

Laplaceova transformácia – ako súvisí s FT?

Evidentne

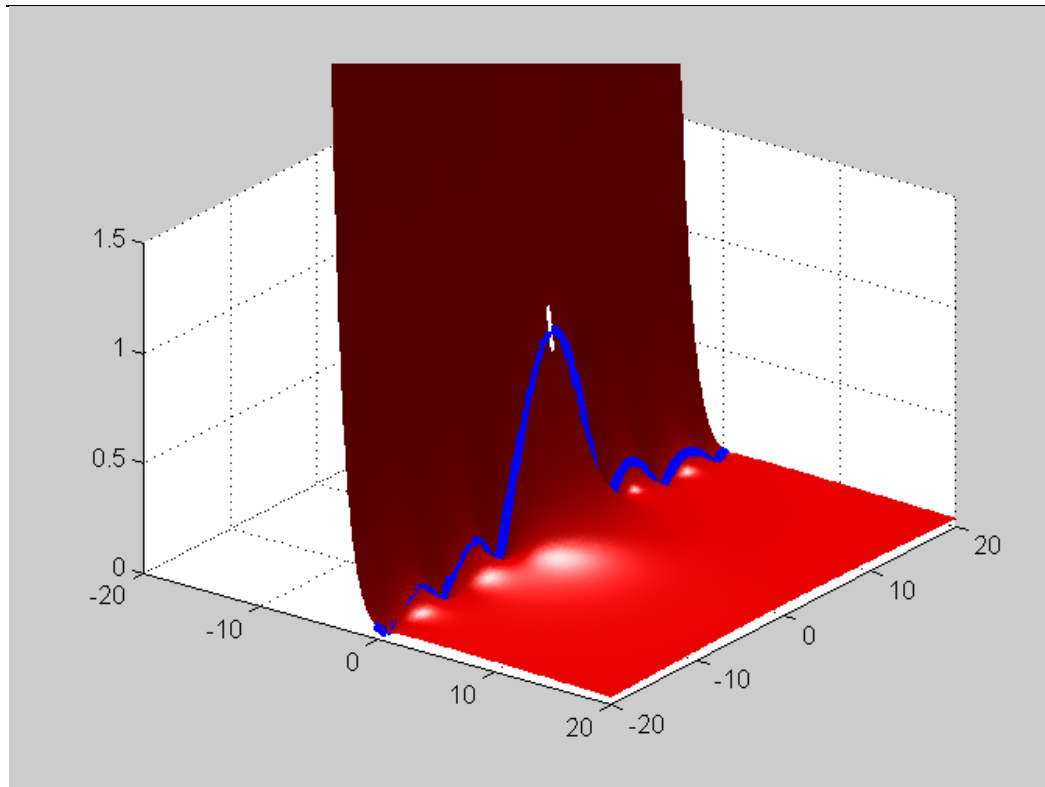
$$L\{x(t)\}_{p=j\omega} = FT\{x(t)\}$$

Laplaceova transformácia – príklad

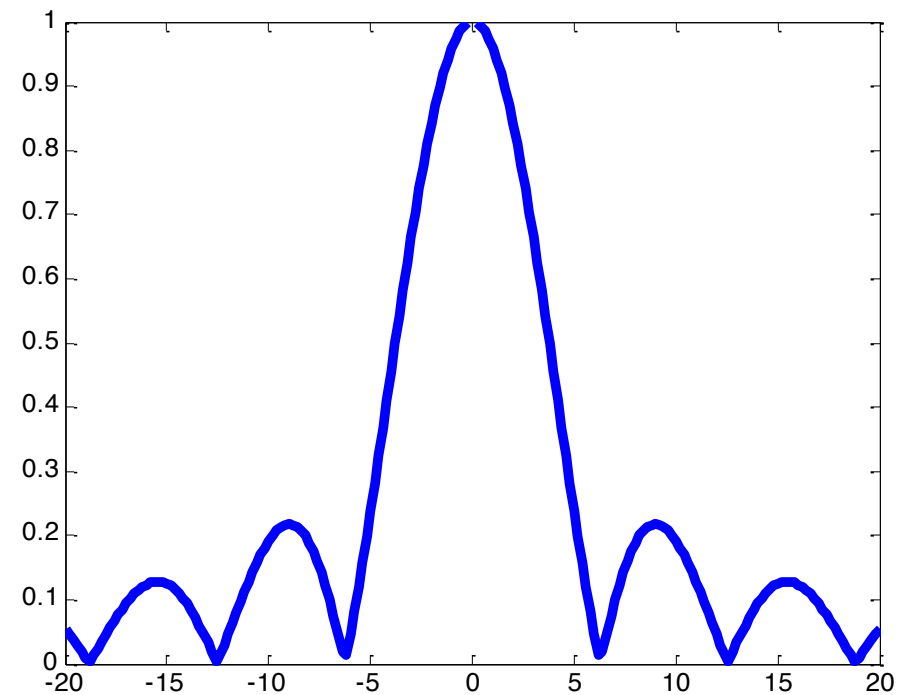
Nech $x(t) = \sigma(t) - \sigma(t - t_0)$, čomu sa rovná $X(p)$?

$$X(p) = L\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-pt} dt = \frac{1 - e^{-pt_0}}{p}$$

Ako vyzerá výsledná funkcia?



$|X(p)|$



$|X(\omega)|$

Laplaceova transformácia – súvis so Z transformáciou

$$L\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-pt} dt$$

Ideálne navzorkujme signál

$$x_v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_{vz})\delta(t - nT_{vz})$$

A spravme teraz z neho Laplaceovu transformáciu:

$$L\{x_v(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_{vz})\delta(t - nT_{vz})e^{-pt} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_{vz}) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_{vz})e^{-pt} dt$$

$$L\{x_v(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_{vz})e^{-pnT_{vz}}$$

Porovnajme to so Z transformáciou

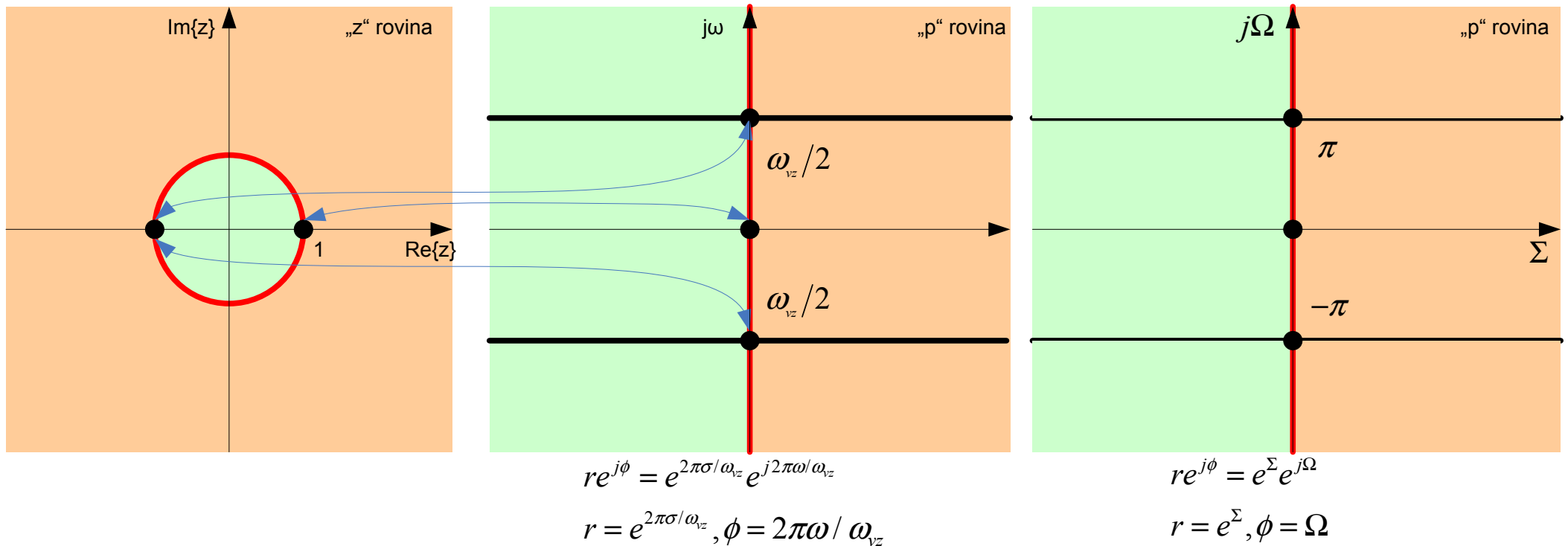
$$Z\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

T.j. z transformácia diskrétného signálu a Laplaceova transformácia ideálne navzorkovaného signálu s rovnakými mohutnosťami je to isté, keď

$$e^{-pnT_{vz}} = z^{-n} \rightarrow e^{pT_{vz}} = z$$

T.j. hodnota $Z\{x(n)\}$ v nejakom bode Z , je rovná hodnote $L\{x_v(t)\}$ v bode $e^{pT_{vz}}$

Platí: $Z = re^{j\phi}$ a $e^{pT_{vz}} = e^{(\sigma+j\omega)T_{vz}} = e^{\sigma T_{vz}} e^{j\omega T_{vz}} = e^{\sigma 2\pi/\omega_{vz}} e^{j\omega 2\pi/\omega_{vz}} = e^{\Sigma} e^{j\Omega}$



T.j. pri vzorkovaní signálu sa „p“ rovina speriodifikuje s periódou ω_{vz} na osi ω (resp. s periódou 2π na osi Ω) a hodnota Laplaceovej transformácie je rovná hodnote

Z transformácie uvedeným spôsobom. Napr. ak Z transformácia má nuly v hodnotách Z_i

potom Laplaceova transformácia má nuly v bodoch p_i pre ktoré $Z_i = e^{p_i T_{vz}}$

Súvis FT, DTFT, LT, ZT



Ako pomôže Laplaceova transformácia pri riešení LSKl sústav?

$$b_m \frac{d^m y(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} y(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 y(t) = a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 x(t)$$

Vo všeobecnosti sa riešenie skladá z dvoch častí: $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$, kde

- $y_1(t)$ je riešenie uvedenej rovnice **bez pravej strany**
- $y_2(t)$ je riešenie uvedenej rovnice **s pravou stranou**

Rovnicu riešme najprv bez pravej strany a použijeme Laplaceovu transformáciu:

$$b_m \frac{d^m y(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} y(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 y(t) = 0$$

$$b_m p^m Y(p) + b_{m-1} p^{m-1} Y(p) + \dots + b_0 Y(p) = 0$$

$$Y(p) \sum_k b_k p^k = 0$$

Charakteristická rovnica $\sum_{k=0}^m b_k p^k = 0$ má m koreňov $p_1, \dots, p_m$. Riešenie celej rovnice je následne

$$y_1(t) = \sum_{k=1}^m c_k e^{p_k t}$$

kde c_k sú konštanty vyplývajúce z počiatočných podmienok. Výsledkom je suma váhovaných komplexných spojitých špirál (viď slide 20 na predchádzajúcej prednáške).

Fyzikálne to predstavuje **vlastné kmity sústavy**.

Hľadáme riešenie s pravou stranou:

$$b_m \frac{d^m y(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} y(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 y(t) = a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 x(t)$$

$$b_m p^m Y(p) + b_{m-1} p^{m-1} Y(p) + \dots + b_0 Y(p) = a_n p^n X(p) + a_{n-1} p^{n-1} X(p) + \dots + a_0 X(p)$$

$$Y(p) \sum_k b_k p^k = X(p) \sum_k a_k p^k$$

$$Y(p) = X(p) \frac{\sum_k a_k p^k}{\sum_k b_k p^k} = X(p) H(p) \quad \rightarrow y(t) = h(t) * x(t)$$

Kde $H(p) = \frac{\sum_k a_k p^k}{\sum_k b_k p^k}$ sa nazýva **prenosová funkcia** sústavy. Výstup $y(t)$, ktorý získame sa nazýva

vnútená odozva. Prenosová funkcia sa zvykne ešte zapisovať aj v tvare, kde sú nuly a póly:

$$H(p) = \frac{\sum_k a_k p^k}{\sum_k b_k p^k} = M \frac{\prod_{k=1}^n (p - z_k)}{\prod_{k=1}^m (p - p_k)}, \quad M = \frac{a_n}{b_m} \quad z_k - \text{nuly}, \quad p_k - \text{póly}$$

Signál $h(t) = L^{-1} \{H(p)\}$ sa nazýva **impulzová charakteristika** sústavy lebo je identický s odpoveďou sústavy na jednotkový impulz (Diracov):

ak $x(t) = \delta(t)$ potom $X(p) = 1$ a $Y(p) = H(p)$, resp. $y(t) = L^{-1} \{H(p)\} = h(t)$.

Úplne riešenie diferenciálnej rovnice je teda:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = \sum_{k=1}^M c_k e^{p_k t} + h(t) * x(t)$$

Ak majú všetky vlastné kmity „doznievajúci charakter“, t.j. $\sigma_k < 0$, výsledná odozva bude daná iba vnútenou odozvou, ktorá dominuje (tzv. **dominantná podmienka**). Potom $y(t) = h(t) * x(t)$.

Vlastnosti LDKI,LSKI sústavy = vlastnosti prenosovej funkcie $H(z), H(p)$ resp. vlastnosti impulzovej charakteristiky $h(n), h(t)$.

Ak chceme zistiť vlastnosti sústavy z hľadiska frekvencie, budú nás zaujímať „**frekvenčné charakteristiky**“ sústavy, teda $H(\Omega), H(\omega)$.

$$H(z) \xrightarrow{z=e^{j\Omega}} H(\Omega)$$

$$H(p) \xrightarrow{p=j\omega} H(\omega)$$

Lineárna Pri frekvenčných charakteristikách nás zaujíma **modulová (magnitúdová)** charakteristika M a **fázová** charakteristika ϕ :

$$H(\Omega) = |H(\Omega)| e^{j\phi(\Omega)} = M(\Omega) e^{j\phi(\Omega)}$$

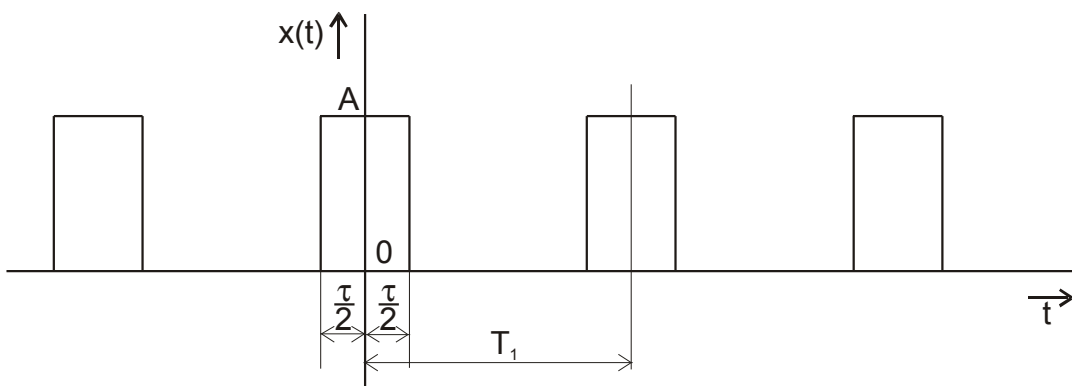
$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\phi(\omega)} = M(\omega) e^{j\phi(\omega)}$$

Dôležité:

- Pri modulovej charakteristike: nuly a póly
- Pri fázovej charakteristike: linearita fázovej charakteristiky

Príklad 1:

Na vstup LSKÍ s $h(t) = \delta(t - t_0)$ privedieme periodický signál $x(t)$



kde $T_1 = 2\tau$ a $T_1 = 1$ Čo je na výstupe?

Riešenie:

keďže platí $y(t) = h(t) * x(t)$ evidentne na výstupe bude $x(t - t_0)$, t.j. vstupný signál oneskorený o

t_0 . Analyzujme podrobnejšie, čo sa deje v sústave. Spravme FR zo signálu $x(t)$: $X_k = \frac{A}{2} \text{si}(k\pi / 2)$

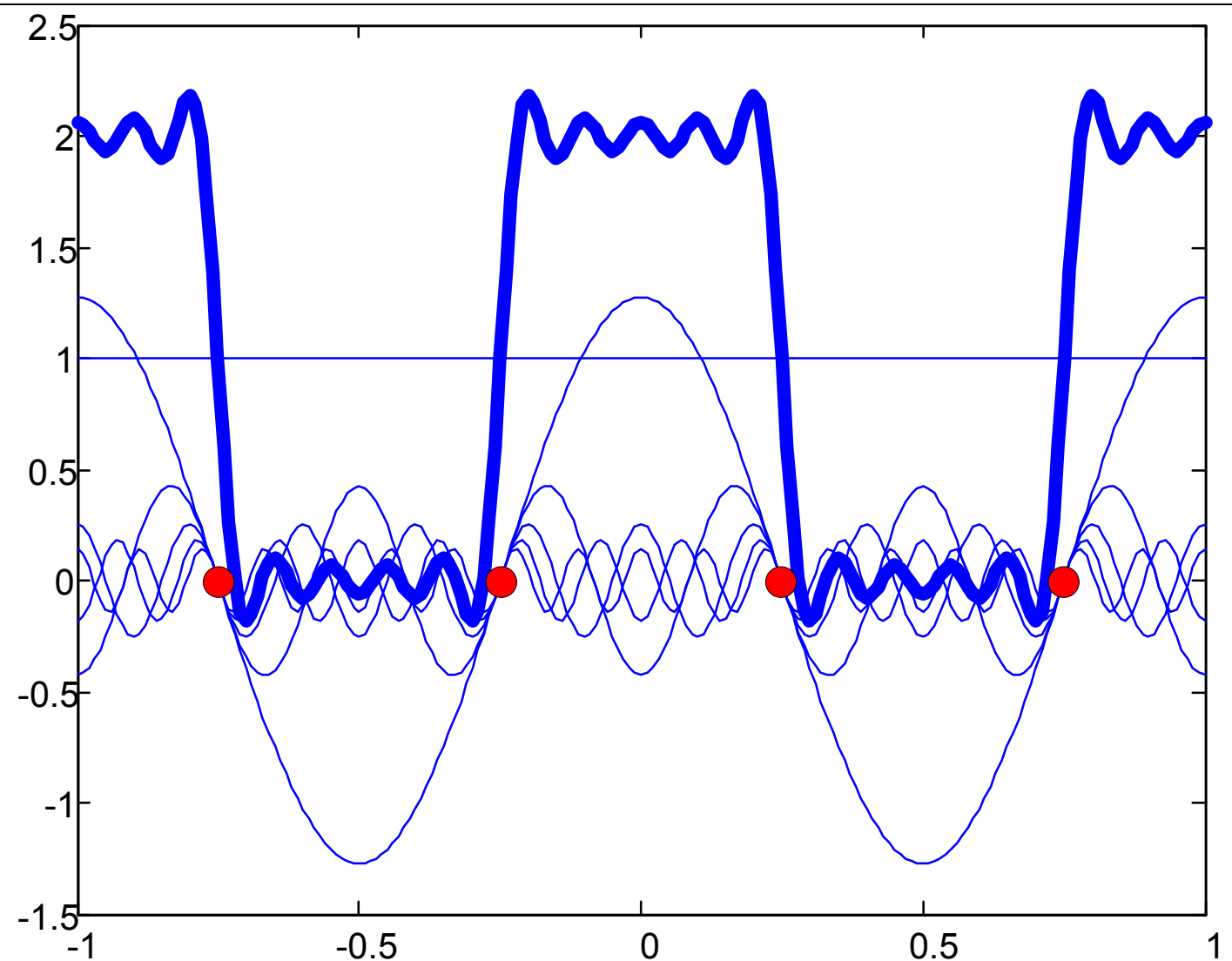
t.j. $x(t) = \sum_k X(k) e^{jk\omega_1 t}$, kde $\omega_1 = 2\pi / T_1 = 2\pi$. Nakreslime si z čoho je vyskladávaný vlastne signál $x(t)$:

```

k=1:1:10
xk=sinc(k/2);
t=-1:0.01:1;
myones=ones(1,size(t,2));
xt=2*(transpose(xk)*myones).*(cos(
2*pi*transpose(k)*t))
fix=1+sum(xt,1)

plot(t,fix, 'LineWidth',4);hold on
plot(t,myones);hold on
plot(t,xt(1,:));hold on
plot(t,xt(3,:));hold on
plot(t,xt(5,:));hold on
plot(t,xt(7,:));hold on
plot(t,xt(9,:));hold on

```



Vidíme, že jednotlivé harmonické zložky signálu (t.j. “harmonické”) sú “vo faze” v označených bodoch a tak dokážu vyskladať požadovaný tvar výsledného signálu v čase.

Do sústavy vchádza naraz teda veľa špirál (harmonických frekvencií) a sústava sa ku každej jednej z nich nejako správa. Ak signal oneskorí o t_0 musí o t_0 oneskoriť každú špirálu.

Platí: $x(t-t_0) \xleftrightarrow{FR} X_k e^{-jk\omega t_0}$, t.j. ak chceme dostať signal posunutý o t_0 potrebujeme spektrum násobiť postupnosťou o jednotkovej veľkosti s lineárne klesajúcou fázou.

Čo táto postupnosť robí?

Platí: $x(t) = \sum_k X(k) e^{jk\omega t}$ t.j. $x(t-t_0) = \sum_k X(k) e^{-jk\omega t_0} e^{jk\omega t} = \sum_k X(k) e^{jk\omega(t-t_0)}$

Vidíme, že pri rekonštrukcii teraz skladáme špirály všetky posunuté o t_0 . Čo ale keby fáza v postupnosti neklesala lineárne? Čo keby klesanie spomaľovalo?

→ Špirály by začali “predbiehať” svoju riadnu polohu, mali by iné “fázové oneskorenie” – signal by sa zdeformoval !

Podobný príklad sa dá skonštruovať aj pre neperiodické a diskkrétne signály

Definícia fázového oneskorenia:

$$\nu_f = -\frac{\phi(\omega)}{\omega}$$

- Definuje, ako sústava oneskorí fázu pri danej frekvencii

Definícia skupinového oneskorenia:

$$\nu_s = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega}$$

- Charakterizuje oneskorenie fáze pre (spojitú) skupinu frekvencií.

Poznámky:

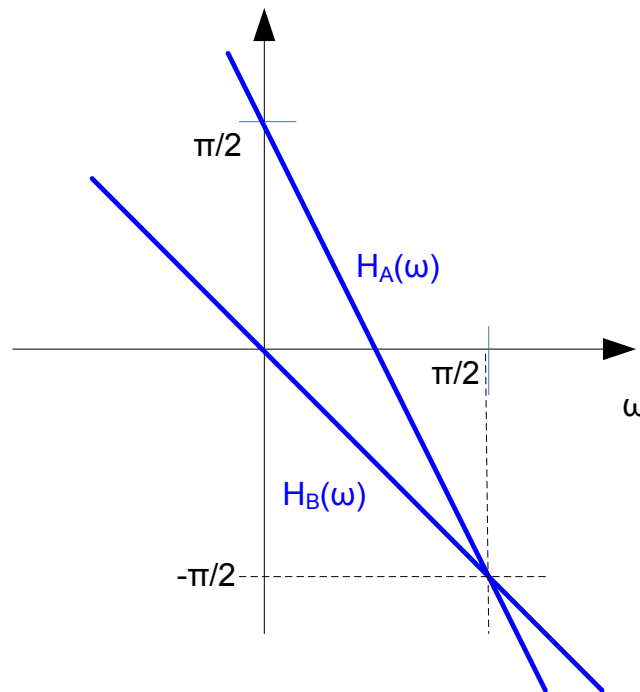
- Ak sústava nemá porušiť vzájomné fázové pomery pri rôznych frekvenciách (a tým tvar resp. „obálku“ výsledného signálu):
 - fázové oneskorenie musí byť pre všetky frekvencie, ktoré signál obsahuje konštantné
 - resp. skupinové oneskorenie musí byť pre všetky oblasti frekvencií, ktoré signál obsahuje konštantné
- Toto je automaticky splnené ak $\phi(\omega)$, resp. $\phi(\Omega)$ je lineárne

Otázka: je teda dôležitá hodnota $\phi(\omega)$ alebo derivácia tejto hodnoty? Nie je to spor?

- Nie.
- Hodnota $\phi(\omega)$ je dôležitá ak ovplyvňujeme len jednu frekvenciu (vtedy nepotrebujeme pojem tvar/obálka, žiadne frekvencie neiteraguju)
- Hodnota zmeny $\phi(\omega)$ je dôležitá ak ovplyvňujeme viacero frekvencií, ktorých interakciou vzniká nejaký tvar/obálka frekvencie iteragujú

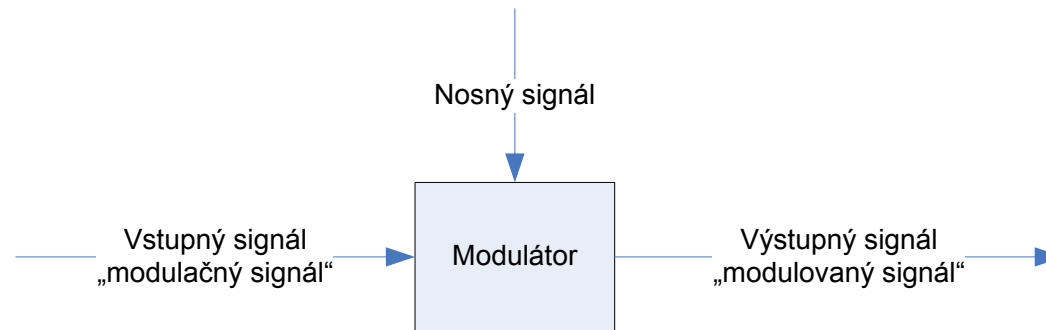
Príklad 2 (Na doma):

Aký bude výstup ak do sústav A a B s frekvenčnou charakteristikou $H_A(\omega) = e^{j(\pi/2-2\omega)}$ $H_B(\omega) = e^{-j\omega}$ pustíme a) signal $x(t) = e^{j\pi/2}$ b) signal z príkladu 1, pri $T=4$?



Príklady spojitých systémov – modulátory

- V systéme sa vykoná modulácia t.j. typicky preloženie vstupného signálu vo frekvencii do iného „preloženého“ pásma.
- Proces, ktorý modulátor vykonáva sa nazýva „**modulácia**“ (opačný proces je **demodulácia**)



Druhy modulácií (opakovanie z predmetu telekomunikačná technika):

1. Analogové – nosný signál je spojitý - harmonický
 - a. Amplitúdové (AM)
 - b. uhlové
 - i. fázová (PM)
 - ii. frekvenčná (FM)
2. Pulzné – nosný signál má charakter impulzov
 - a. Pulzne amplitúdová (PAM)
 - b. Pulzne polohová (PPM)
 - c. Pulzne šírková (PŠM)

Amplitúdová modulácia (AM)

Nosný signál je harmonický:

$$n(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

A – amplitúda

ω_0 – uhlová frekvencia (konštantná)

ϕ – fáza (konštantná)

Modulačný proces:

- Meníme amplitúdu nosného signálu: $A \longrightarrow A + c(t)$
- Kde $c(t)$ je vstupný (modulačný signál)
- Označme výstupný signál ako $s(t)$

Jednoduchý príklad:

$$c(t) = V \cos(\omega_c t)$$

$$n(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi), \quad \phi = 0 \text{ kvôli zjednodušeniu}$$

$$s(t) = ? \xleftrightarrow{FT} S(\omega) = ?$$

$$s(t) = (A + V \cos \omega_c t) \cos(\omega_0 t)$$

$$s(t) = (A + V \cos \omega_c t) \cos(\omega_0 t) = A(\cos(\omega_0 t) + \frac{V}{A} \cos \omega_c t \cos(\omega_0 t)) = A(\cos(\omega_0 t) + m \cos \omega_c t \cos(\omega_0 t))$$

, kde $m = \frac{V}{A}$ je index (hlĺbka, modulačný index) amplitúdovej modulácie

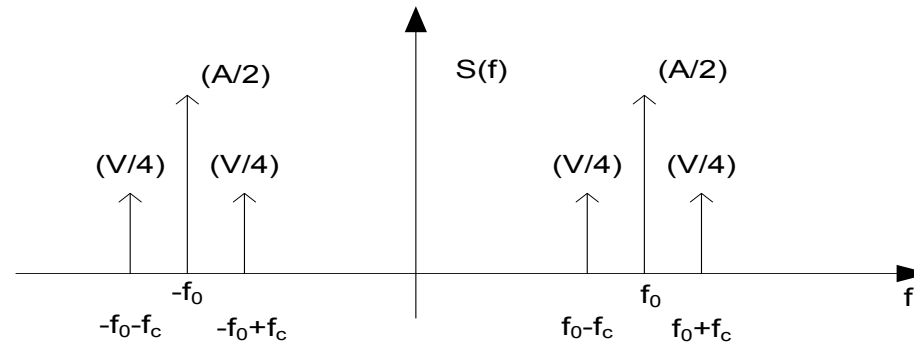
$$s(t) = A \cos(\omega_0 t) + \frac{V}{2} \{ \cos(\omega_0 + \omega_c)t + \cos(\omega_0 - \omega_c)t \}$$

pri odvodení použité: $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$, $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$

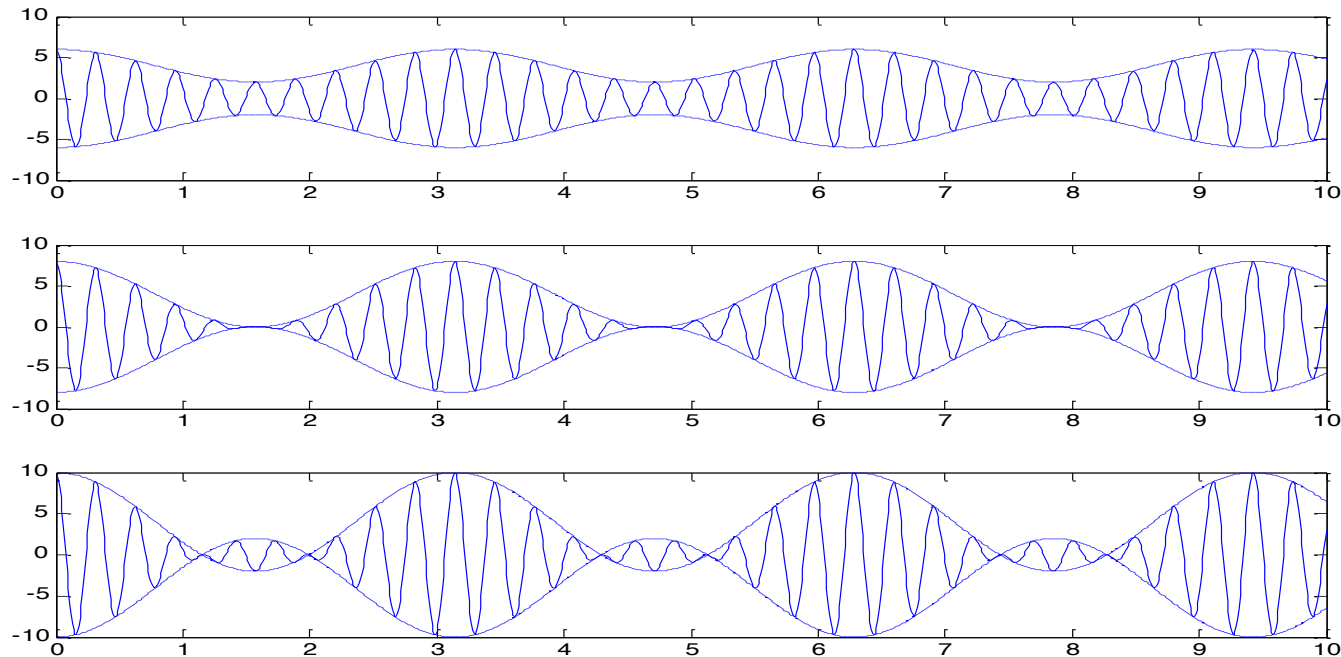
Aké spektrum odpovedá signálu $s(t) = A \cos(\omega_0 t) + \frac{V}{2} \{ \cos(\omega_0 + \omega_c)t + \cos(\omega_0 - \omega_c)t \}$?

$$s(t) = ? \xleftrightarrow{FT} S(\omega) = ? \text{ Resp. } s(t) = ? \xleftrightarrow{FT} S(f) = ?$$

$$\text{Vieme, že } \cos \omega_0 t \xleftrightarrow{FT} \pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi \delta(\omega + \omega_0), \text{ resp. } \cos(2\pi f_0 t) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{2} \delta(f - f_0) + \frac{1}{2} \delta(f + f_0)$$



Ako vyzerá signal $s(t)$ pri rôznych hĺbkach modulácie signálu? Príklad: zhora dole: $m=0.5$, $m=1$, $m=1.5$ (signal je “premodulovaný”)

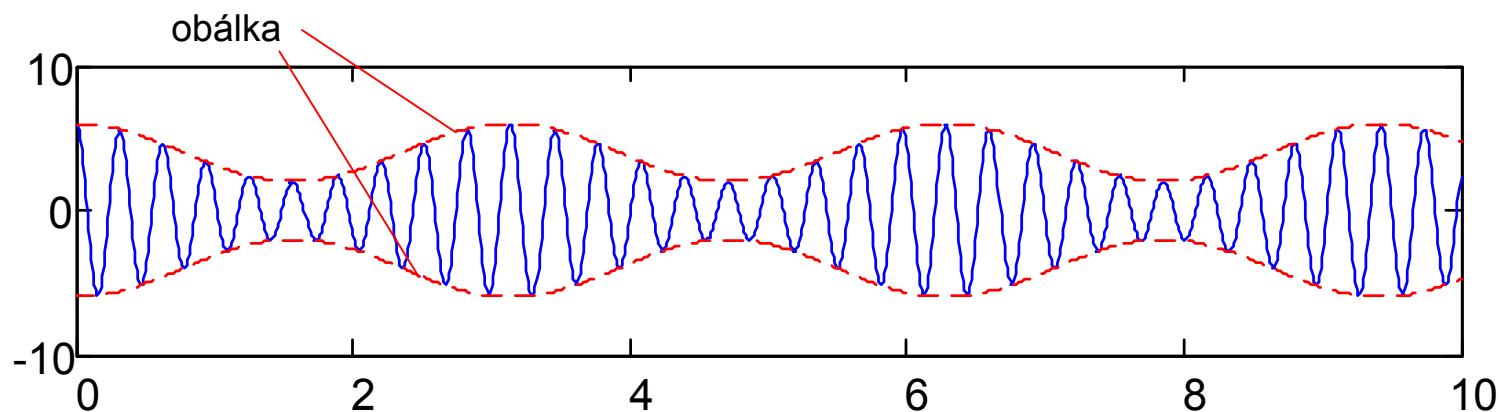


Čo je to “obálka” signálu?

Obálka sú 2 hraničné čiary ktoré ohraničujú (obaľujú) zmenené hodnoty nosného signálu, keď sú nakreslené v závislosti od času. V prípade AM:

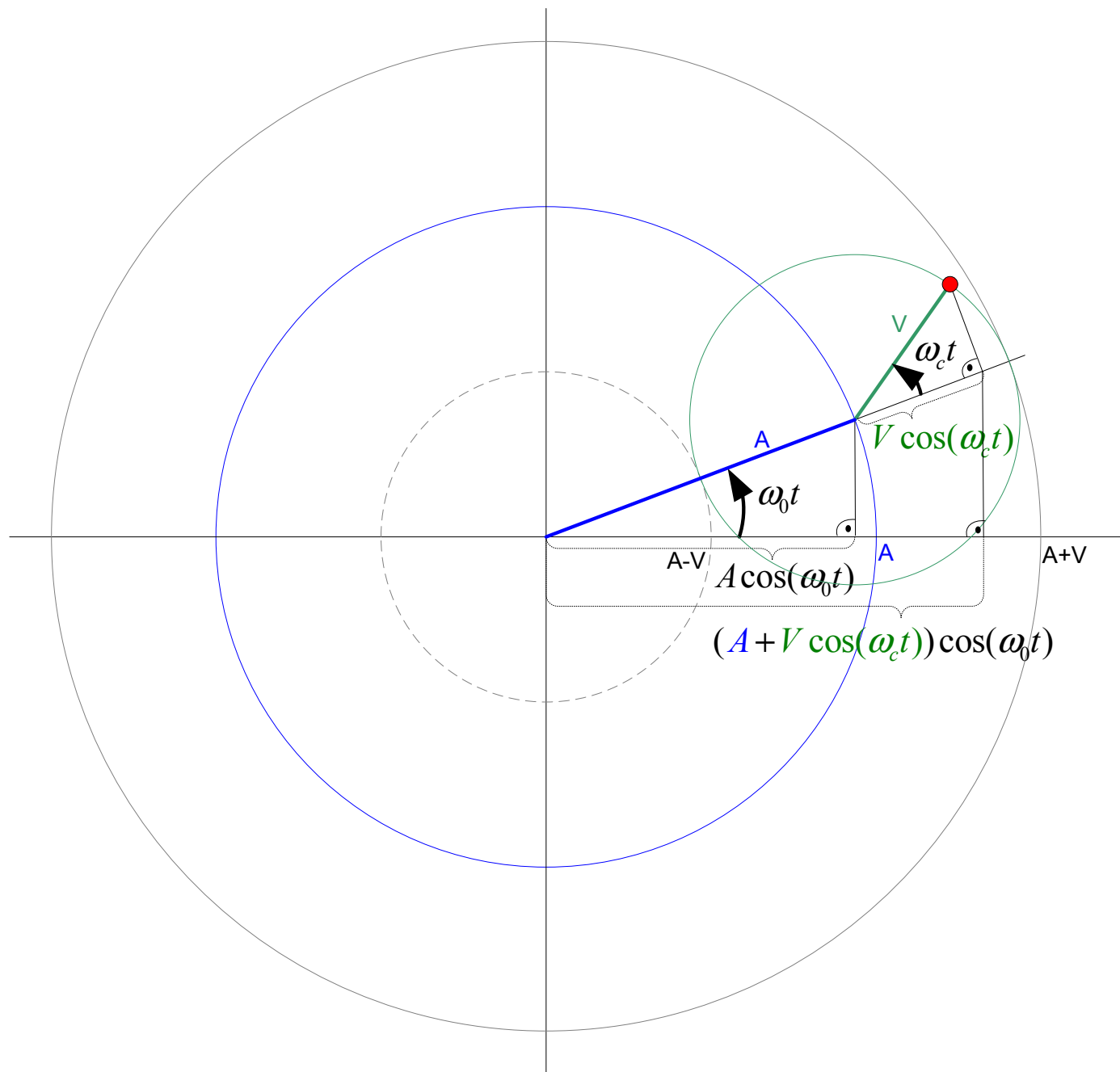
$$a(t) = A + c(t)$$

$$-a(t) = -(A + c(t))$$



Geometrické zobrazenie toho, čo sa vlastne deje pri AM

$$s(t) = (A + V \cos \omega_c t) \cos(\omega_0 t)$$



Zovšeobecnenie:

$$c(t) \xleftrightarrow{FT} C(\omega)$$

$$s(t) = ? \xleftrightarrow{FT} S(\omega) = ?$$

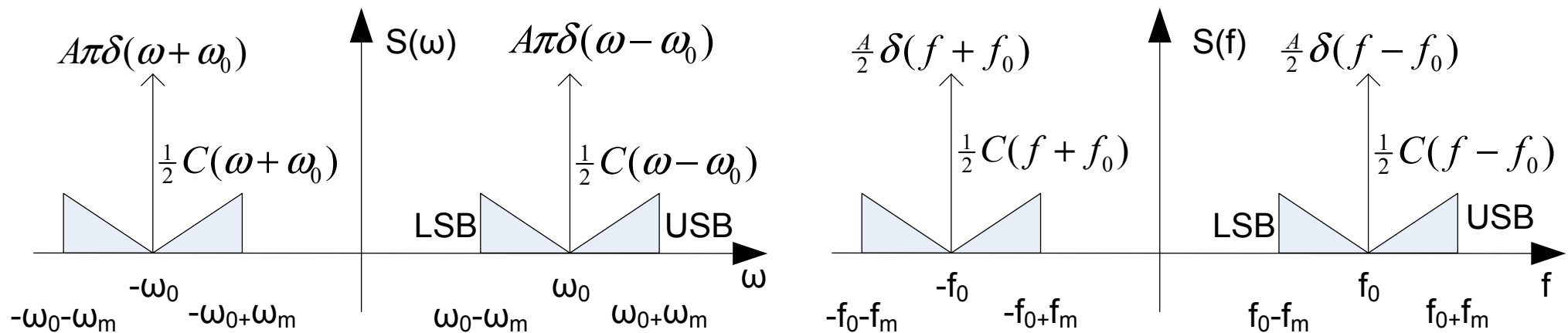
$$s(t) = (A + c(t)) \cos(\omega_0 t) = A \cos(\omega_0 t) + c(t) \cos(\omega_0 t) = s_1(t) + s_2(t)$$

$$S(\omega) = S_1(\omega) + S_2(\omega)$$

$$S_1(\omega) = \pi \frac{A}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

$$S_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} c(t) \cos(\omega_0 t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} c(t) \left[\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} \right] e^{-j\omega t} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [c(t) e^{j\omega_0 t}] e^{-j\omega t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [c(t) e^{-j\omega_0 t}] e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2} C(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} C(\omega + \omega_0)$$



Postranné pásma:

- LSB-Lower Side Band
- USB=Upper Side Band

Výkonové pomery pri AM

Aká časť výkonu výstupného signálu $s(t)$ je sústredená v nosnej a aká časť v postranných pásmach?

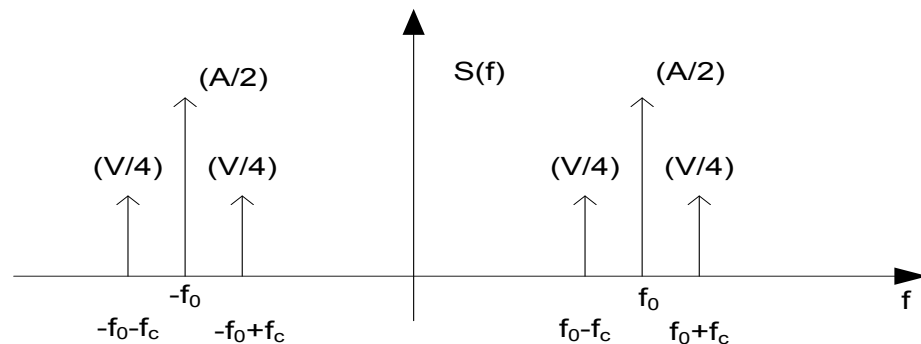
Jednoduchý prípad:

$$s(t) = (A + V \cos \omega_c t) \cos(\omega_0 t)$$

Pre signal vyjadrený pomocou FR platí:

$$P_s = C_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|C_n|^2$$

My sme si vyjadrili jeho spektrum pomocou FT:



Vieme, že hodnoty diracov pri FT, sú rovné hodnotám jednotlivých C_n pri FR. Teda môžeme písať:

$$P_s = 2 \left[\left(\frac{A}{2} \right)^2 + 2 \left(\frac{V}{4} \right)^2 \right] = \frac{A^2}{2} + \frac{V^2}{4}$$

T.j. aj pri 100% modulácii ($V=A$) je 2/3 výkonu vymrhaných na nosnú frekvenciu.

Zovšeobecnenie:

$$s(t) = (A + c(t)) \cos(\omega_0 t) = A \cos(\omega_0 t) + c(t) \cos(\omega_0 t) = s_1(t) + s_2(t)$$

Rátajme výkon v čase podľa definície:

$$P_s = \frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T [(s_1(t) + s_2(t))]^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T s_1^2(t) dt + \frac{1}{T} \int_0^T 2s_1(t)s_2(t) dt + \frac{1}{T} \int_0^T s_2^2(t) dt = P_n + 0 + 2P_p$$

Kde

$$P_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s_1(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} [A \cos(\omega_0 t)]^2 dt = \dots = \frac{A^2}{T_0} \left[\frac{T_0}{2} + \frac{1}{4\omega_0} \sin \frac{4\pi T_0}{T_0} \right] = \frac{A^2}{2}$$

$$2P_p = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s_2^2(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} [(c(t) \cos(\omega_0 t))]^2 dt \stackrel{!}{=} \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} [\cos(\omega_0 t)]^2 dt \int_0^{T_0} [c(t)]^2 dt = \frac{1}{T_0} \frac{1}{2} \int_0^{T_0} [c(t)]^2 dt = \frac{1}{2T_0} \overline{c^2(t)}$$

$$0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} 2s_1(t)s_2(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} A c(t) \cos^2(\omega_0 t) dt \stackrel{!}{=} \frac{A}{T_0} \int_0^{T_0} c(t) dt \int_0^{T_0} \cos^2(\omega_0 t) dt = \frac{A}{T_0} 0 \frac{1}{2} = 0$$

Poznámka (!): Pri odvodzovaní bola použitá vlastnosť integrovania cez periódu resp. násobok periódy harmonického signálu, resp. periodických signálov zložených z týchto harmonických signálov.

Nosný kmitočet nemusíme potrebovať (neprenáša informáciu) – zbytočne mrháme výkon, radi by sme ho potlačili => AM s potlačenou nosnou

AM s potlačenou nosnou

Double SideBand - Suppressed Carrier (DSB-SC).

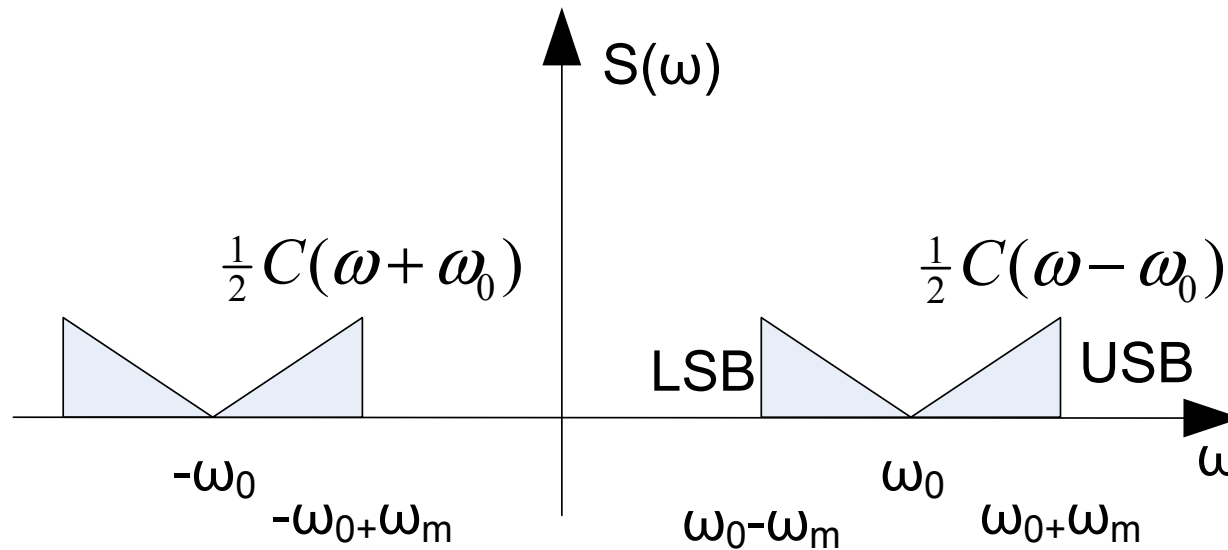
Výhody oproti AM

- ušetrilo sa viac ako polovica výkonu (nosná a nevysielané postranné pasmo)

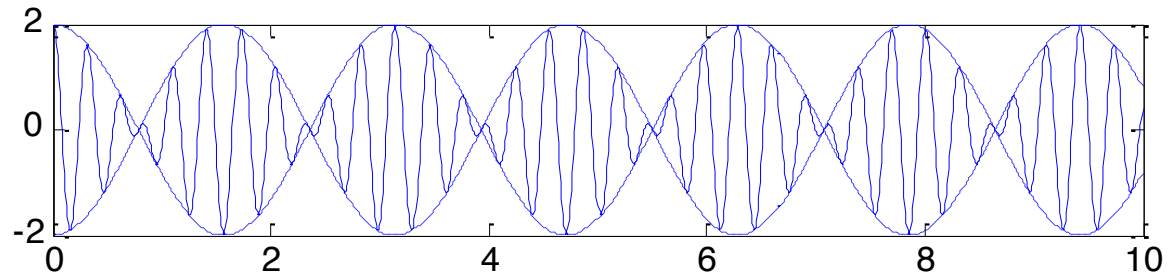
Cena:

- zvýšená zložitosť a problematickejšie naladenie demodulátora (chýba nosná) oproti AM

$A=0$, potom $s(t) = (0 + c(t))\cos(\omega_0 t) = 0\cos(\omega_0 t) + c(t)\cos(\omega_0 t) = 0 + s_2(t)$



Tvar spektra:



Príklad: $s(t) = (0 + 2 \cos 2t) \cos(20t)$

SSB resp. SSB-SC

Single SideBand resp. Single SideBand Suppressed Carrier (DSB-SC) – označujú to isté

Ak chceme optimalizovať ešte ďalej – stačí zachovať iba jedno postranné pásmo

Výhody oproti AM:

- ušetrilo sa viac ako polovica výkonu (nosná a nevysielané postranné pasmo)
- zaberáme polovičné frekvenčné pásmo

Cena:

- zvýšená zložitosť modulátora oproti DSB-SC

Napr. Ak sa zachová len USB, situácia je nasledovná:

