

Opakovací slide z minulej prednášky

Signály – operácie

- Základné operácie: +, -, *, /, $\overline{x(t)}$, $|x(t)|$, urychlenie, spomalenie, posun signalov, otočenie signálov...
- Pokročilé operácie

Operácia	Vysledok	SN signály	DN signály
Skalárny súčin $\langle, \rangle$	Číslo	$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \bar{g}(t) dt$	$\langle f(n), g(n) \rangle = \sum_n f(n) \bar{g}(n)$
Korelácia $R_{x,y}$	Funkcia	$R_{x,y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \bar{g}(\tau - t) d\tau$	$R_{x,y}(n) = \sum_k f(k) \bar{g}(k - n)$
Konvolúcia $f * g$	Funkcia	$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \bar{g}(t - \tau) d\tau$	$(f * g)(n) = \sum_k f(k) \bar{g}(n - k)$

- periodické signály: výsledok môžeme počítať pre jednu periódu súčinu funkcií
- Platí $\langle x, y \rangle = R_{x,y}(0)$
- $R_{x,x}$ (autokorelácia) je symetrická funkcia okolo bodu 0

Nová látka

Ďalšie postupy ako popísať signál

- existencia nosiča
- priestor, kam signál patrí

Čo je nosič signálu?

- Interval, kde má signál nenulového hodnoty.
- Kompaktný nosič – mimo nosiča má signál presne nulové hodnoty
- Efektívny nosič – mimo nosiča má signál prílišne nulové (zanedbateľne malé) hodnoty

Signály a Priestory

Označenie	Podmienka	Popis
$L^p(R)$	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) ^p dt < \infty$	Ak $p=1$: Priestor všetkých absolútne integrovateľných spojitých funkcií Ak $p=2$: Priestor všetkých po štvorcoch integrovateľných spojitých funkcií ...
$L^p([a, b])$	$\int_a^b f(t) ^p dt < \infty$	Priestor všetkých p integrovateľných spojitých funkcií na intervale
$l^p(Z)$	$\sum_{-\infty}^{\infty} f(n) ^p < \infty$	Ak $p=1$: Priestor všetkých absolútne sumovateľných diskrétnych funkcií Ak $p=2$: Priestor všetkých po štvorcoch sumovateľných diskrétnych funkcií ...
C^N, R^N		Priestor všetkých N rozmerných vektorov nad polom C , alebo R .

Signál/operácia

Signál/operácia	Charakteristika
$\delta(t)$	Absolutne integrovateľný, nie je integrovateľný po štvorcoch
$si(t)$	Nie je absolútne integrovateľná, je integrovateľná po štvorcoch $\int_{-\infty}^{\infty} si(t)dt = \pi = \int_{-\infty}^{\infty} si^2(t)dt$ Poznámka:
$\sin(t), \cos(t), e^{jt}, a$	Nie su absolútne integrovateľné ani po štvorcoch
Skalárny súčin, konvolúcia, korelácia	Funkcie musia patriť $L^2(R)$, $l^2(Z)$ resp. C^N, R^N . Vieme však vyrobiť aj definície fungujúce na periodické signály.

Harmonický signál

je to základný prostriedok na zodpovedanie otázky, či analyzovaný signál nejakú "frekvenciu" obsahuje, alebo neobsahuje

Komplexný tvar harmonického signálu

Uvažujme signál $s(t)$ ako komplexnú funkciu času, pre ktorý platí

$$s(t) = Ae^{j(\omega_0 t + \varphi)} = A \cos(\omega_0 t + \varphi) + jA \sin(\omega_0 t + \varphi) = x(t) + jy(t) \quad (3.1)$$

Funkcie $x(t)$ a $y(t)$ sú reálne funkcie času, pričom $x(t)$ je **sufázová** a $y(t)$ **kvadrátová** zložka signálu $s(t)$

Reálny tvar harmonického signálu

Sufázová zložka $x(t)$ zo vzťahu (3.1) reprezentuje reálny, technicky realizovateľný signál, pre ktorý platí

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi) = A \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right) \quad (3.2)$$

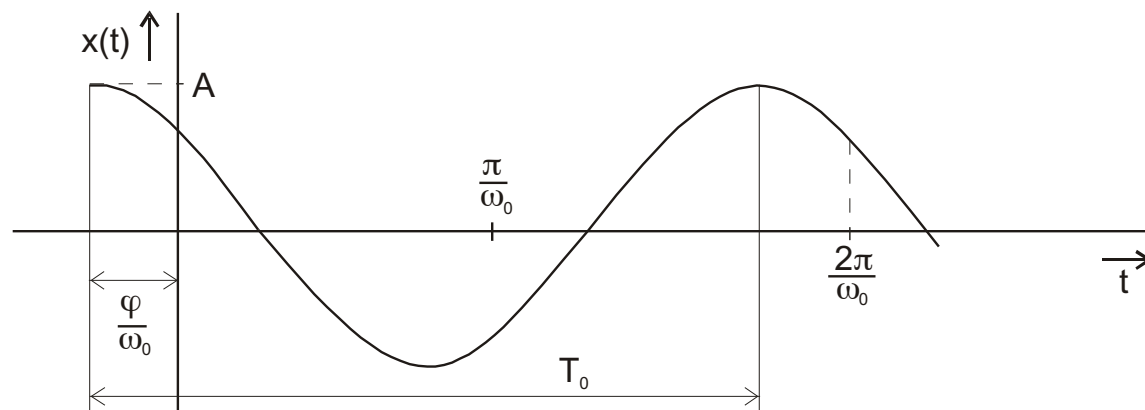
kde

φ je počiatočná fáza (pre $t = 0$)

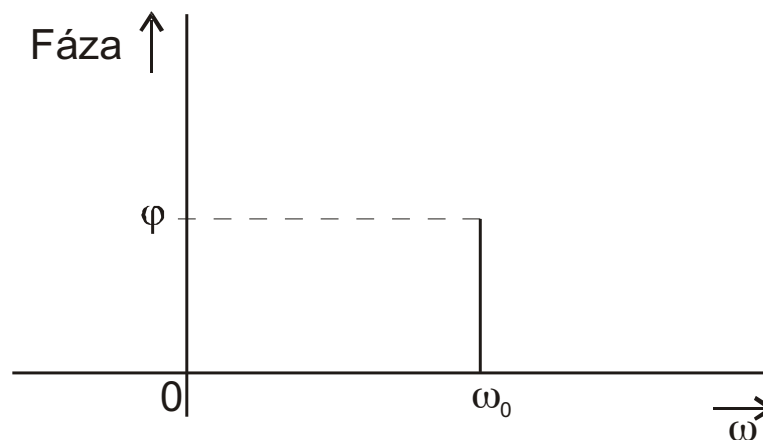
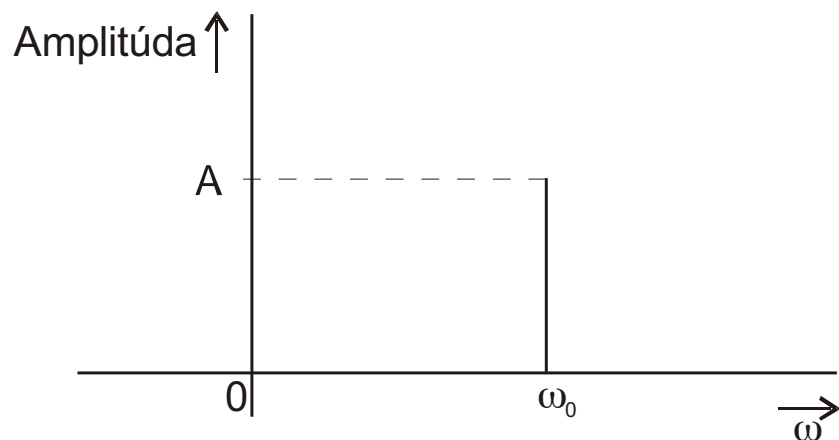
ω_0 je kruhová frekvencia

T_0 je perióda signálu

Grafické znázornenie signálu v časovej oblasti:



Reprezentácia signálu je vo frekvenčnej/kmitočtovej oblasti = spektrum.
Grafická reprezentácia uvedeného signálu vo frekvenčnej oblasti (grafické znázornenie jeho spektra):



Zo vzťahu (3.2) je zrejmé, že harmonický signál je jednoznačne definovaný svojou amplitúdou A , kruhovou frekvenciou ω_0 a počiatočnou fázou φ .

Reálny tvar harmonického signálu - súčtový

Úpravou vzťahu (3.2) pre reálnu zložku signálu $x(t)$ dostaneme

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) = A \cos \varphi \cos \omega_0 t - A \sin \varphi \sin \omega_0 t = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t \quad (3.3)$$

kde

$$\begin{aligned} a &= A \cos \varphi \\ b &= -A \sin \varphi \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$a^2 + b^2 = A^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = A^2 \Rightarrow A = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (3.5)$$

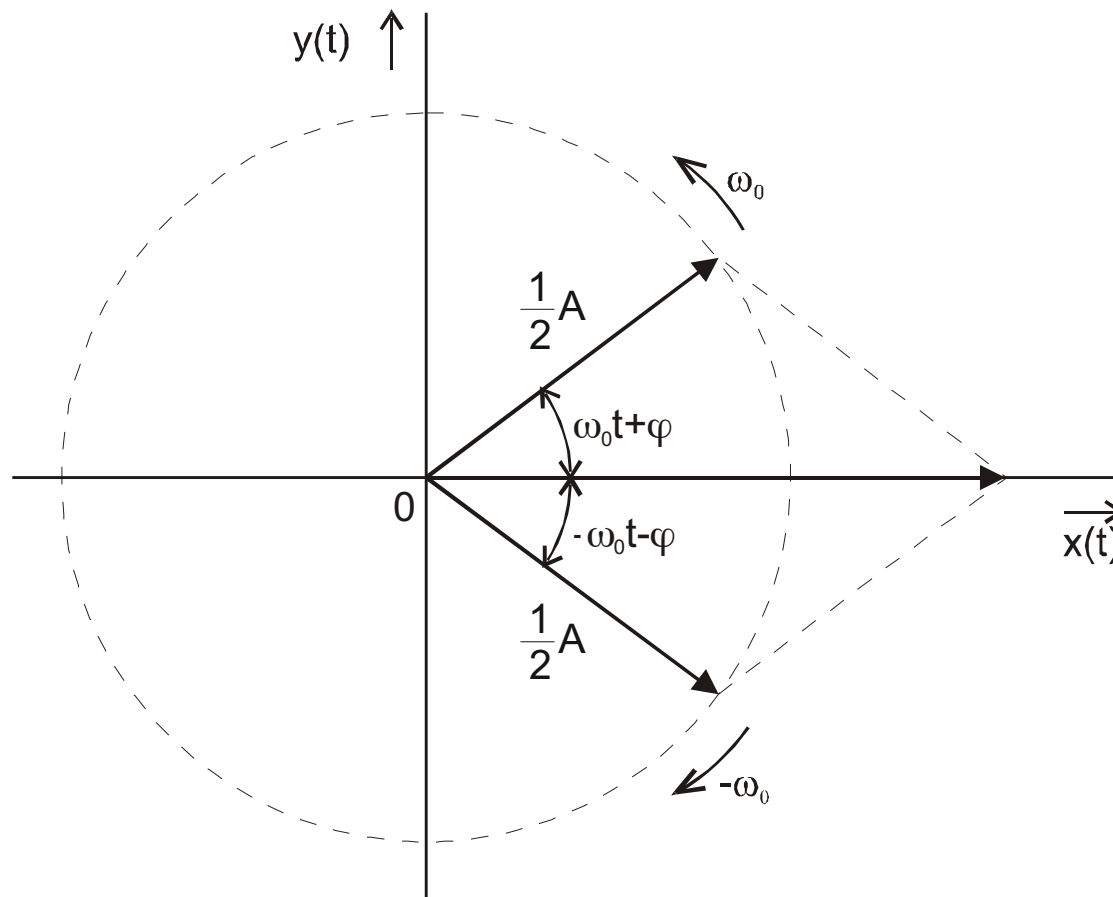
$$\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = -\frac{b}{a} \quad (3.6)$$

Reálny tvar harmonického signálu - exponenciálny

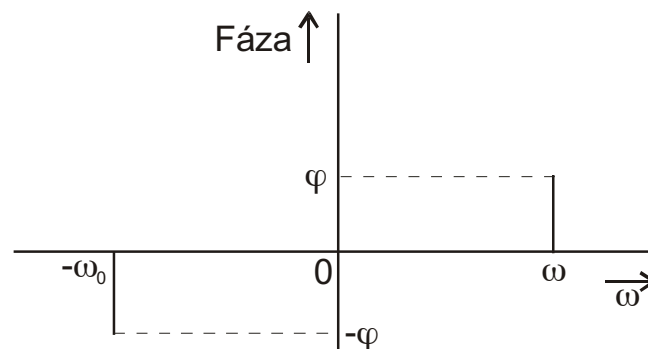
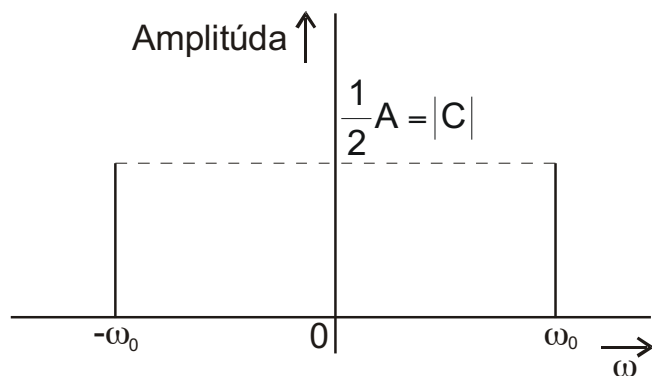
Sufázovú zložku $x(t)$ môžeme vyjadriť aj pomocou komplexne združených signálov $s(t)$ a $\bar{s}(t)$. Pre $x(t)$ potom platí

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2} [s(t) + \bar{s}(t)] = \frac{1}{2} [A e^{j(\omega_0 t + \varphi)} + A e^{-j(\omega_0 t + \varphi)}] \quad (3.7)$$

Situáciu, keď fázory $s(t)$ a $\bar{s}(t)$ rotujú kruhovou frekvenciou ω_0 , ale opačnými smermi, ilustruje nasledovný obr:



Reprezentácia signálu zo vzťahu (3.7) v kmitočtovej oblasti je v grafickej forme:



V tomto prípade sa jedná o **dvojstranné spektrum**.

Ak si signál $x(t)$ vyjadríme ako

$$x(t) = C e^{j\omega_0 t} + \bar{C} e^{-j\omega_0 t} \quad (3.8)$$

potom

$$C = \frac{1}{2} A e^{j\varphi}$$

$$\bar{C} = \frac{1}{2} A e^{-j\varphi} \quad (3.9)$$

kde C predstavuje komplexnú amplitúdu, pričom platí

$$|C| = \frac{1}{2} A \quad (3.10)$$

Superpozícia harmonických signálov

Uvažujeme dva reálne signály

$$x_1(t) = A_1 \cos \omega_1 t$$

$$x_2(t) = A_2 \cos \omega_2 t \quad (3.11)$$

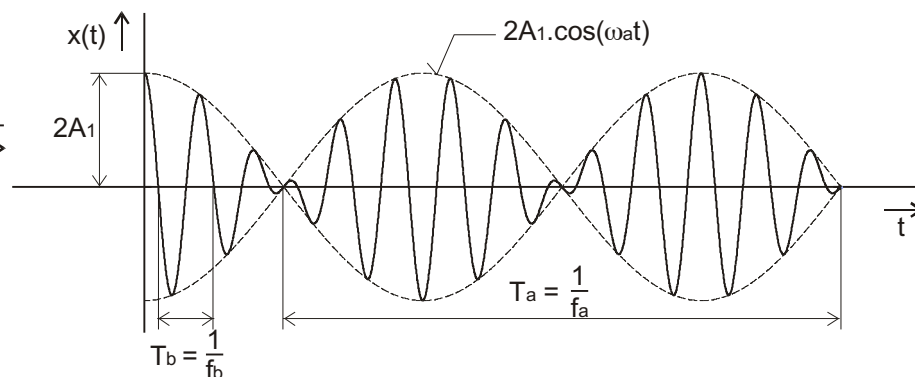
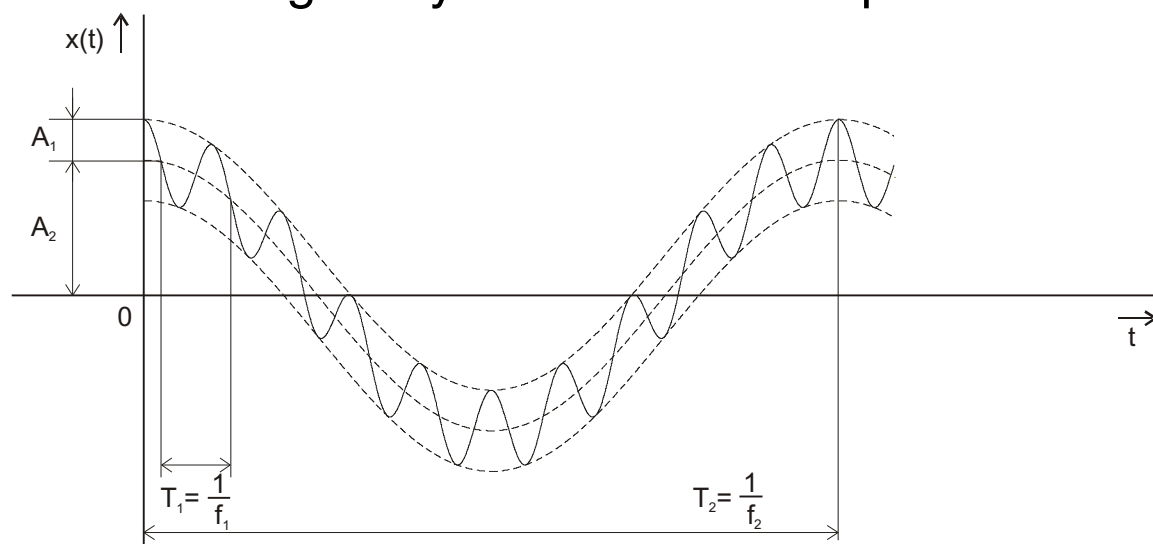
pričom

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0$$

Vytvorme

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t \quad (3.12)$$

Ako bude signál vyzerat' v čase? Napr.:



Ako asi bude vyzerat' reprezentácia signálu v kmitočtovej oblasti?

Periodický signál

Ak $x(t)$ je tvorený superpozíciou N harmonických signálov, teda

$$x(t) = \sum_{n=1}^N x_n(t) = \sum_{n=1}^N A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \quad (3.15)$$

výsledný signál $x(t)$ bude periodický, ak pre frekvencie jednotlivých superponovaných signálov bude platiť

$$f_n = nkf_1 \quad (3.16)$$

kde k je racionálne číslo a $n = 1; 2; 3; \dots; N$.

Otázka: „Môžeme určený periodický spojitý signál vyjadriť ako superpozície harmonických signálov“

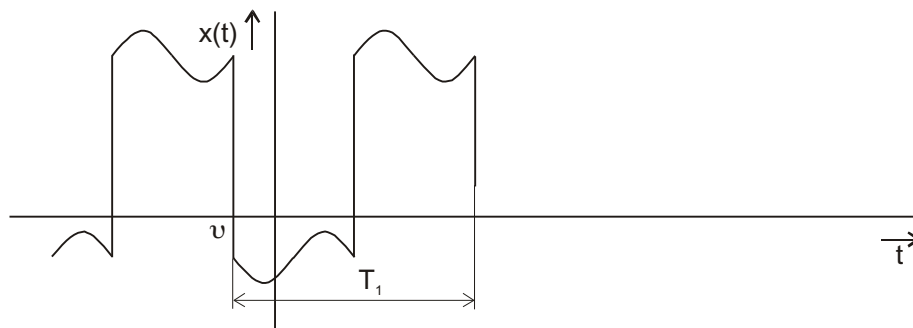
Odpoveď: “Áno, signál musí splniť isté podmienky“.

Dirichletove podmienky

Uvažujeme, periodický signál $x(t)$, pre ktorý platí

$$x(t) = x(t + \nu T_1) \quad \text{pre } \nu = 0; \pm 1; \pm 2; \quad (3.17)$$

kde T_1 je perióda signálu



Aby periodická funkcia $x(t)$, ktorá vyhovuje vzťahu (3.17), mohla byť vyjadrená ako superpozícia harmonických signálov pre ktorých frekvencie platí $\omega_n = n\omega_1$ (ω_1 je základná harmonická, $n = 1; 2; 3; \dots$), musia na intervale $\nu + T_1$ vyhovovať Dirichletovým podmienkam:

- funkcia $x(t)$ musí byť ohraničená,
- musí mať konečný počet bodov nespojitosti, v ktorých musí mať definovanú limitu zľava a limitu sprava,
- musí mať konečný počet maxím a miním.

Ak signál spĺňa tieto podmienky, potom sa dá vyjadriť pomocou Fourierovho radu.

Reálny zložkový tvar Fourierovho radu

Každý reálny periodický signál $x(t)$, ktorý spĺňa Dirichletove podmienky, môžeme rozložiť do Fourierovho radu, pre ktorého reálny zložkový tvar platí

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t) \quad (3.18)$$

kde

$n\omega_1$ je kruhová frekvencia n -tej harmonickej zložky

a_0 , a_n a b_n sú koeficienty nezávislé od premennej t a platia pre ne nasledovné vzťahy:

$$a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} x(t) dt \quad a_n = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} x(t) \cos n\omega_1 t dt \quad b_n = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} x(t) \sin n\omega_1 t dt \quad (3.21)$$

pre $n = 1; 2; 3; \dots$

Platí:

- ak je funkcia $x(t)$ párnou periodickou funkciou, potom pre jej rozklad do Fourierovho radu platí (sínusové zložky rozvoja sú nulové):

- $$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_1 t$$

- ak $x(t)$ je nepárna periodická funkcia, potom jej rozklad do Fourierovho radu je daný vzťahom (kosínusové zložky rozvoja sú nulové):

- $$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_1 t$$

Reálny trigonometrický tvar Fourierovho radu

Podobne ako harmonický signál resp. superpozíciu harmonických signálov, ktoré sú v trigonometrickom tvare vyjadrené vzťahmi (3.2) a (3.15), môžeme každý periodický signál $x(t)$, ktorý vyhovuje Dirichletovým podmienkam, vyjadriť trigonometrickým tvarom Fourierovho radu, pre ktorý platí

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) \quad (3.24)$$

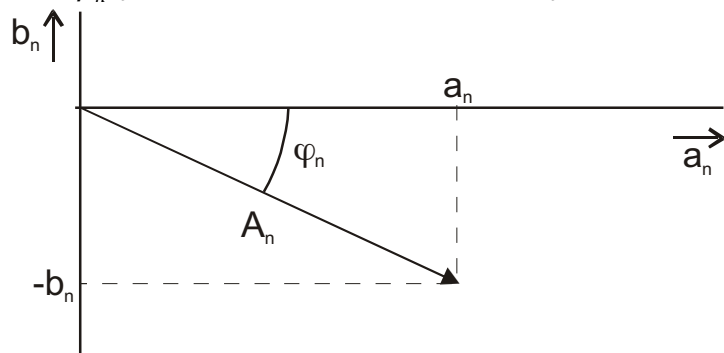
kde

A_0 je veľkosť jednosmernej zložky signálu (stredná hodnota $x(t)$)

A_n je amplitúda n -tej harmonickej zložky

$\omega_n = n\omega_1$ je kruhová frekvencia n -tej harmonickej zložky

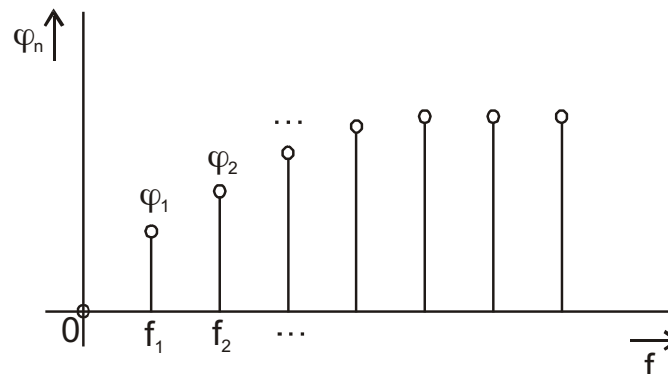
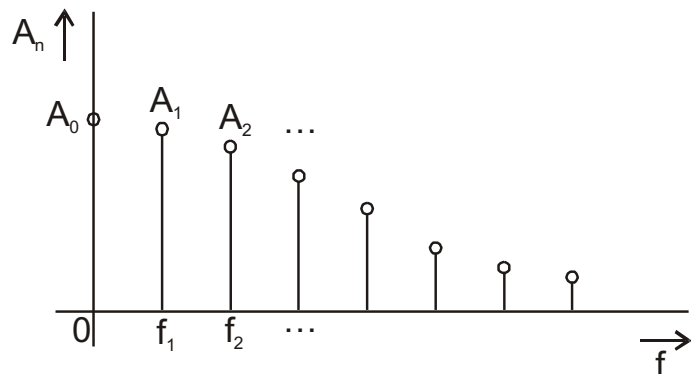
φ_n je počiatočná fáza n -tej harmonickej zložky



Obrázok vľavo – mnemotechnická pomôcka na zapamätanie vzťahov medzi a_n , b_n , φ_n , A_n

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\tan \varphi_n = -\frac{b_n}{a_n} \quad A_0 = a_0$$



Exponenciálny tvar Fourierovho radu

Podobne ako sme vyjadrili harmonický signál pomocou komplexne združených fázorov (vzťah (3.7), obr. 3.4) môžeme periodický signál $x(t)$ vyjadriť pomocou exponenciálneho tvaru Fourierovho radu. Platí preň

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{C_n e^{jn\omega_1 t} + \bar{C}_n e^{-jn\omega_1 t}\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_1 t} \quad (3.28)$$

kde C_n sú komplexné Fourierove koeficienty, pre ktoré platí

$$C_n = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} x(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \quad (3.29)$$

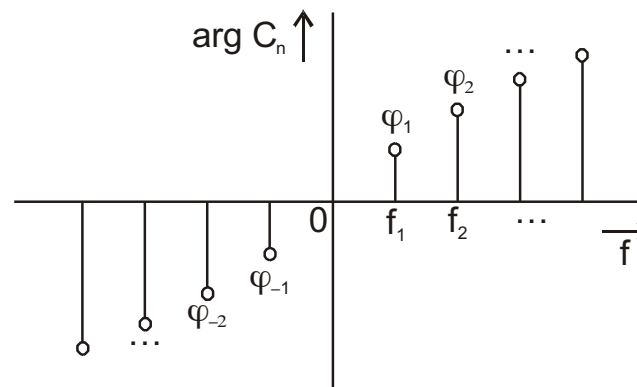
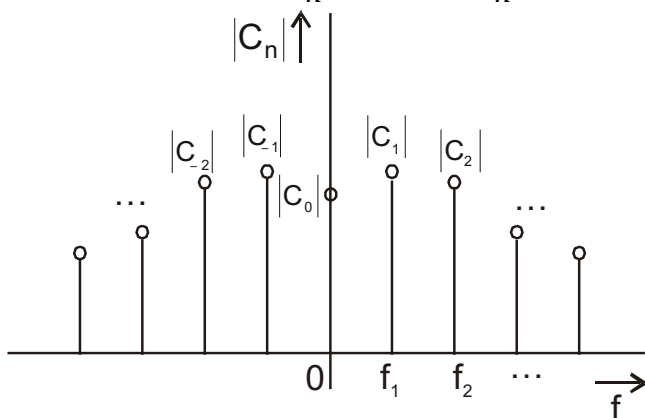
pre $n = 0; \pm 1; \pm 2;$

Zo vzťahov (3.21), (3.25) a (3.29) vyplýva, že

$$|C_n| = |C_{-n}| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{2} A_n \quad |\bar{C}_n|^2 = |C_{-n}|^2 \quad (3.30)$$

odkiaľ

$$A_n = 2|C_n| \quad \varphi_n = \arg C_n \quad (3.32)$$

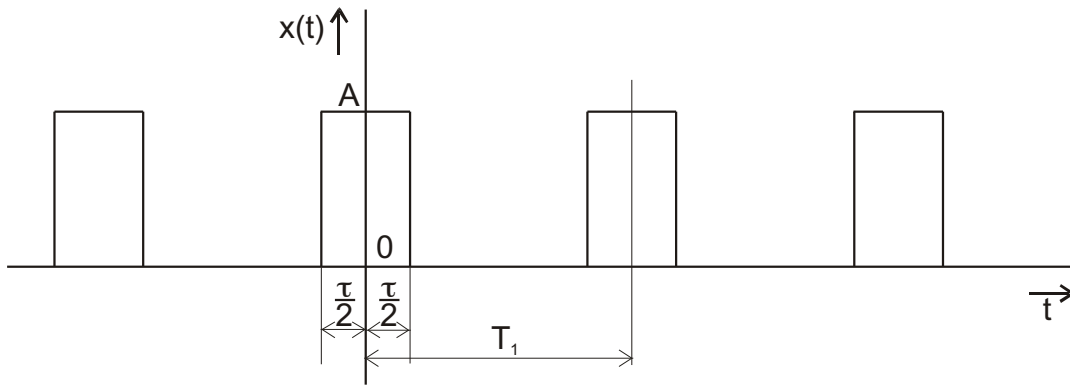


Vzájomné vzťahy a prepočty medzi koeficientami jednotlivých tvarov Fourierovho radu:

	Exponenciálny tvar	Trigonometrický tvar	Zložkový tvar
	$ C_n , \arg C_n$	A_n, φ_n	a_n, b_n
$ C_n , \arg C_n$		$A_0 = C_0$ $A_n = 2 C_n $ $\varphi_n = \arg C_n$	$a_0 = C_0$ $a_n = 2 \operatorname{Re}\{C_n\}$ $b_n = -2 \operatorname{Im}\{C_n\}$
A_n, φ_n	$C_0 = A_0$ $ C_n = \frac{1}{2} A_n$ $\arg C_n = \varphi_n$		$a_0 = A_0$ $a_n = A_n \cos \varphi_n$ $b_n = -A_n \sin \varphi_n$
a_n, b_n	$C_0 = a_0$ $C_n = \frac{1}{2} a_n - j \frac{1}{2} b_n =$ $= \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ $\cos \varphi_n = \frac{a_n}{2 C_n }$ $\sin \varphi_n = -\frac{b_n}{2 C_n }$	$A_0 = a_0$ $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ $\cos \varphi_n = \frac{a_n}{A_n}$ $\sin \varphi_n = -\frac{b_n}{A_n}$	

Príklad 1

Uvažujme periodickú funkciu $x(t)$:



platí

$$x(t) = \begin{cases} A & \text{pre } t \in \left(-\frac{\tau}{2} + nT_1; \frac{\tau}{2} + nT_1\right) \\ 0 & \text{pre ostatné } t \end{cases} \quad \text{kde} \quad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \quad n = 0; \pm 1; \pm 2;$$

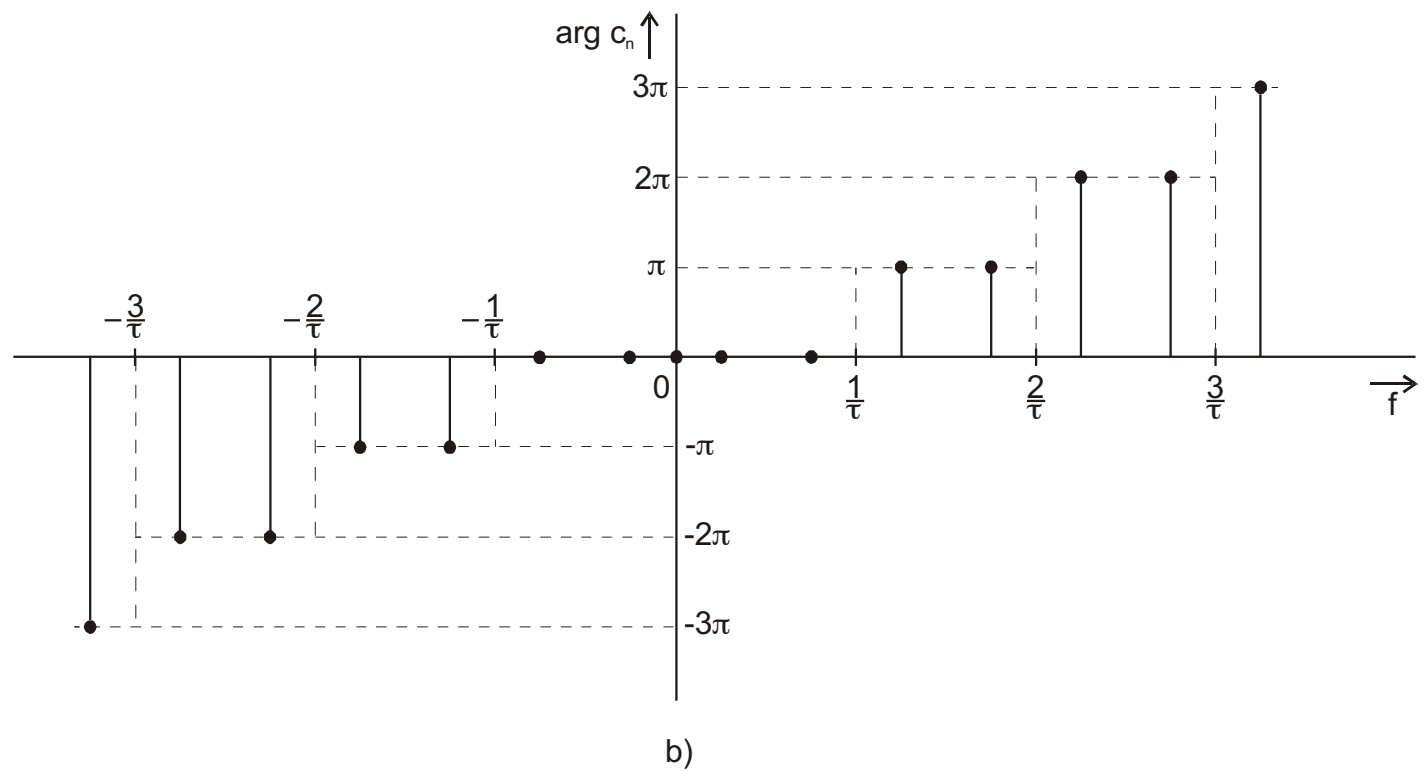
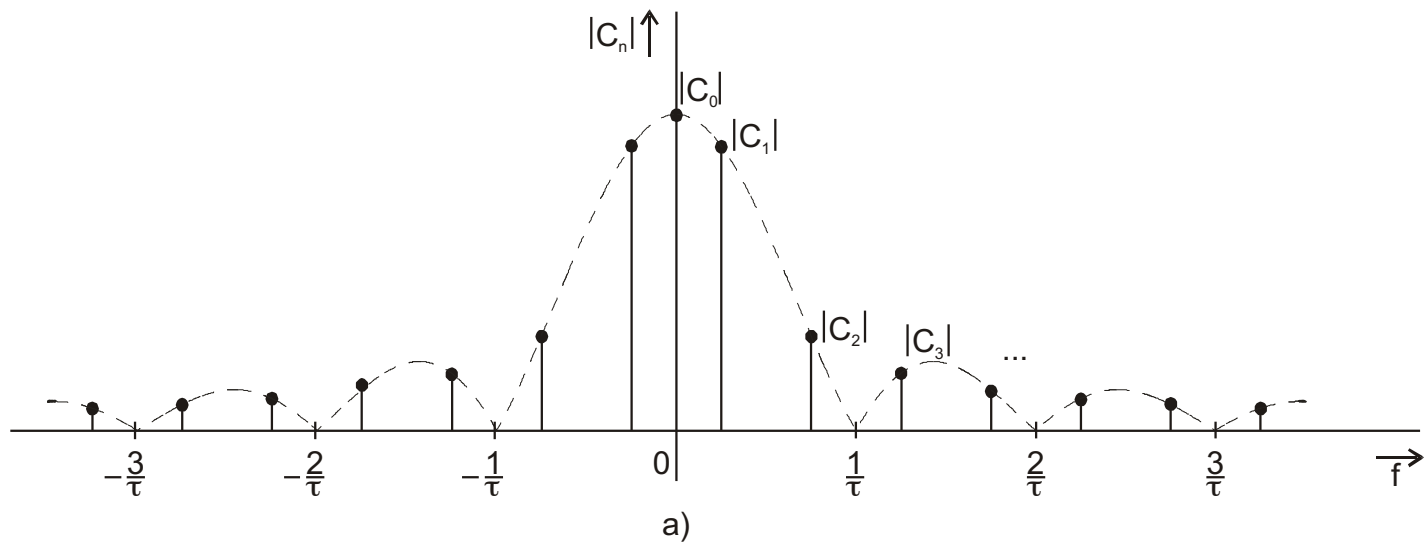
Máme urobiť rozvoj funkcie $x(t)$ do Fourierovho radu a získať tak reprezentáciu danej funkcie vo frekvenčnej oblasti.

Riešenie

Daná funkcia spĺňa Dirichletove podmienky a preto ju môžeme rozložiť do Fourierovho radu. Ak použijeme exponenciálny tvar Fourierovho radu, potom pre koeficienty C_n na základe vzťahu (3.29) dostaneme

$$C_n = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{A}{T_1} \cdot \frac{1}{-jn\omega_1} \cdot \left[e^{-jn\omega_1 t} \right]_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \frac{A\tau}{T_1} \cdot \frac{\sin n\omega_1 \frac{\tau}{2}}{n\omega_1 \frac{\tau}{2}} = \frac{A\tau}{T_1} \operatorname{si} \left(n\pi \frac{\tau}{T_1} \right)$$

pričom $\operatorname{si} \left(n\pi \frac{\tau}{T_1} \right)$ predstavuje *SI* funkciu.



Fyzikálna interpretácia Fourierovho radu

- Rozvojom signálu $x(t)$ do Fourierovho radu získame teda obraz o tom, aké je zastúpenie jednotlivých frekvenčných zložiek v danom signále.
- Komunikačný kanál má určité technické parametre, medzi ktoré patrí aj šírka frekvenčného pásma. Je teda zrejmé, že aj keď spektrum signálu je teoreticky nekonečné, cez komunikačný kanál sa prenáša len jeho ohraničená časť => vplyv šírky frekvenčného pásma komunikačného kanála na prenášaný signál

Konvergenzie Fourierovho radu

Doteraz sme mlčky predpokladali, že:

- periodická funkcia $x(t)$ vyhovuje Dirichletovým podmienkam,
- funkciu $x(t)$ sme priamo nahradili jej rozvojom do Fourierovho radu, pričom v skutočnosti ide o aproximáciu funkcie $x(t)$ funkciou $\xi(t)$, pre ktorú platí

$$\xi(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=-k}^k C_n e^{jn\omega_1 t} \quad (3.33)$$

Tento súčet existuje však len vtedy, keď uvedený Fourierov rad konverguje. Postačujúce podmienky (vyhovujú pre väčšinu našich aplikácií):

- funkcia je po úsekoch spojitá,
- funkcia je po úsekoch hladká.

Funkcia po úsekoch spojitá

Funkciu $x(t)$ nazývame po úsekoch spojitou na intervale $\langle a; b \rangle$ ak je spojitá vo všetkých bodoch tohoto intervalu, okrem konečného počtu bodov t_i , $i = 1; 2; 3; \dots; k$, v ktorých má nespojitosti 1. druhu, t.j. nie je v nich definovaná alebo nie je v nich spojitá, ale má vlastné jednostranné limity $x(t_i - 0)$ (zl'ava) a $x(t_i + 0)$ (sprava). Ak $x(t_i - 0) \neq x(t_i + 0)$ hovoríme, že funkcia $x(t)$ má v bode t_i skok o veľkosti $x(t_i + 0) - x(t_i - 0)$. Ak niektorý z bodov t_i je koncovým bodom intervalu $\langle a; b \rangle$, vyžadujeme existenciu vlastných jednostranných limít $x(a + 0)$ alebo $x(b - 0)$.

Funkcia po úsekoch hladká

Funkciu $x(t)$ nazývame po úsekoch hladkou na intervale $\langle a; b \rangle$ ak je $x(t)$ aj $x'(t)$ v tomto intervale po úsekoch spojitá.

Bodová konvergencia

Ak je $x(t)$ periodická funkcia, ktorá je na intervale periodicity $\langle 0; T_1 \rangle$ po úsekoch hladká, potom Fourierov rad tejto funkcie:

a) konverguje v každom bode spojitosti a

$$\xi(t) = x(t)$$

b) v bodoch nespojitosti t.j. vo vnútri intervalu periodicity dáva Fourierov rad aritmetický priemer limity zľava a sprava

$$\xi(t) = \frac{1}{2} [x(t_i +) + x(t_i -)]$$

c) v bodoch $t = \nu T_1$, $\nu = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$ je Fourierov rad rovný aritmetickému priemeru jednostranných limít v okrajových bodoch intervalu periodicity

$$\xi(\nu T_1) = \frac{1}{2} [x(0+) + x(T_1 -)]$$

Rovnomerná konvergencia na intervale

Postačujúce podmienky pre rovnomernú konvergenciu:

- a) Nech periodická funkcia $x(t)$ je spojitá na intervale periodicity $\langle 0; T_1 \rangle$ a má na ňom po úsekoch spojitú deriváciu $x'(t)$ a okrem toho platí $x(0) = x(T_1)$. Potom Fourierov rad funkcie $x(t)$ konverguje rovnomerne na intervale $\langle 0; T_1 \rangle$.
- b) Nech funkcia $x(t)$ je absolútne integrovateľná na intervale periodicity $\langle 0; T_1 \rangle$ a nech v nejakom intervale $(a; b)$, pričom $0 \leq a < b \leq T_1$, je spojitá spolu so svojou deriváciou. Potom pre každé δ konverguje Fourierov rad funkcie $x(t)$ rovnomerne na intervale $\langle a + \delta; b - \delta \rangle$.

Výkonové spektrum periodických signálov

- Uvažujme, že signál $x(t)$ je napätie $u(t)$ alebo prúd $i(t)$ (ich okamžité hodnoty).

$$P_s = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} |x(t)|^2 dt$$

- Pre *stredný výkon periodického signálu s periódou T_1* odovzdávaný do záťaže platí

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_1 t}$$

- Vieme že platí

$$P_s = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_1 t} dt \quad \Rightarrow \quad P_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} x(t) e^{jn\omega_1 t} dt$$

- Dosadíme:

$$\bar{C}_n = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} x(t) e^{jn\omega_1 t} dt$$

- Použitím oblasti): dostaneme výsledok (stredný výkon periodického signálu vo frekvenčnej

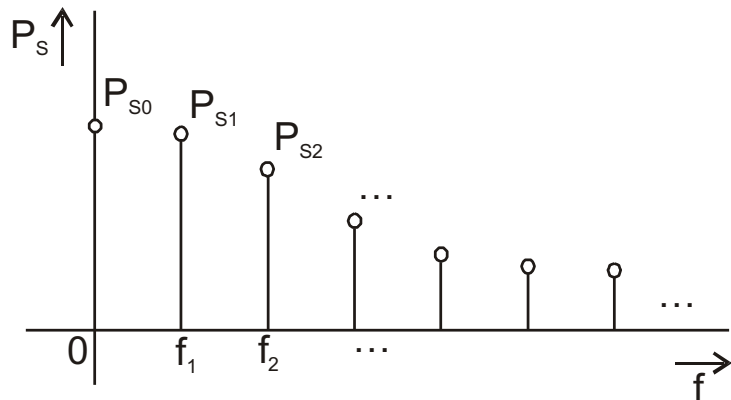
$$P_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \bar{C}_n \quad \text{resp.} \quad P_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \quad \text{resp.} \quad P_s = C_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|C_n|^2 \quad (3.41)$$

keď uvažíme, že $A_n = 2|C_n|$, potom

$$P_s = C_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|C_n| \cdot |C_n| = A_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} A_n^2 = A_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} A_{n_{ef}}^2$$

kde $A_{n_{ef}}$ je efektívna hodnota n -tej harmonickej zložky $A_{n_{ef}} = \frac{\sqrt{2}}{2} A_n$

Stredné výkony jednotlivých harmonických zložiek



$$P_s = C_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|C_n|^2 = P_{s0} + \sum_{n=1}^{\infty} P_{sn}$$

výkonové spektrum neobsahuje informáciu o fázových pomeroch.

Všetky signály, ktoré majú rovnaké amplitúdové spektrum a odlišné fázové spektrum, majú rovnaké výkonové spektrum.

Gibbsov jav

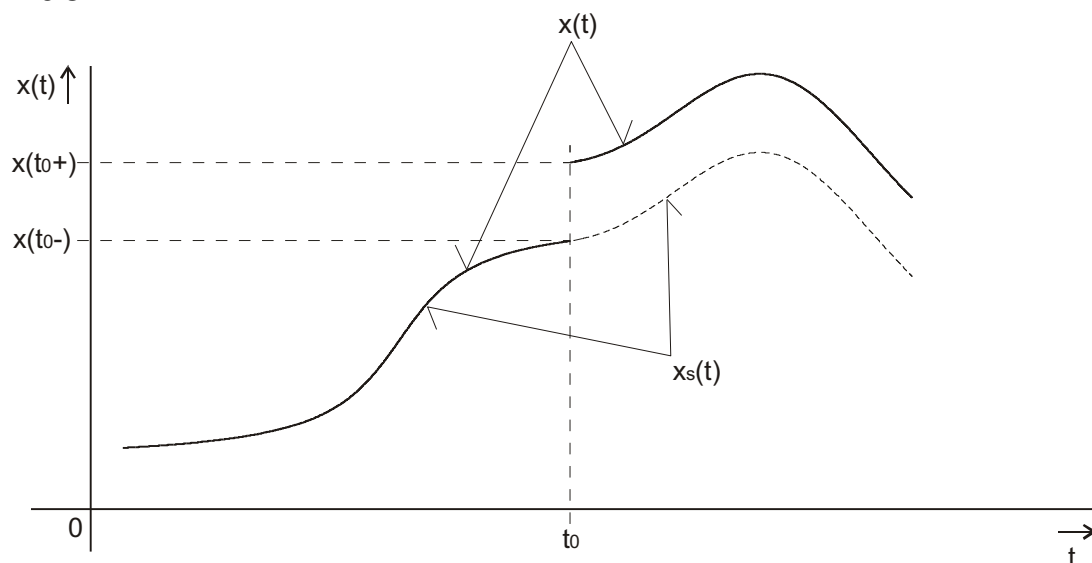
ak periodická funkcia $x(t)$ má na intervale periodicity bod nespojitosti, potom rozvoj tejto funkcie do nekonečného Fourierovho radu je len jej aproximáciou.

Funkciu s bodom nespojitosti môžeme vyjadriť napr:

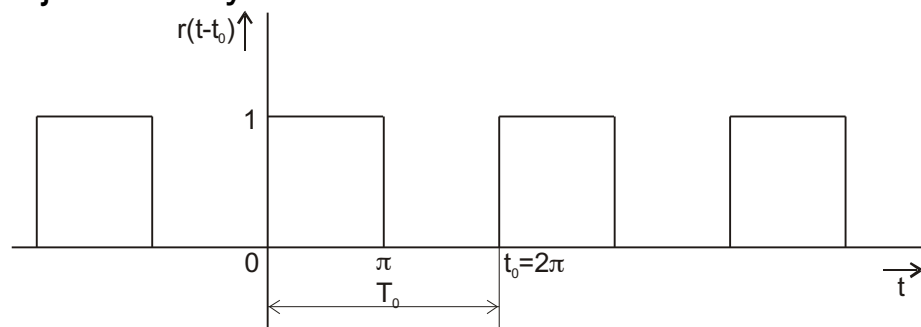
$$x(t) = x_s(t) + \sigma(t - t_0)$$

Kde $\sigma(t - t_0)$ je jednotkový skok:

$$\sigma(t - t_0) = \begin{cases} 1 & \text{pre } t > t_0 \\ 0 & \text{pre } t \leq t_0 \end{cases}$$



Vplyv jednotkového skoku môžeme najľahšie analyzovať napr. analýzou periodického signálu zloženého len z jednotkových skokov:



Pre funkciu $r(t-t_0)$ platí

$$r(t-t_0) = \begin{cases} 0 & \text{pre } t \in (\pi + k2\pi; 2\pi + k2\pi) \\ 1 & \text{pre } t \in (2\pi + k2\pi; 3\pi + k2\pi) \end{cases}$$

pre $k = 0; \pm 1; \pm 2;$

Fourierov rozvoj funkcie $r(t-t_0)$:

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{\frac{t_0}{2}}^{\frac{t_0}{2}+T_0} r(t-t_0) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi}^{3\pi} 1 dt = \frac{1}{2}$$

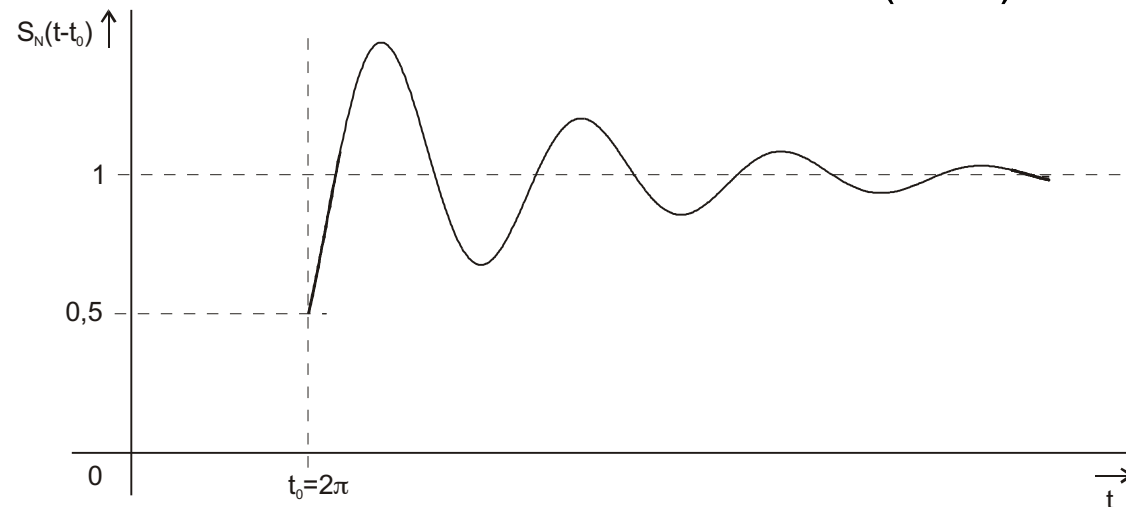
$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{\frac{t_0}{2}}^{\frac{t_0}{2}+T_0} r(t-t_0) \sin n\omega_1 t dt = \begin{cases} 0 & \text{pre } n \text{ parne} \\ \frac{2}{\pi n} & \text{pre } n \text{ neparne} \end{cases}$$

$$a_n = 0$$

Súčet prvých $2N-1$ členov Fourierovho rozvoja funkcie $r(t-t_0)$:

$$S_N(t-t_0) = a_0 + \sum_{n=1}^{2N+1} b_n \sin n\omega_1 t \quad (3.54)$$

$$S_N(t-t_0) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin t}{1} + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \dots + \frac{\sin(2N-1)t}{2N-1} \right) \quad (3.55)$$



Derivácia $S_N(t-t_0)$ sa dá vyjadriť v uzavretom tvare:

$$S_N'(t-t_0) = \frac{2 \cos Nt \cdot \sin Nt}{\pi \sin t} = \frac{1 \sin 2Nt}{\pi \sin t}$$

Položením derivácie rovnú nule dostávame extrémny $t_i = \frac{i\pi}{2N}$.

Následnou integráciou vieme vyjadriť sumu v uzavretom tvare:

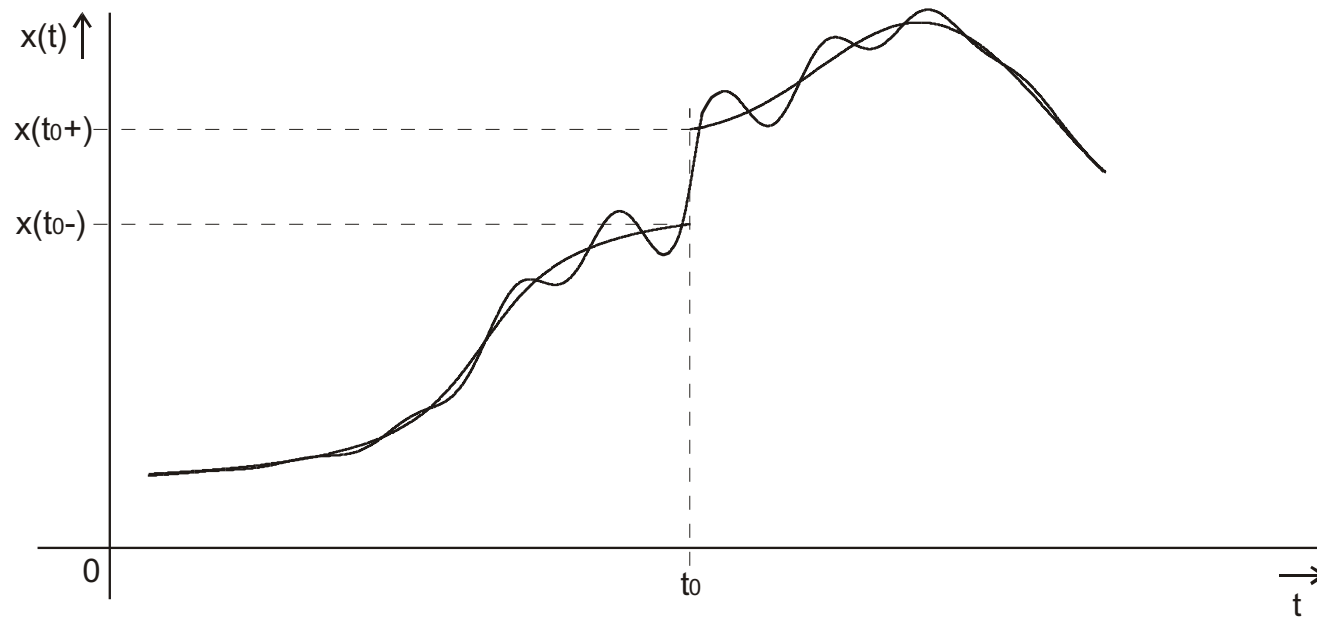
$$S_N(t-t_0) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \int_{t_0}^t \frac{1 \sin 2Nt}{2 \sin t} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^t \frac{\sin 2Nt}{\sin t} dt$$

Pre hodnotu v prvom extréme a použitím substitúcie $y = 2Nt$ pre limitný prípad, keď $N \rightarrow \infty$ a $t_1 \rightarrow 0$ dostávame:

$$S_N(t_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2N}} \frac{\sin 2Nt}{\sin t} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{y} dy = 1,0895$$

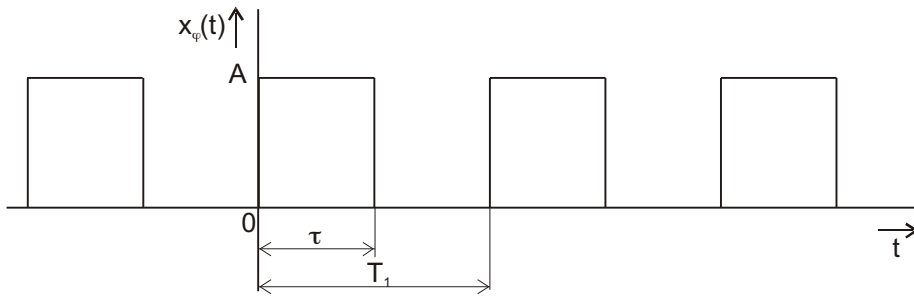
Teda:

- prvé maximum sa približuje k bodu nespojitosti, ale jeho veľkosť neklesá
- funkcia prechádza vždy na obe strany rovnako, na každú stranu o 8.95% hodnoty skoku v bode nespojitosti (dokopy je to približne 18%)



Príklad 2

Pre periodickú funkciu $x_\tau(t)$ platí



$$x_\tau(t) = \begin{cases} A & \text{pre } t \in (0 + nT_1; \tau + nT_1) \\ 0 & \text{pre ostatné } t \end{cases} \quad \text{kde } n = 0; \pm 1; \pm 2; \quad T_1 = 2\tau$$

Úlohy:

vyjadrite signál v zložkovom a trigonometrickom tvare FR, aproximujte signál pomocou prvých 5 harmonických

zistite rozloženie výkonu pre prvých 5 harmonických

Riešenie

Pre výpočet spektra funkcie $x(t)$ použijeme jej rozvoj do reálneho zložkového tvaru

Fourierovho radu:

$$a_0 = \frac{1}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} A dt = \frac{A}{T_1} \left[t \right]_0^{\frac{T_1}{2}} = \frac{A}{2}$$

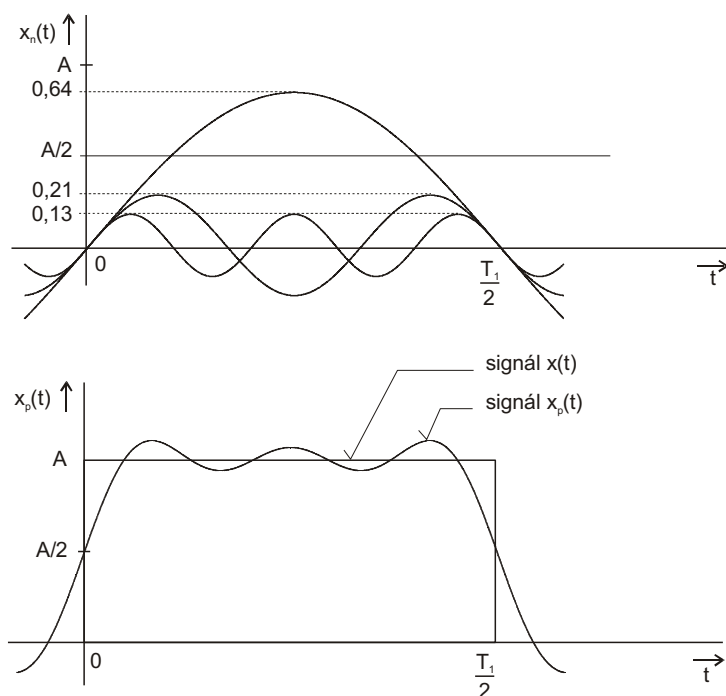
$$a_n = \frac{2}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} A \cos n\omega_1 t dt = \frac{2A}{T_1 n\omega_1} \left[\sin n\omega_1 t \right]_0^{\frac{T_1}{2}} = \frac{A}{n\pi} \sin n\pi = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} A \sin n\omega_1 t dt = -\frac{2A}{T_1 n\omega_1} \left[\cos n\omega_1 t \right]_0^{\frac{T_1}{2}} = \frac{A}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \frac{A}{n\pi} \left[1 - (-1)^n \right]$$

Použitím získaných výsledkov môžeme pôvodný signál vyjadriť v zložkovom tvare ako:

$$x_{\tau}(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_1 t$$

n	a ₀ , b _n
0	A*0.5
1	A*0.636
2	0
3	A*0.212
4	0
5	A*0.127



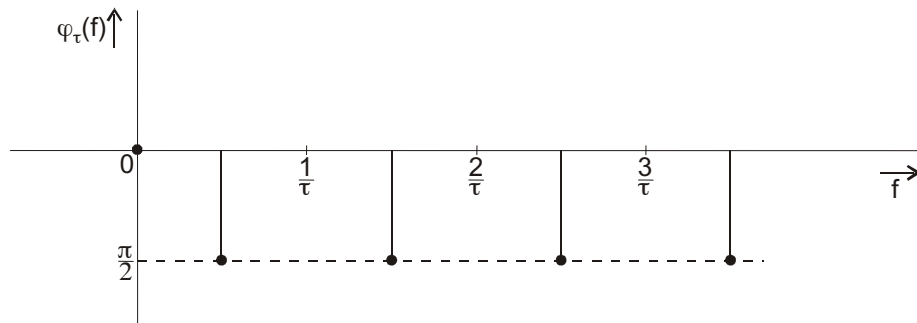
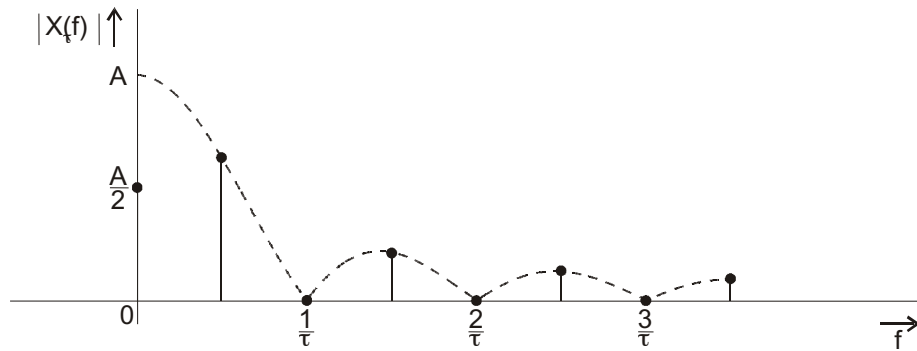
Ak chceme zistiť modul a fázu (zmena na trigon. tvar FR) dostávame

$$A_0 = a_0$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |b_n| ; n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\sin \varphi_n = -\frac{b_n}{A_n} = -\frac{b_n}{|b_n|} \Rightarrow \varphi_n = -\arcsin\left(\frac{b_n}{|b_n|}\right) ; \varphi_n = -\pi/2, -\pi/2, -\pi/2, \dots, n = 1, 2, 3, \dots$$

Modul a fáza



Následne pôvodný signál skladáme pomocou

$$x_\tau(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n)$$

Je zrejmé, že vyskladaný signál bude identický (kosinus posunutý o polovicu pí doprava je sínus) ako pri skladaní v zložkovom tvare.

Rozloženie výkonu:

Stredný výkon dodaný do záťaže $R = 1\Omega$ prvými 5 spektrálnymi zložkami vypočítame zo vzťahu (3.41):

$$P_{sp} = \frac{A^2}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{2A}{\pi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{2A}{3\pi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{2A}{5\pi} \right)^2 \doteq 0,48A^2 \quad (3.71)$$

Stredný výkon dodaný do záťaže všetkými spektrálnymi zložkami je nasledovný:

$$P_s = \frac{1}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} A^2 dt = \frac{A^2}{T_1} \left[t \right]_0^{\frac{T_1}{2}} = \frac{A^2}{2} \quad (3.72)$$

Porovnaním hodnôt P_s a P_{sp} vidíme, že 96% celkového výkonu signálu je sústredené v jednosmernej zložke a v prvej, tretej a piatej harmonickej spektra signálu. Z uvedeného vyplýva, že z energetického hľadiska nemá význam zväčšovať praktickú šírku pásma nad hodnotu $5f_1$.