

Vzorkovanie (opakovanie+doplnenie)

Vzorkovanie: proces tvorby vzoriek signálu, t.j. meranie nejakej veličiny v určených (časových) okamihoch. Typicky sa jedná o konverziu spojitého signálu v čase $x(t)$ na diskretný signál v čase $x(n)$.

Je viacero spôsobov ako vzorkovať, jednotlivé spôsoby sa môžu kombinovať. Napr.

Rozdelenie podľa časových parametrov vzorkovania

- Rovnomerné - vzorky odoberáme s konštantnou frekvenciou f_{vz}
- Nerovnomerné – frekvencia odberu vzoriek sa môže meniť

Rozdelenie - podľa spôsobu odberu jednotlivých vzoriek

- Ideálne vzorkovanie (máme nekonečne úzke vzorky) $x(n) = x(t - nT_{vz})$
- „neideálne“- v reálnych systémoch nemáme nekonečne úzke vzorky
 - vzorkovanie 1. Druhu („Vzorky“ kopírujú hodnotu signálu v čase)
 - vzorkovanie 2. Druhu („Vzorky“ držia hodnotu signálu v čase - Sample and hold), reprezentatívna hodnota $x(n)$ sa môže reálne spracovávať ďalej, je na to čas ...

V PRAXI SA TAKMER VYHRADNE POUŽÍVA IBA ROVNOMERNÉ VZORKOVANIE 2. DRUHU.

Pre kvalitné vzorkovanie je treba v max. možnej miere zabezpečiť $f_{\max} \leq f_{vz}$

Interpolácia

Interpolácia je opakom vzorkovania: proces konverzie diskkrétnej veličiny $x(n)$ na spojitú veličinu $x(t)$.

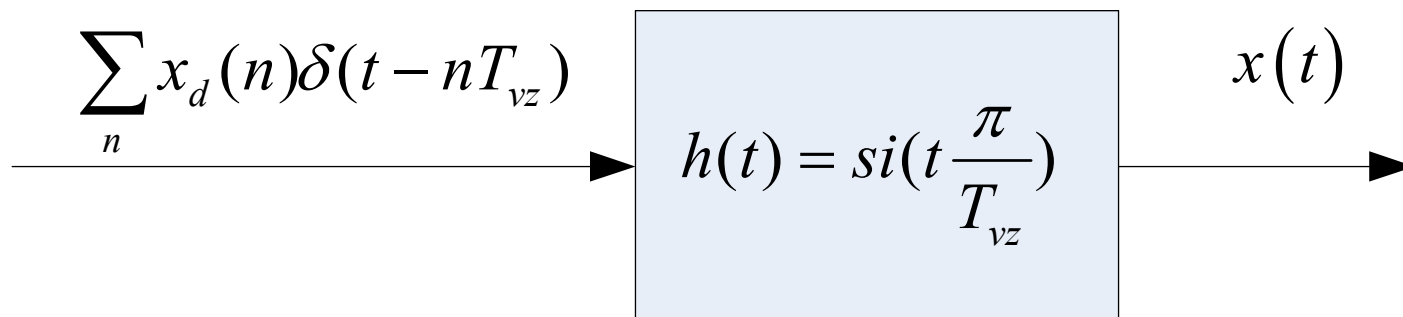
- Kľúčová požiadavka je aby po interpolácii ostali v $x(t)$ nezmenené hodnoty oproti hodnotám vzoriek $x(n)$ v daných časoch. T.j. pri rovnomernom vzorkovaní: $x(t)|_{t=nT_{vz}} = x(n)$
- T.j. interpolácia má čo najvhodnejšie zaplniť medzery medzi vzorkami

My sme sa stretli pri s interpoláciou pomocou si funkcie (prednáška 5, fólie 7-9):

$$x(t) = box(t) * \sum_n x_d(n) \delta(t - nT_{vz})$$

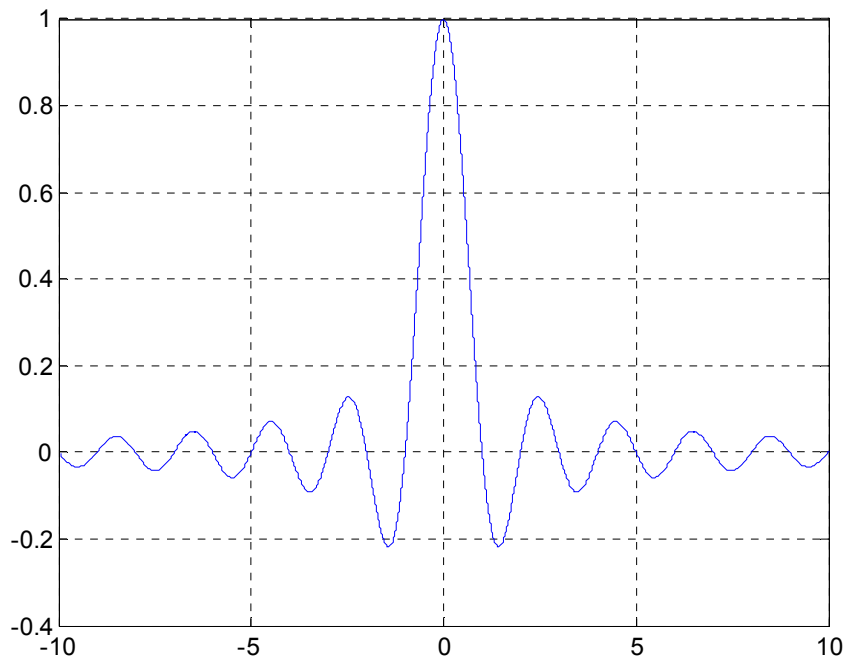
, kde $box(t) = si(t \frac{\pi}{T_{vz}})$

Čo môžeme zakresliť ako spojitú sústavu:

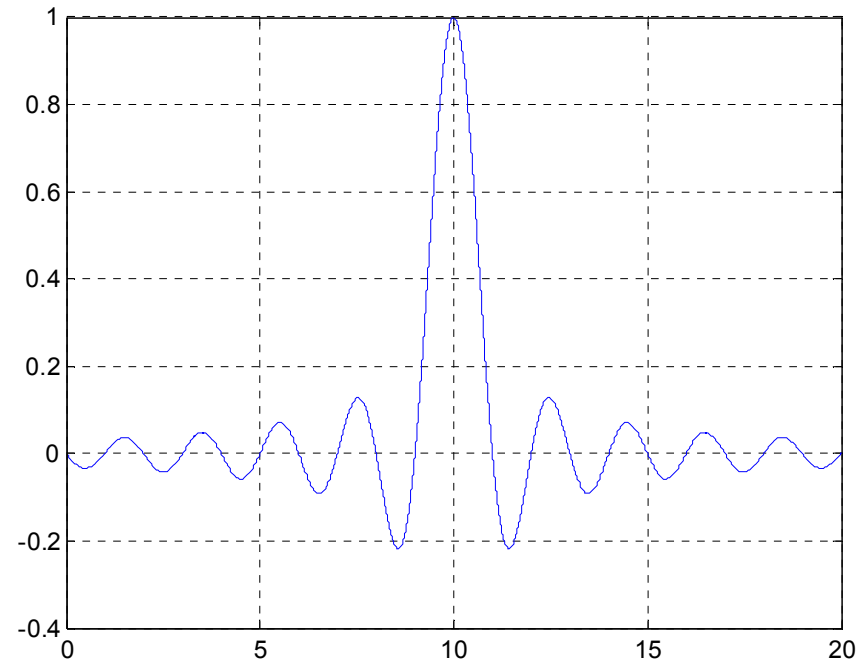


Táto sústava však nie je LSKI – nie je kauzálna, t.j. v reálnom čase nerealizovateľná. Má ideálne, nulové oneskorenie.

- Keď $T_{vz} = 1$, vidíme priebeh $h(t)$ vľavo. Zobrazený interval $(-10, 10)$ sekúnd. $h(t)$ má však nosič (nenulové hodnoty) na intervale $(-\infty, \infty)$
- Ako vyrobiť reálne použiteľné riešenie?
 - $h(t)$ v čase ohraničiť (frekvenčná charakteristika procesu už nebude ideálna)
 - $h(t)$ v čase posunúť (výstup sústavy bude oneskorený o toto posunutie).



$h(t)$, nekauzálna sústava, oneskorenie 0s

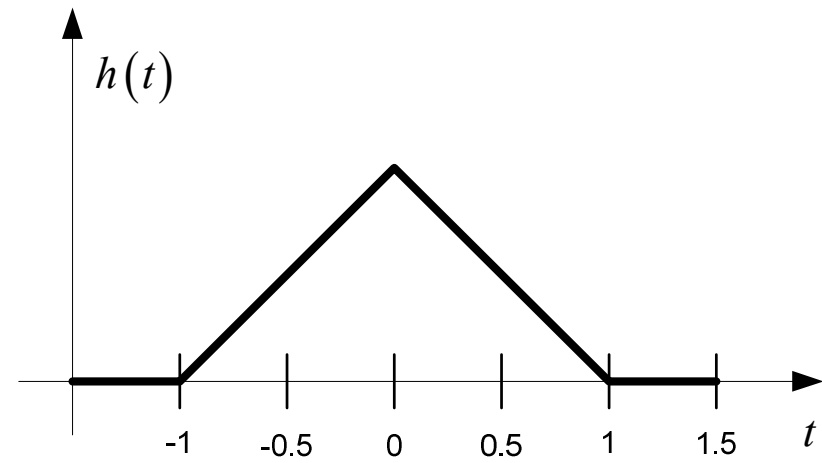
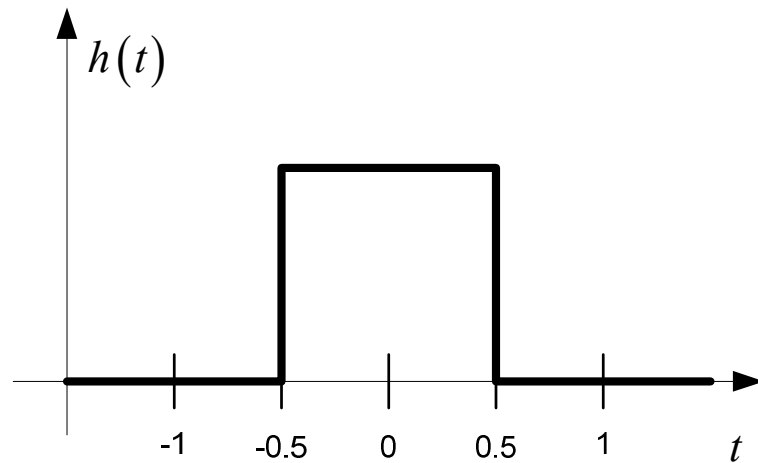


$h(t)$, LSKI, oneskorenie 10s

V praxi sa používajú aj iné spôsoby interpolácie:

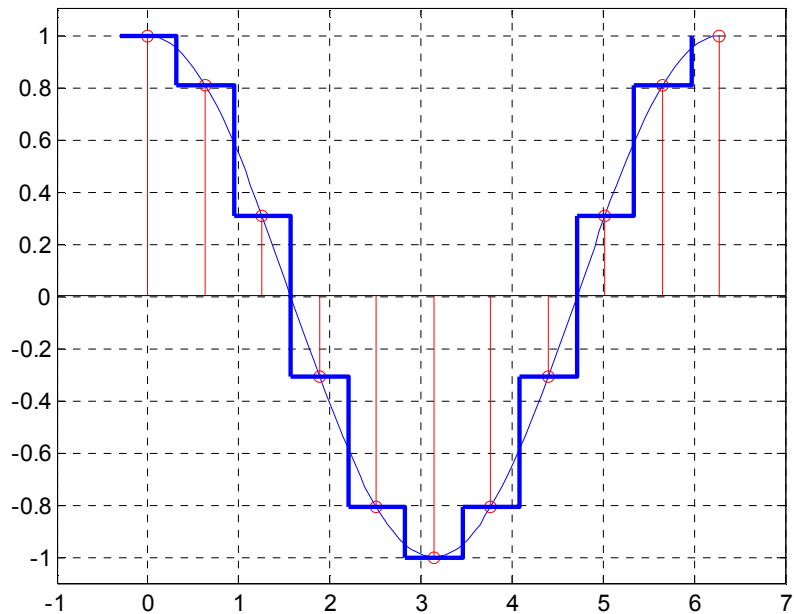
- Konštantná (vytvára nespojitý signál)
- Lineárna (vytvára signál nespojitý v prvej derivácii)
- Počastiach polynomicke (napr. pomocou kubických splajnov)
- Polynomicke
- Niektoré sú realizovateľné LSKl systémami

Napr: pre konštantnú a lineárnu interpoláciu pri $T_{vz} = 1$ vyzerajú $h(t)$ ako je na nižšie uvedených obrázkoch.

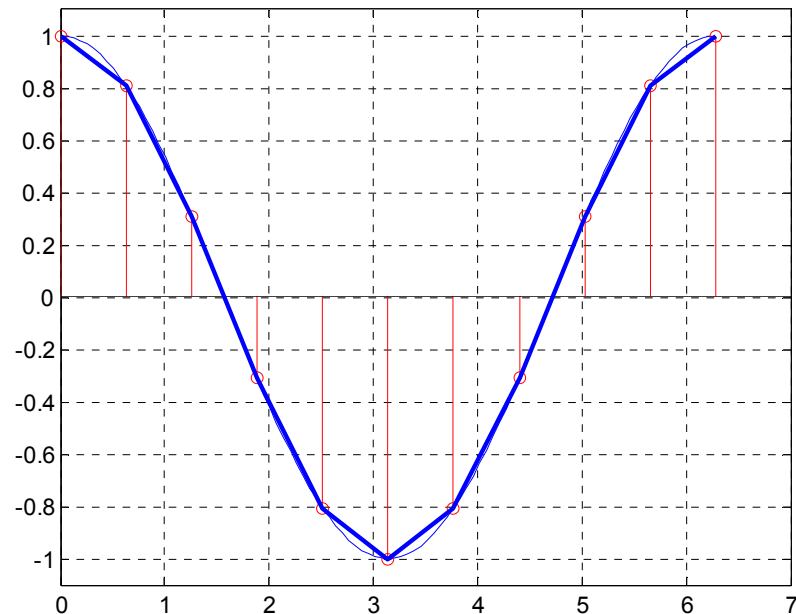


Odpovedajúce systavy budú nekauzálne a s nulovým oneskorením. Ak $h(t)$ oneskoríme, systavy budú LSKl s príslušným oneskorením.

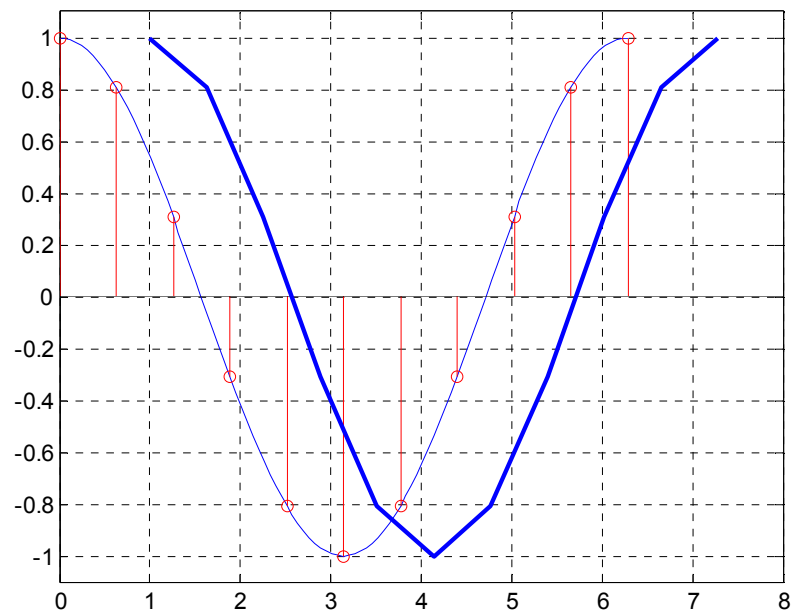
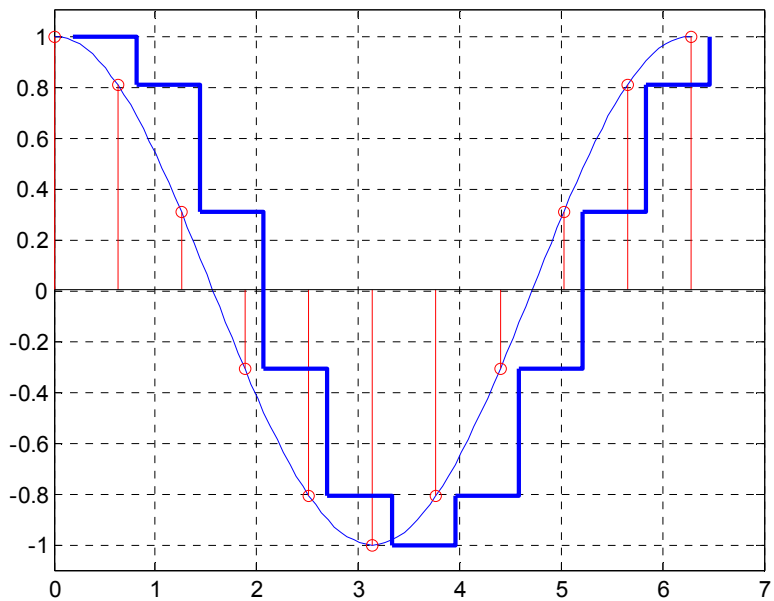
Konštantná interpolácia



Lineárna interpolácia



Interpolácia
Nekauzálnu
u sústavaou,
výstup bez
oneskorenia



Interpolácia
LSKI, výstup
oneskorený

Kvantizácia

Doteraz: naše diskkrétne signály boli diskkrétne iba v čase nie v hodnote.

Ak chceme naše $x(n) \in R$ uložiť a zachovať, robíme tak s konečnou presnosťou, t.j.

- mapujeme obor hodnôt R na konečnú množinu hodnôt, t.j. hodnoty $x(n)$ týmito hodnotami aproximujeme
- vzniká aproximačná chyba

Uvedený proces nazývame **kvantizácia**.

Základný spôsob riešenia:

- nech $x(n) \in (A, B)$
- Interval rozdelíme na K neprekrývajúcich sa intervalov $I_k : \bigcup_{k=0}^{K-1} I_k = (A, B)$
- Kvantizačná (mapovacia) funkcia Q je daná predpisom: $Q\{x(n)\} = \{k | x(n) \in I_k\}$, t.j. každej hodnote $x(n)$ pridelí číslo k podľa toho, do ktorého intervalu I_k hodnota $x(n)$ padne.

Základné vlastnosti kvantizácie

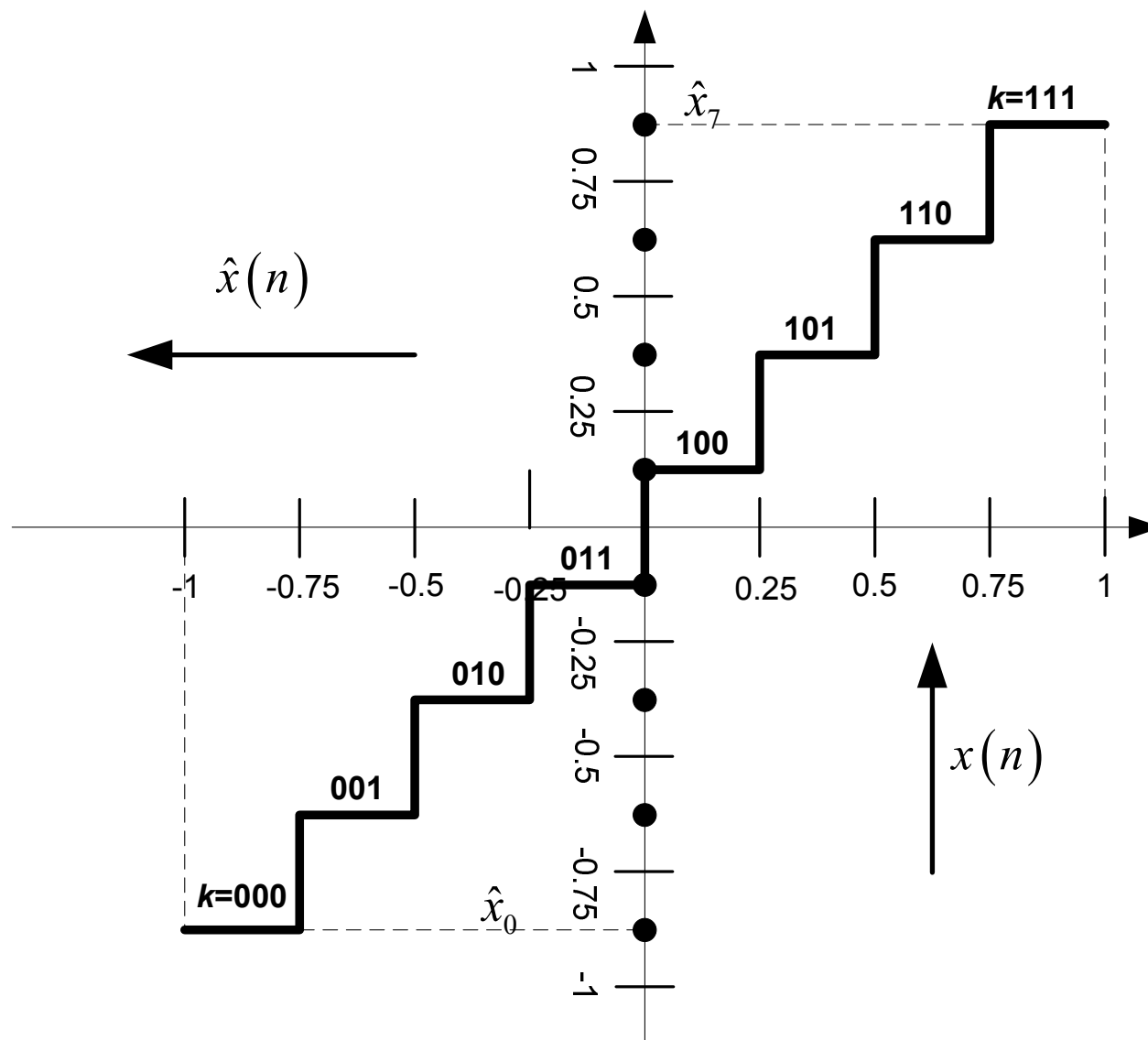
- Nelinearita – kvantizácia NIE JE lineárna operácia $Q\{x(n) + y(n)\} \neq Q\{x(n)\} + Q\{y(n)\}$
- Rekonštrukcia je daná prevodom čísla k na pevne stanovenú hodnotu $\hat{x}(k)$ z intervalu I_k :

$$\hat{x}(n) = \{\hat{x}_k, k = Q\{x(n)\}\}$$
- Kvantizačná (aproximačná) chyba je daná vzťahom $e(n) = x(n) - \hat{x}(n)$.
- Základná otázka je ako voliť $\hat{x}(k)$ aby bola kvantizačná chyba minimálna
- **Zvyčajne za výstup kvantizátora považujeme až $\hat{x}(n)$** , t.j. signál zrekonštruovaný z čísiel k

Rovnomerný skalárny kvantizátor

- Slovom “skalárny” sa myslí, že každá vzorka je kvantovaná nezávisle (Pozn.: pri vektorových kvantizátoroch to tak nie je)
- Slovom rovnomerný (lineárny) sa myslí to, že intervaly I_k majú rovnakú šírku $\Delta = (B - A) / K$
- Δ sa nazýva kvantizačný krok
- Počet intervalov K je volený ako $K = 2^R$
- $\hat{x}(k)$ je volené v strede príslušného intervalu I_k

Príklad: lineárny skalárny kvantizátor s $K=8$, $R=3$, $x(n) \in (-1,1)$. Guličkami sú označené rekonštrukčné hodnoty $\hat{x}(k)$



Rovnomerná kvantizácia signálu s rovnomerne rozdelenou pravdepodobnosťou hodnôt

- Definujeme štatistické vlastnosti signálu
- $x(n) \in (A, B)$ má rovnomerné rozdelenie
- Hodnoty $x(n)$ sú navzájom nezávislé (nekorelované)
- Pre takýto signál $x(n)$ je z hľadiska minimalizácie kvantizačnej chyby **optimálnou voľbou**
 - intervaly I_k majú rovnakú šírku $\Delta = (B - A) / K$
 - $\hat{x}(k)$ je volené v strede príslušného intervalu I_k
- Kvantizačná chyba (nazývana aj **kvantizačný šum**) má tiež rovnomerné rozdelenie pravdepodobnosti hodnôt
- V spektre $x(n)$ aj $e(n)$ aj keďže sú nezávislé (ich autokorelačné funkcie majú tvar dirakovho impulzu) zaberajú celé spektrum rovnomerne – $x(n)$ až po $f_{\max}$, $e(n)$ až po $f_{\text{vz}} / 2$,

Priemerná výkon signálu rovnomerne rozdelenou pravdepodobnosťou hodnôt $x(n)$ je $P_x = \frac{(B - A)^2}{12}$

Dá sa odvodiť, že priemerný výkon chybového signálu - kvantizačnej chyby $e(n)$ je: $P_e = \frac{\Delta^2}{12}$

Následne uvážením $\Delta = (B - A) / 2^R$ dostávame

$$P_e = P_x 2^{-2R} \text{ resp. } SNR = P_x / P_e = 2^{2R} \text{ resp. } SNR_{dB} = 10 \log_{10} 2^{2R} \approx 6R \text{ dB}$$

T.j. : Pridaním 1 bitu rozlíšenia sa zvýši odstup signál/šum o cca 6dB. Napr. pri Audio CD vzorkách 16bitov môžeme dosiahnuť SNR=96dB

Rovnomerná kvantizácia signálu s normálnym rozdelením pravdepodobnosti hodnôt

- $P_e = P_x \frac{\sqrt{3}\pi}{2} \Delta^2$, $SNR = \frac{\sqrt{3}\pi}{2} 2^{2R}$
- Pribudne ešte chyba v dôsledku konečného počtu intervalov I_k (normálne rozdelenie má nekonečný obor hodnôt), takže $SNR = \frac{1}{C} 2^{2R}$ pričom $C \approx \frac{2}{\sqrt{3}\pi}$

Optimálna kvantizácia signálu s daným rozdelením pravdepodobnosti hodnôt

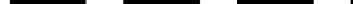
- Max-Lloydov kvantizátor
- Označme funkciu hustoty pravdepodobnosti signálu $x(n)$ ako $f_x(x)$
- Hodnoty $x(n) \in (A, B)$ sú navzájom nezávislé
- Označme i_k hranice jednotlivých intervalov. Platí $i_0 = A$, $i_K = B$

Optimálne hodnoty sú dané vzťahmi:

$$\hat{x}_k(n) = \frac{\int_{i_k}^{i_{k+1}} x f_x(x) dx}{\int_{i_k}^{i_{k+1}} f_x(x) dx} \quad i_k = \frac{\hat{x}_{k-1} + \hat{x}_k}{2}$$

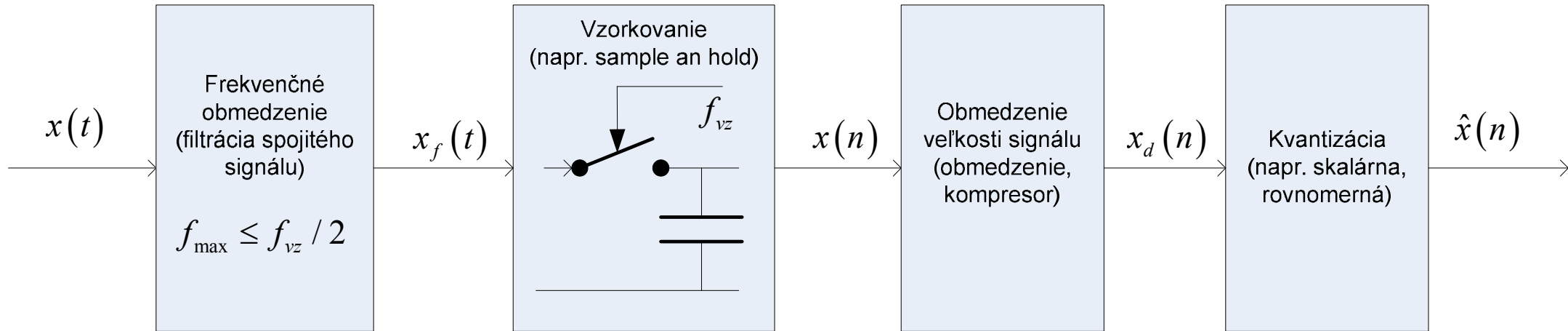
- T.j. optimálne hranice intervalov sú v stredoch medzi jednotlivými $\hat{x}_k(n)$
- Uvedené rovnice sa často riešia iteračne

Príklad štruktúry jasu v riadku pixelov odpovedajúci rôznym úrovniám jasu pôvodného signálu:

Úroveň 64:  Úroveň 128:  Úroveň 192: 

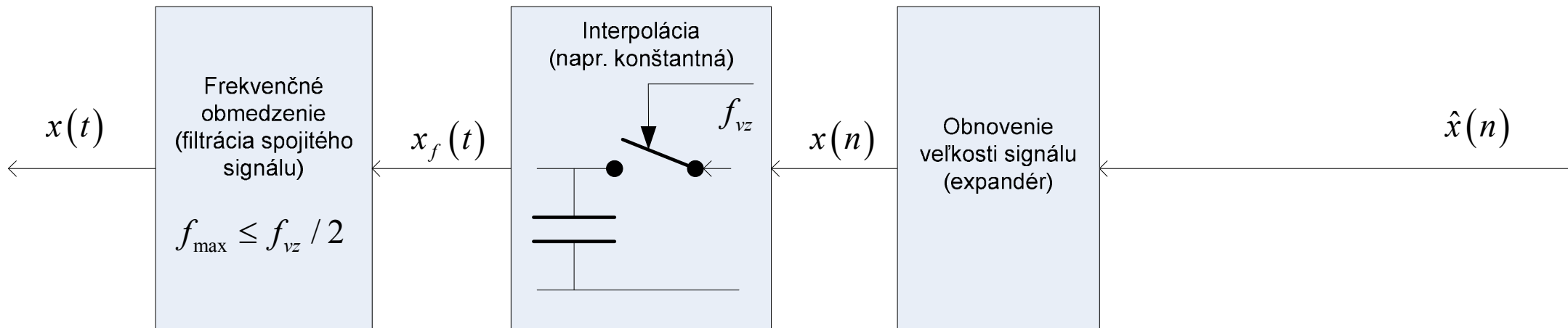
A/D Prevod

Základná schema:



D/A Prevod

Základná schema:

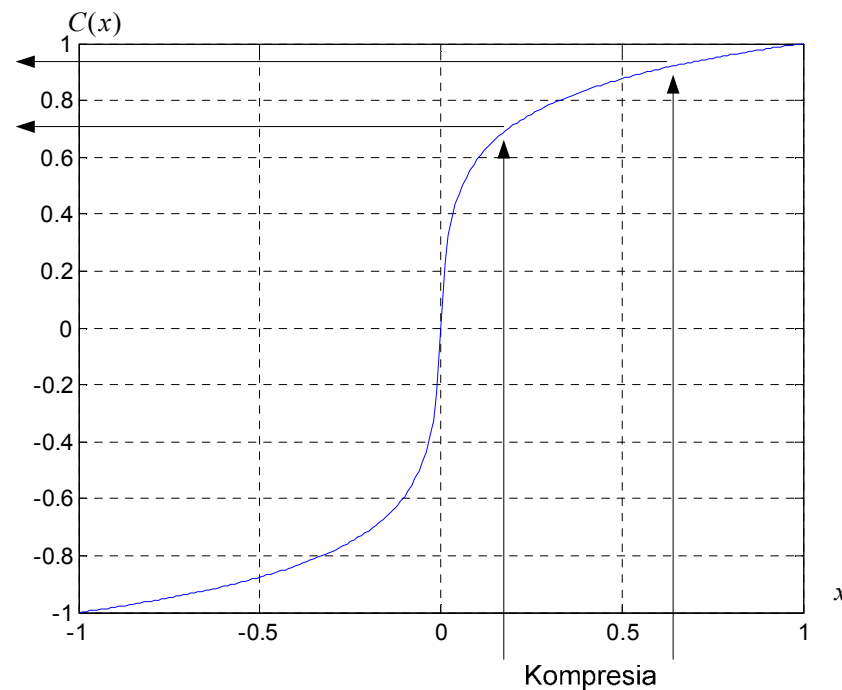


- najjednoduchší spôsob interpolácie je konštantná interpolácia, potom ale **MUSÍ** nasledovať filtrácia, ktorá artefakty interpolácie obmedzí (potlačí skokovú zmenu hodnôt)

AD+DA:

- Zachovanie dynamiky signálu (rozsah veľkostí signálu) môže byť dôležitý parameter napr. pri spracovaní audio signálov
 - urezanie signálu pri prekročení max. hodnoty je veľmi rušivé
 - používajú sa kompondéry (kompresor + expandér)
 - napr. „ μ law“ kompondér mapuje hodnoty pomocou funkcie $C(x)$, kde $x \in (-1,1)$

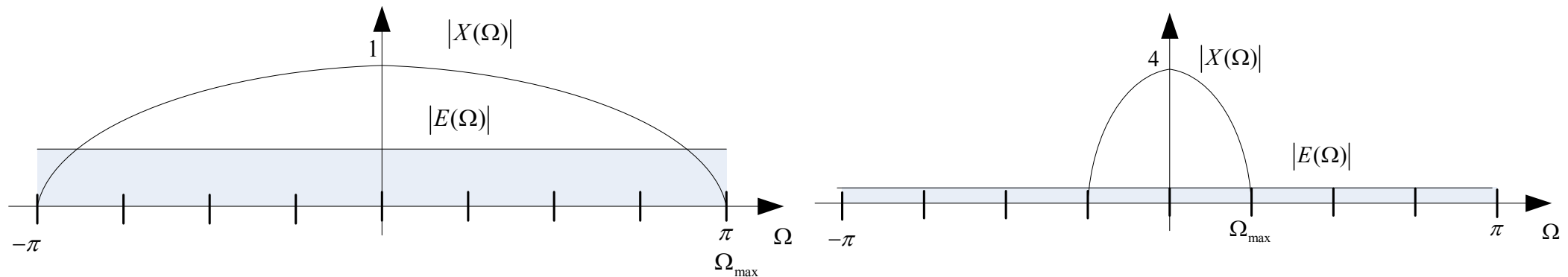
$$C(x) = \text{sign}(x) \frac{\ln(1 + \mu|x|)}{\ln(1 + \mu)}, \text{ obvykle } \mu = 255$$



- V spojení s rovnomerným 8 bitovým získavame také najmenšie Δ , aké by bolo pri 13 bit lineárnej kvantizácii (t.j. pri SNR máme zisk približne 30dB)

Vylepšenie A/D prevodu voľbou výrazne väčšej vzorkovacej frekvencie ako je potrebné (oversampling)

- Uvažujme – v signáli $x(t)$ chceme zachovať všetky frekvencie až po $f_{\max}$, avšak už pri $f_{\text{vz}}/2$ ich chceme úplne potlačiť. Toto pásmo prechodu $f \in (f_{\max}, f_{\text{vz}}/2)$ môže byť dosť úzke a obtiažne realizovateľné
- Spektrum kvantizačnej $E(\Omega)$ chyby je pri $f_{\max} \approx f_{\text{vz}}/2$ rozložené približne v rovnako širokom pásme ako $X(\Omega)$ (obrázok vľavo)



- Spektrum kvantizačnej $E(\Omega)$ chyby je pri $f_{\max} \ll f_{\text{vz}}/2$ rozložené v oveľa širšom pásme ako $X(\Omega)$ (obrázok vpravo)
- Spektrum $E(\Omega)$ medzi $f \in (\Omega_{\max}, \pi)$ už vieme digitálne (napr. v LDKI sústave) odfiltrovať
- SNR sa v prípade, že $f_{\max} = 4f_{\text{vz}}/2$ zlepšilo 4 násobne, teda o 6dB.
- Alternatívne sa nemusíme snažiť o zlepšovanie SNR, ale o zmiernenie požiadaviek na analógový filter - pásmo $f \in (f_{\max}, f_{\text{vz}}/2)$ je teraz oveľa širšie.

Vylepšenie A/D prevodu voľbou výrazne väčšej vzorkovacej frekvencie ako je potrebné (oversampling) – dokončenie

- Aby sme dostali $x(n)$ s pôvodne požadovanou vzorkovacou frekvenciou, je potrebné výsledok ešte „prevzorkovať“, t.j. zmeniť vzorkovací kmitočet → teória Systémov s rôznym taktovaním (angl. multirate systems)

Vylepšenie D/A prevodu voľbou výrazne väčšej vzorkovacej frekvencie ako je potrebné

- Celý postup môžeme otočiť
- Ak v číslicovej oblasti získame reprezentáciu signálu pri výrazne väčšej vzorkovacej frekvencii a použijeme napr. konštantný interpolátor, môžeme zväčšovať pásmo $f \in (f_{\max}, f_{\text{vz}} / 2)$ a tak uľahčiť návrh analógového filtra, ktorý má artefakty interpolácie obmedziť (potlačiť skokovú zmenu hodnôt)

Iné metódy AD prevodu?

- Čo ak máme k dispozícii prevodník, ktorý má menšiu presnosť, ale je veľmi rýchly?
- Vieme toto nejako využiť?
- Napr veľmi rýchly 1 bitový prevodník?

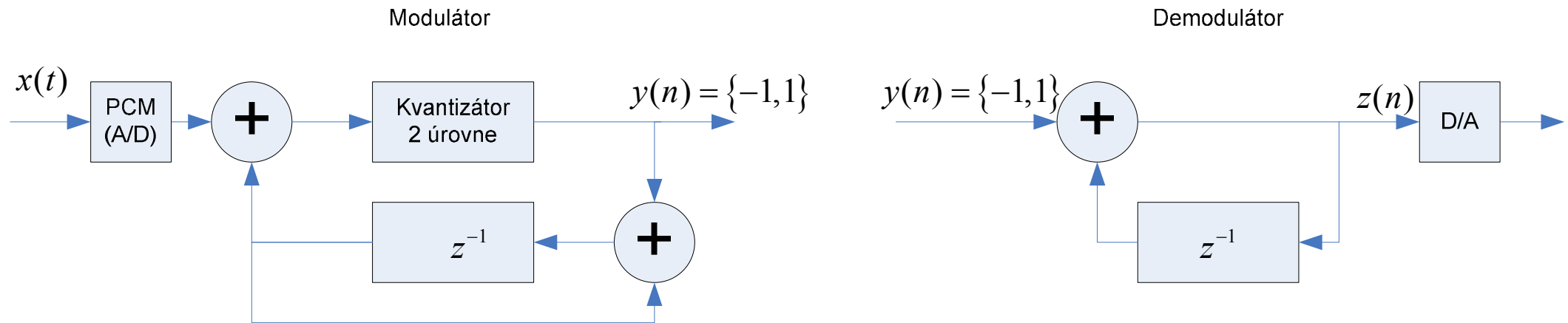
Čo je to PCM?

- Pulzne kódová modulácia
- Metóda prevodu spojitého signálu na diskretný. Je identická s vyššie uvedenou **základnou schémou A/D prevodu** (nie oversampling)
- Ak je použitá Lineárna kvantizácia jedná sa o Lineárnu PCM (LPCM)

Delta modulácia (Δ modulácia)

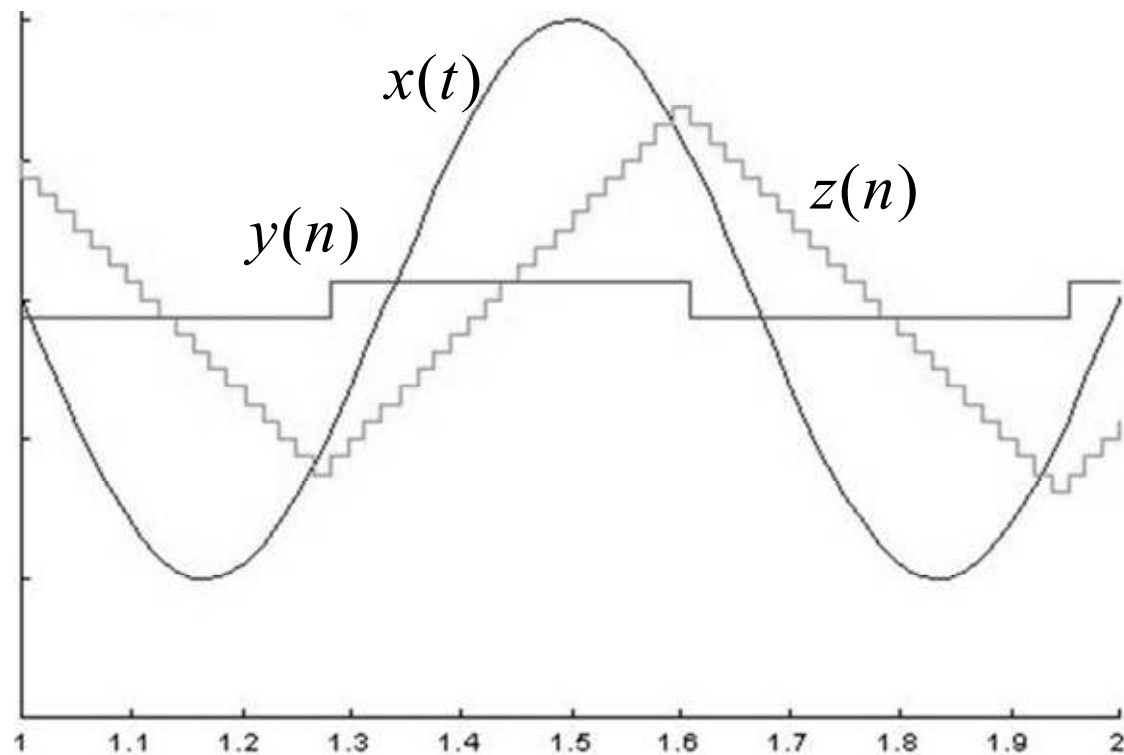
- Metóda A/D prevodu (najpopulárnejšia alternatíva)
- Je zároveň najjednoduchšou formou Diferenčnej PCM (DPCM) modulácie, kde sú kódované rozdiely medzi susednými vzorkami

Zjednodušený model delta modulácie (využívame A/D a D/A prevod ako componenty):



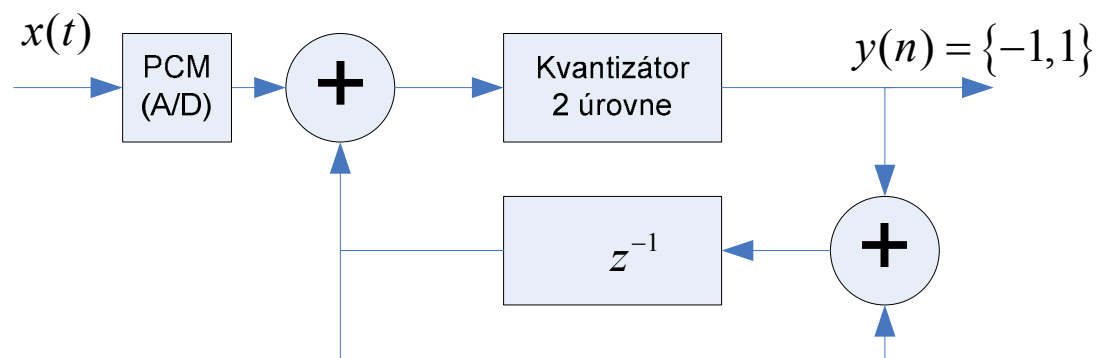
Riadna schéma delta modulácie modulácie používa integrator a 1 bit D/A prevodník.

Tvary signálov pri Delta modulácii:

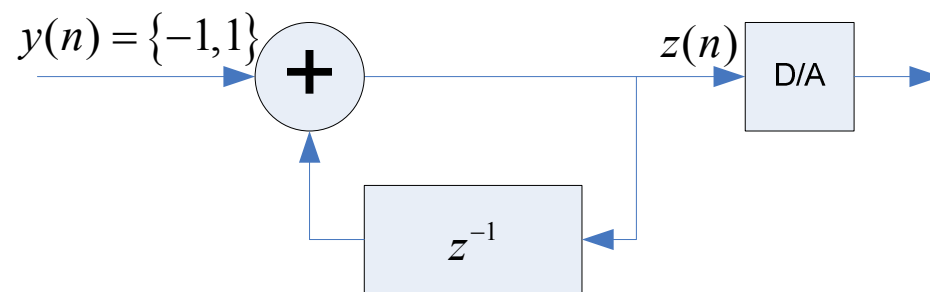


Kópia schémy z predchádzajúcej strany:

Modulátor



Demodulátor



Ďalšie modulácie používané v súvislosti a A/D a D/A prevodom:

ADPCM

- Adaptívna DPCM
- Variabilná veľkosť kvantizačného kroku
- Hodnota $y(n)$ je určená viacerými bitmi
- Hodnota kvantizačného kroku použitého pri ďalšej vzorke $x(t)$ je určená aktuálnou a prípadne predchádzajúcimi hodnotami $y(n)$

Sigma delta modulácia

- Masívne používaná metóda A/D, D/A prevodu v súčasnosti
- Používa viaceré triky z oblasti Multirate systémov (1 bitový A/D a D/A prevod, hrebeňové filtre, oversampling, princípy delta modulácie)
- Je príkladom toho, že na viaceré efektívne riešenia triviálnych problémov ako napr. AD/DA prevod si so základnými vedomosťami zo spracovania signálov nevystačíme.