaký.

Príklad B: Haarov wavelet

V DP časti chceme dostať priemer susedných koeficientov, v HP časti zase rozdiel. Ak je teda funkcia po častiach konštantná dostávame v HP časti nulové koeficienty.

1) Signál si rozdelíme na párne a nepárne časti:

$$c^{(0)}(n) = x(2n) \quad d^{(0)}(n) = x(2n+1)$$

2) Aktualizujeme priemer (nenormovaný):

$$c^{(1)}(n) = c^{(0)}(n) + d^{(0)}(n)$$

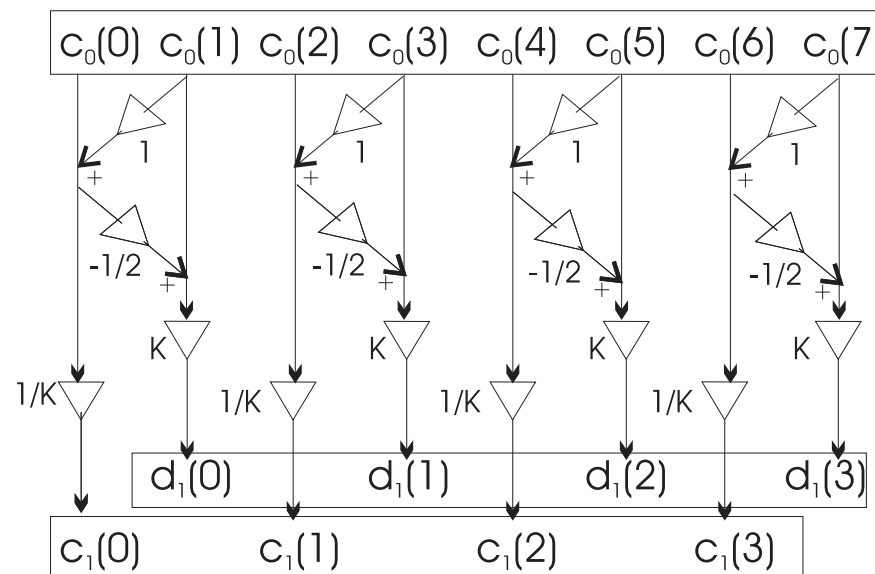
3) Predikujeme HP časť:

$$d^{(1)}(n) = d^{(0)}(n) - 0.5c^{(0)}(n)$$

4) Normalizujeme ($K = \sqrt{2}$):

$$d(n) = Kd^{(1)}(n) = \frac{\sqrt{2}}{2}(x(2n) - x(2n+1))$$

$$c(n) = \frac{1}{K}c^{(1)}(n) = \frac{\sqrt{2}}{2}(x(2n) + x(2n+1))$$



Príklad C: CDF 2,2 wavelet

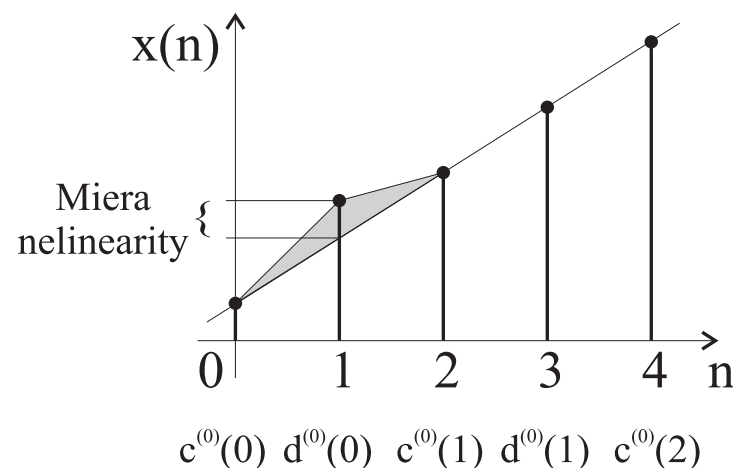
Čo ak chceme reprodukovať po častiach lineárne funkcie?

1) Najprv si rozdelíme signál na párne a nepárne časti:

$$c^{(0)}(n) = x(2n) \quad d^{(0)}(n) = x(2n+1)$$

2) Waveletové koeficienty nám vtedy určujú mieru, ako sa náš signál líši od lineárneho:

$$d^{(1)}(n) = d^{(0)}(n) - \frac{1}{2} [c^{(0)}(n) + c^{(0)}(n+1)]$$



3) V DP časti chceme zachovať aspoň priemer, t.j. jednosmernú zložku signálu. Hľadáme riešenie v tvare:

$$c^{(1)}(n) = c^{(0)}(n) + A [d^{(1)}(n) + d^{(1)}(n-1)]$$

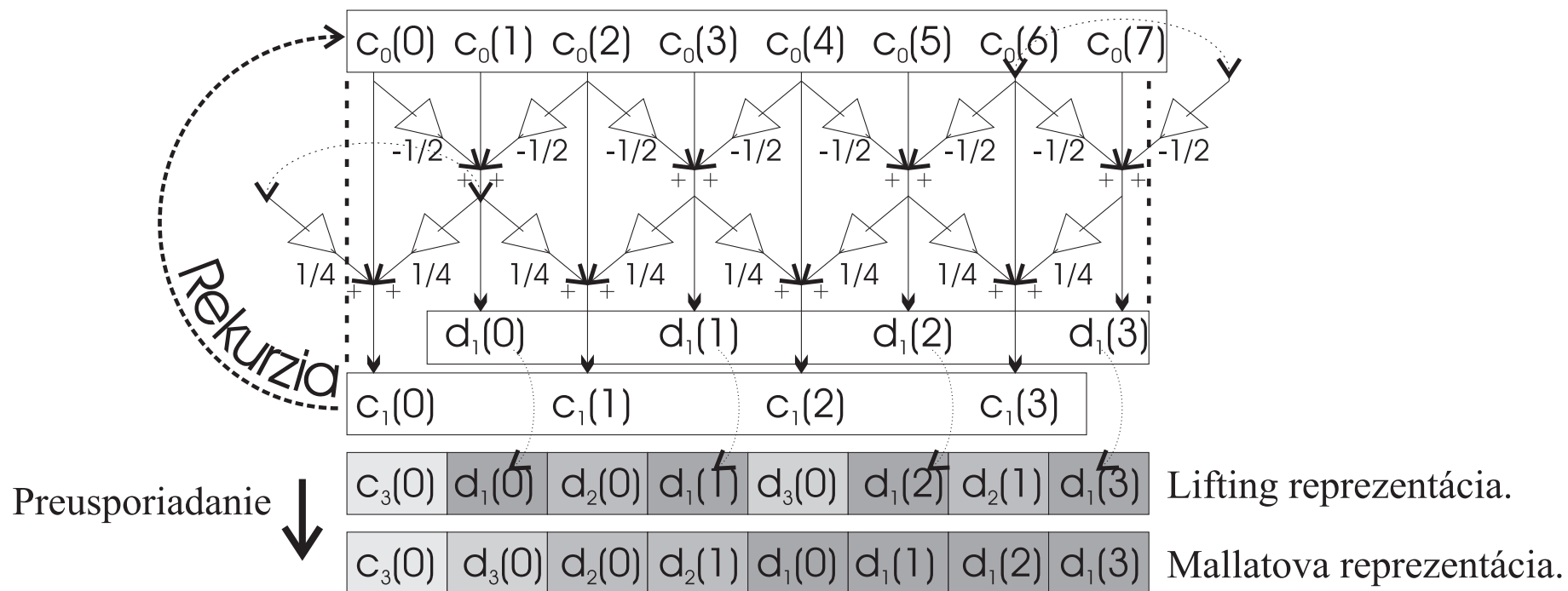
Ak uvážime, že koeficientov $c(n)$ je polovičný počet ako $x(n)$, musí platiť:

$$\sum_n c^{(1)}(n) = \frac{1}{2} \sum_n x(n)$$

dostaneme hodnotu $A=1/4$.

3) Dostali sme CDF 2,2 filter s $\tilde{h}(n) = \left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}\right)$

Reprezentácia signálu po liftingu (príklad CDF 2,2 wavelet)



O prediktoroch

- Vlastnosti výslednej transformácie sú určené vlastnosťami a spôsobom aplikácie prediktorov
- Teoreticky môžeme použiť ľubovoľné prediktory. Priečková štruktúra nám zaručuje biortogonalitu a tým aj úplnú rekonštrukciu. Môžeme použiť nelineárne prediktory, napr. adaptívne alebo celočíselné. Celočíselné prediktory dostaneme napr. jednoduchým zaokrúhlením hodnoty (nelineárna operácia).

Koncept prediktorov predstavuje silný vzťah medzi *transformačným* a *prediktívnym* kódovaním, kde sa snažíme predpovedať (aproximovať) signál a kódovať iba prípadnú diferenciu od originálneho signálu

Lifting schéma takto principiálne umožňuje dvojaký prístup k dekorelácii dát:

- a) použiť transformačný princíp (t.j. WT) a celý postup faktorizovať na kroky liftingu
- b) využiť priamo predikčný princíp a snažiť sa data dekorelovať priamo dizajnom sústavy prediktorov použitých v lifting schéme

Lifting – aké je urýchlenie výpočtov?

- Výpočet FFT – komplexnosť rádu $N \cdot \log(N)$
- Výpočet DWT – komplexnosť rádu N
- Výpočet DWT liftingom – ďalšie *zníženie počtu operácií až na polovicu*.

Priemerný počet násobení a sčítaní na výpočet jedného koeficientu pri DWT jednostupňovom rozklade:

Typ waveletu	DWT klasicky	DWT liftingom	Urychlenie
Haar	3	3	0%
Db2	14	9	56%
Db3	22	14	57%
FBI (9,7)	23	14	64%
B-spline(4,2)	17	10	70%
Interpolačné(N,Ntilde)	$3(N+Ntilde)-2$	$3/2(N+Ntilde)$	100%

Lifting – ako vykonať celočíselné transformácie?

- používať celočíselné prediktory (operácia zaokrúhľovania)
- problematická normalizácia pásiem
 - o nerobiť normalizáciu (zvýši nám dynamiku dát)
 - o aproximovať normalizáciu krokmi liftingu, t.j. využiť vlastnosť

$$\begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 1/K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & K - K^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/K & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & K - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Intermezzo: Čo sú to interpolačné filtre?

DP Filter $\tilde{H}(z)$ nazývame *interpolačný*, ak je schopný interpolovať koeficienty prestriedané nulami (najradšej ako polynómy R-tého rádu).

Ak je filter *polpásmový* tak je aj interpolačný:

Prečo?

Lebo interpoluje párne koeficienty z nepárnych, resp. naopak (polpásmový filter má v impulzovej charakteristike okrem počiatku párne koeficienty nulové)

Ako vypočítame koeficienty interpolačných filtrov? -> T.z.v Nevillovým algoritmom.

Príklady Interpolačných filtrov: Haarov wavelet – konštantná interpolácia $h(n)=\{1,1\}$, CDF 2,2
– lineárna intarpolácia, $h(n)=\{1/2, 1, 1/2\}$, 4-bodová schéma $h(n)=\{-1/16, 0, 9/16, 1, 9/16, 0, -1/16\}, \dots$

Počítačová grafika a interpolačné delenie intervalov

- Dôležitý cieľ - lokálne opakovane(!) zjemniť danú sieť bodov a ich hodnôt – výsledkom by mala byť hladká funkcia
- Tento process si môžeme predstaviť ako inverznú waveletovú transformáciu bez “detailov”.