

Banky filtrov a systémy s rôznym taktovaním

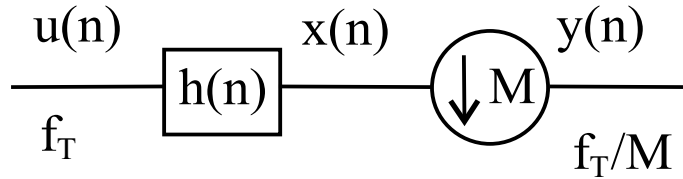
V *systémoch s rôznym taktovaním* (*SRT*, “*multirate systems*”) sú vzorky signálu spracovávané v častiach systému s rôznymi *taktovacími frekvenciami*. Zmeny taktovacej frekvencie sú uskutočnené operáciami *decimácie* a *interpolácie*.

Decimácia je proces redukcie vzorkovacej frekvencie celočíselným faktorom M . Najprv je signál $u(k)$ filtrovaný *antialiasingovým* filtrom prípadne ideálnym DP filtrom s hranicou prepúšťania $\Omega_0 = \pi / M$ a impulzovou charakteristikou $h(n)$ a potom je podvzorkovaný. Výsledok po decimácii je:

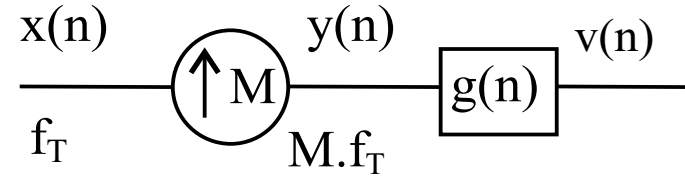
$$y(n) = \sum_k h(Mn - k)u(k)$$

Interpolácia je proces zvýšenia taktovacej frekvencie signálu celočíselným faktorom M . Signál $x(k)$ je najprv nadvzorkovaný (vložením $M - 1$ núl medzi každé 2 vzorky) a potom interpolovaný filtrom (napr. ideálnym DP s $\Omega_0 = \pi / M$) s imp. charakteristikou $g(n)$. Výsledný signál po interpolácii je:

$$v(n) = \sum_k g(n - Mk)x(k)$$

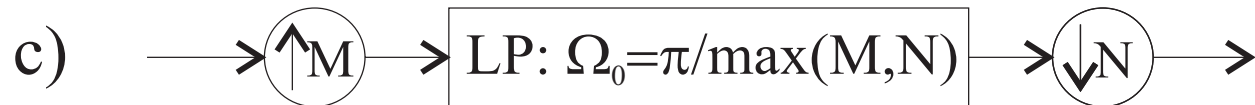
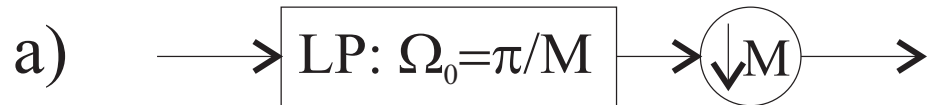


a)



b)

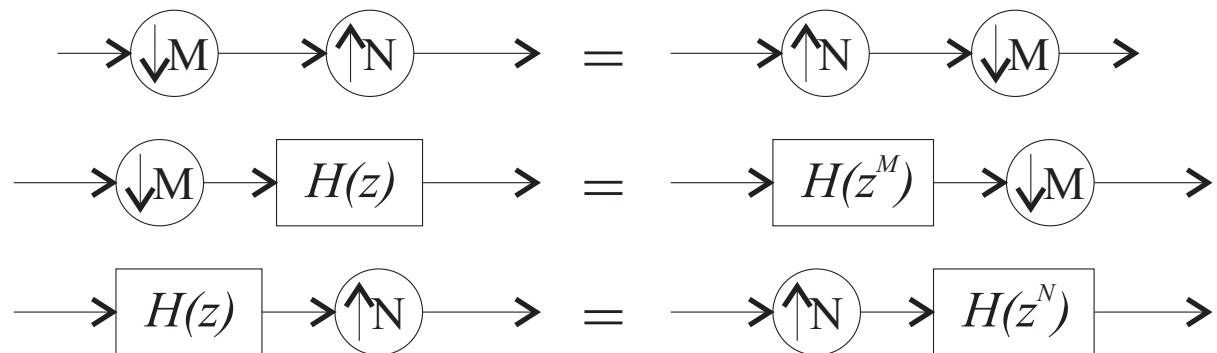
Operácie v SRT a) decimácia b) interpolácia



Požadovaný typ filtra pri : a) decimácii b) interpolácii c) zmene taktovacej frekvencie faktorom M/N

Ekvivalentné štruktúry v SRT

M, N nesúdeliteľné

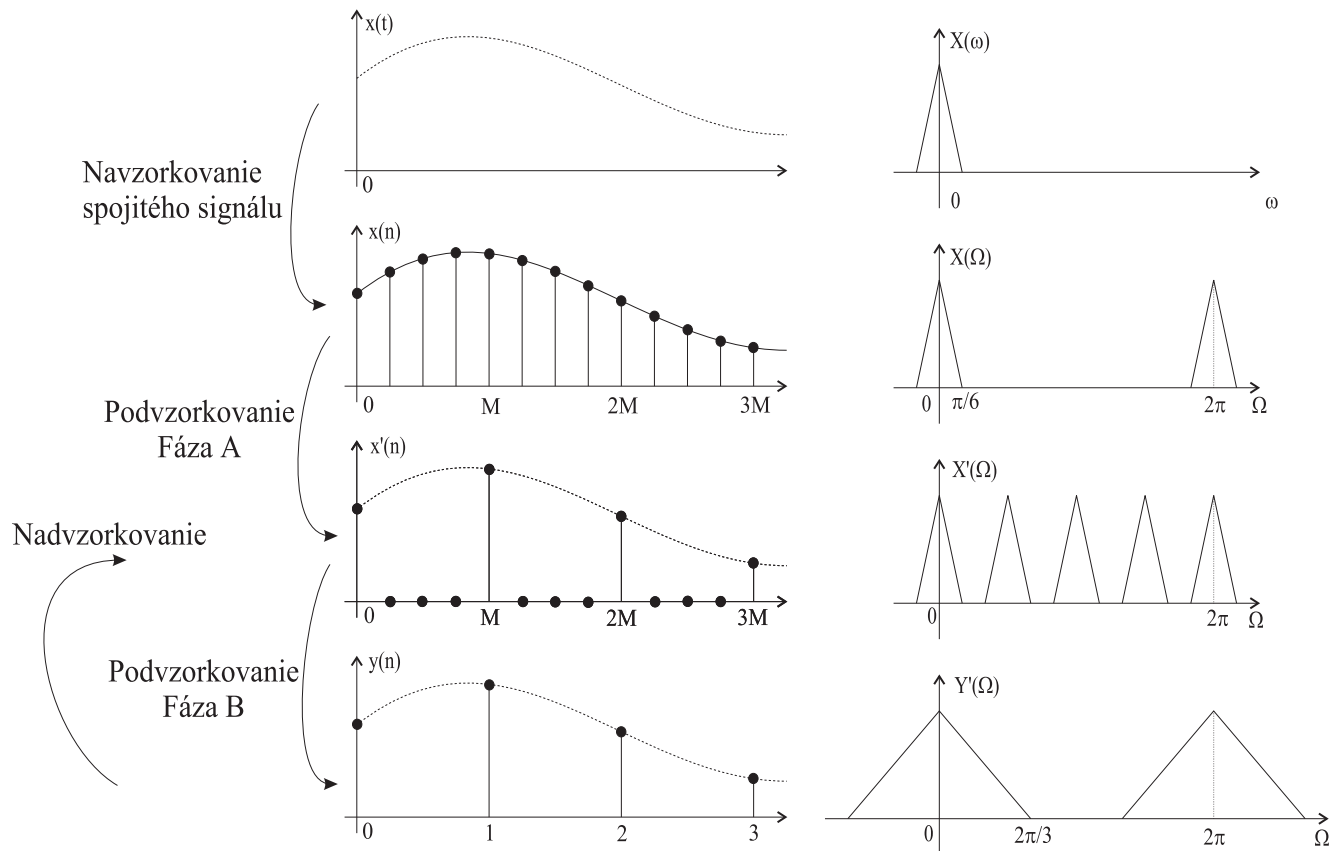


Podvzorkovanie signálu

Z pôvodného signálu zachováame iba každú M -tú vzorku. Pre vstupný signál

$$x(n) \text{ je výstup daný } y(n) = x(Mn)$$

Čo vo frekvencii odpovedá (znázornené pre $M=4$):



Proces podvzorkovania $x(n)$ môžeme popísať v *dvoch fázach*:

A) vynulovanie nepotrebných zložiek (násobenie Kroneckerovými impulzami)

$$x'(n) = x(n) \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(n - rM) = x(n) \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{j\frac{2\pi}{M}nk} \quad (\text{Finta})$$

Z transformáciou dostaneme:

$$X'(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} Z \left\{ x(n) \left(e^{j\frac{2\pi}{M}k} \right)^n \right\} = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(zW^k)$$

, kde $W = e^{-j2\pi/M}$. Tomu opovedá frekvenčná charakteristika (pri $z = e^{j\Omega}$)

$$X'(\Omega) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X\left(\Omega - \frac{2\pi}{M}k\right)$$

T.j. výsledné spektrum je sumou M pôvodných spektier, posunutých zakaždým o $2\pi/M$.

B) Zmena mierky, resp. roztiahnutie signálu $x'(n)$

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x'(Mn) z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x'(k) \left(z^{\frac{1}{M}} \right)^{-k} = X' \left(z^{\frac{1}{M}} \right) \quad Y(\Omega) = X'(\Omega/M)$$

Výsledkom podvzorkovania teda je:

$$Y(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X \left(z^{\frac{1}{M}} W^k \right) \quad Y(\Omega) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X \left(\frac{\Omega - 2k\pi}{M} \right)$$

Nadvzorkovanie signálu.

Pri nadvzorkovaní signálu vkladáme medzi jeho vzorky zakaždým $M-1$ núl. Teda pre vstupný signál $x(n)$ je výstup daný:

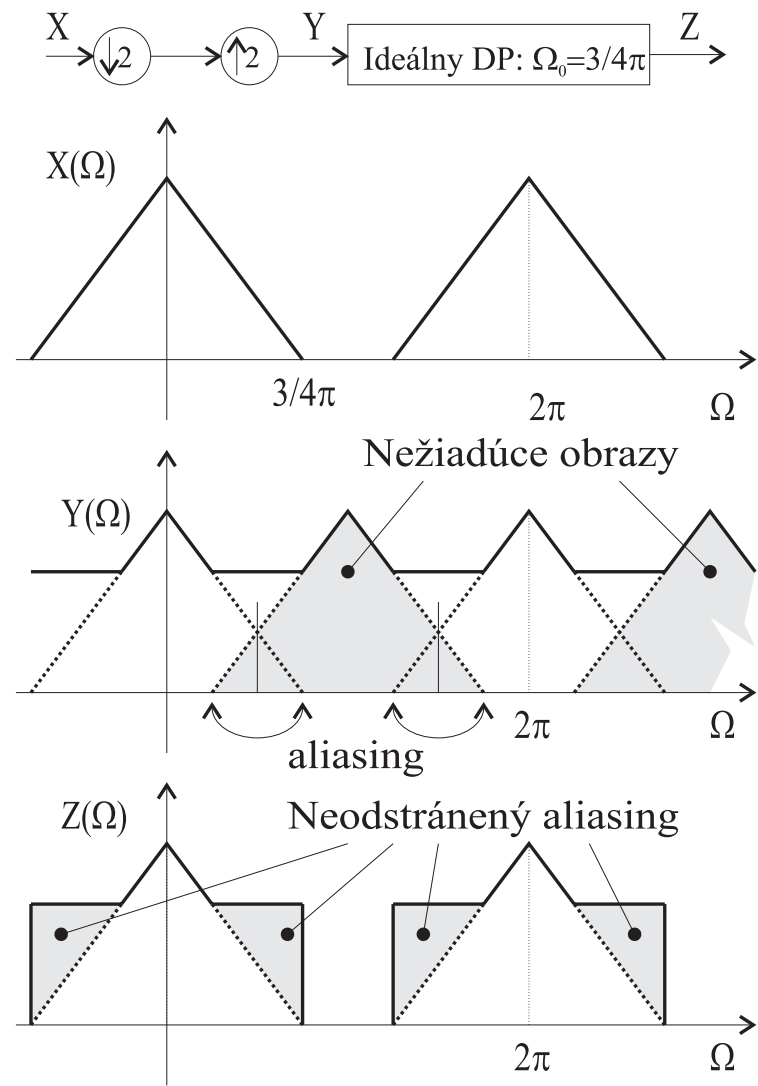
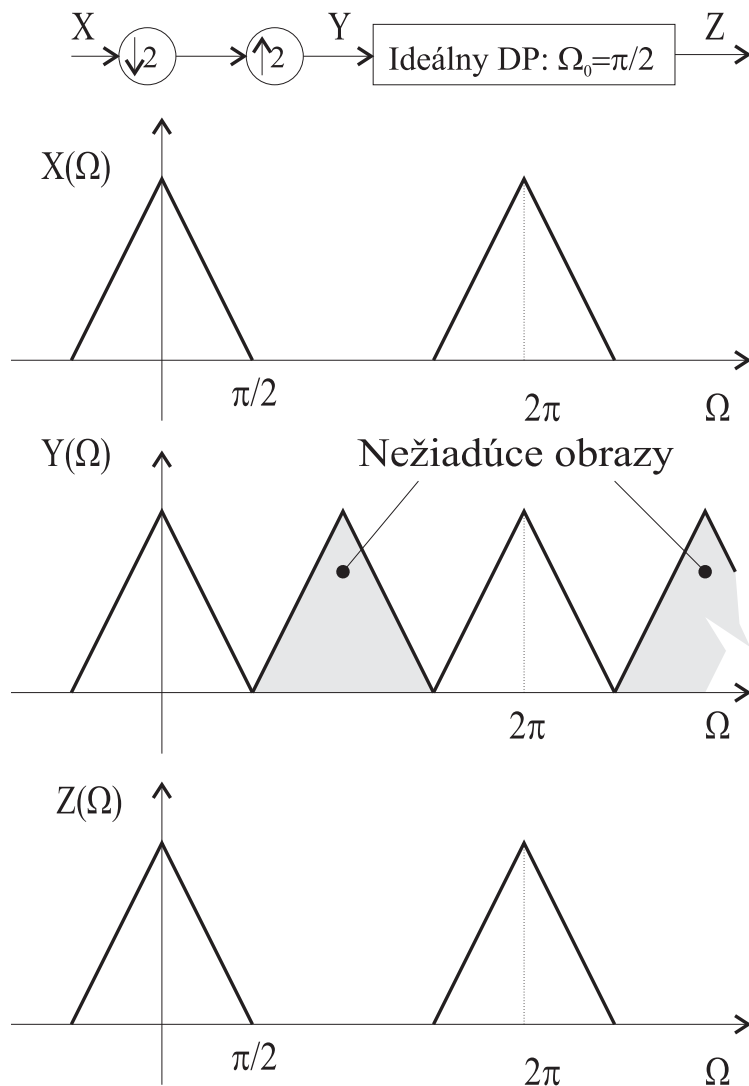
$$y(n) = x(n / M)$$

Proces je opačný ako pri fáze B podvzorkovania, t.j na intervale vznikne $M-1$ obrazov spektra pôvodného signálu $x(n)$:

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n / M) z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) (z^M)^{-k} = X(z^M)$$
$$Y(\Omega) = X(M\Omega)$$

Úlohou interpolačného filtra je **odstrániť týchto $M-1$ obrazov**.

Podvzorkovanie a následné nadvzorkovanie signálu



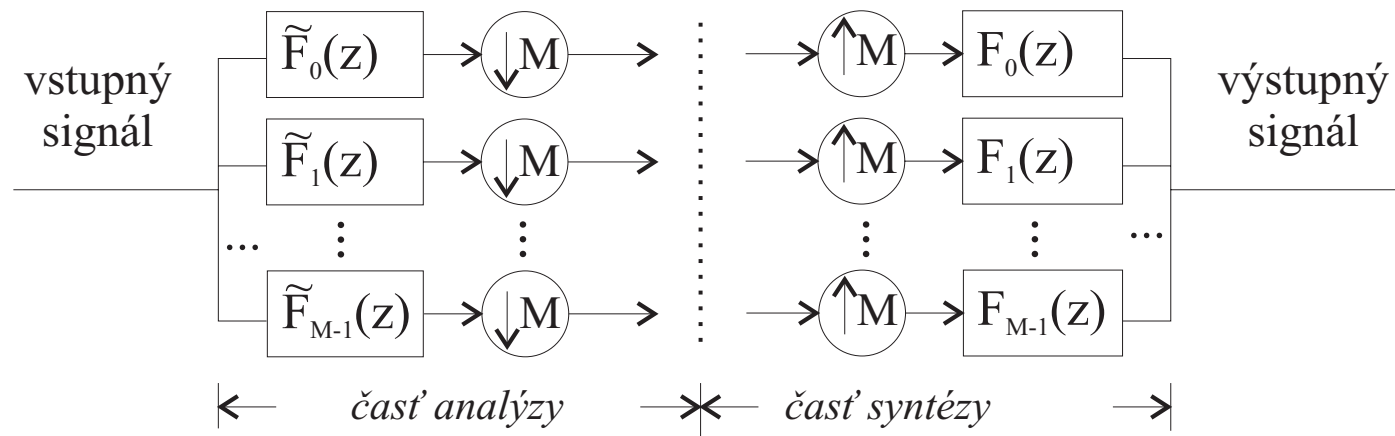
- Vidíme, že po podvzorkovaní a následnom nadvzorkovaní vieme bezchybne zrekonštruovať iba signál frekvenčne ohraničený po $\Omega_0 = \pi / M$.
- Ináč vzniká tzv. *aliasing* (sčítavanie zrkadlových spektrálnych zložiek signálu), ktorý nevieme odstrániť.

Ako po podvzorkovaní zrekonštruovať ľubovoľný signál?

—>> Riešením je banka filtrov.

Banka filtrov

Definícia: **Banka filtrov (BF)** je sústava, v ktorej filtre, použité v operáciach decimácie a interpolácie, umožňujú signál rozložiť (analýza) na **subpásma** a spätne zložiť (syntéza).



*Všeobecná schéma M-pásmovej banky filtrov s **kritickým podvzorkovaním***

- Signál je rozdelený filtermi pre analýzu $\tilde{F}_k$ na M častí (**subpásiem**) a následne podvzorkovaný – **analýza signálu**
- Signál zrekonštruujeme spätným nadvzorkovaním týchto dvoch častí, interpoláciou filtermi pre syntézu F_k nakoniec sčítaním – **syntéza signálu**

Ak je výstupný signál identický so vstupným, potom FB má vlastnosť *perfektnnej(úplnej) rekonštrukcie*.

Zvyčajne chceme FB s *rušením aliasingu* a *úplnou rekonštrukciou signálu*.

→ Prenosové funkcie analyzačných $\tilde{F}_k(z)$ resp. syntetizačných filtrov $F_k(z)$ musia spĺňať isté podmienky.

Najčastejšie je používané rovnomerné rozdelenie na subpásma v tvare:

