

SÚSTAVY

- **Sústava** – signál vždy existuje v nejakej sústave (systéme), čo je množina prvkov, ktoré navzájom na seba pôsobia, aby plnili čo treba.



- Sústava bez styku s okolím pomocou nejakých signálov nemá zmysel
- Až doteraz sme robili analýzu signálov bez rozboru vzájomného pôsobenia sústav a signálov (ale predpokladali sme, že signál vznikol/existuje/šíri sa ... v nejakej sústave), je vstupom do nejakej sústavy ...)
- Budeme analyzovať jednoduché sústavy s jedným vstupom (**budiaci signál** x) a jedným výstupom (**odozva** y).

Opis sústavy

- Vonkajší – máme informáciu len o správaní sa výstupov v závislosti od vstupu. Snažíme sa aj o identifikáciu sústavy.
- Vnútorňý – používa sa ak je štruktúra sústavy dostatočne známa

Delenie sústav

1) Podľa matematického modelu

- a. Lineárne: vieme ich popísať lineárnymi diferenciálnymi resp. diferenčnými rovnicami. Platí princíp superpozície a proporcionality (ak $x_1 \rightarrow y_1$ a $x_2 \rightarrow y_2$ potom $\alpha x_1 + \beta x_2 \rightarrow \alpha y_1 + \beta y_2$).
- b. Nelineárne: neplatí vyššie uvedené.

2) Podľa sústredenosti parametrov

- a. Sústredené (geometrické rozmery sústavy sú zanedbateľne malé oproti rozmerom ktoré ovplyvňujú šírenie)
- b. Nesústredené (napr. vedenia)

3) Parametrickosť

- a. Parametrické (aspoň jeden parameter sústavy závisí od nejakej vonkajšej nezávislej veličiny)
- b. Neparаметrické

4) Premennosť v čase

- a. Časovo nepremenné (vlastnosti sa nemenia v čase, t.j. časovo invariantné)
- b. Časovo premenné

Delenie sústav (pokračovanie)

5) Typ používaných signálov

- a. Spojité v čase
- b. Diskrétne v čase
 - i. Spojité v hodnote
 - ii. Diskrétne v hodnote
- c. Kombinované (hybridné)

6) Pamäť

- a. Bezpamäťové: hodnota odozvy v každom časovom okamihu závisí len od hodnoty budiaceho signálu v danom čase.
- b. Pamäťové: hodnota odozvy v každom časovom okamihu závisí aj od hodnoty budiaceho signálu mimo daného času

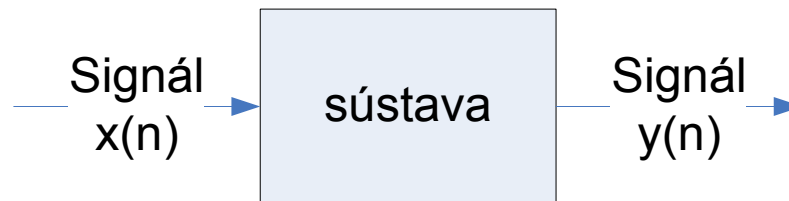
7) Kauzalita

- a. Kauzálne – odozva závisí len od hodnoty budiaceho signálu v danom čase, resp. predtým
- b. Nekauzálne – odozva závisí aj od hodnoty budiaceho signálu, ktorá ešte len bude.

Aké sústavy budeme bližšie analyzovať?

Základné vlastnosti	skratka	Skúmané typy
Lineárne + Spojité + Kauzálne + Invariantné (v čase)	LSKI	neparametrické, pamäťové
Lineárne + Diskrétne + Kauzálne + Invariantné (v čase)	LDKI	neparametrické, pamäťové

LDKI (Lineárne diskkrétne kauzálne invariantné)



- vstup (**budiaci signál**) $x(n)$
- výstup (**odozva**) $y(n)$

Základné vlastnosti (je daná sústava LDKI?):

- 1) Linearita: Sústava je lineárna ak platí princíp linearity a superpozície: ak $x_1(n) \rightarrow y_1(n)$ a $x_2(n) \rightarrow y_2(n)$ potom $\alpha x_1(n) + \beta x_2(n) \rightarrow \alpha y_1(n) + \beta y_2(n)$
- 2) Časová invariancia: $x(n-k) \rightarrow y(n-k)$ nezávisle od $k \in \mathbb{Z}$
- 3) Kauzalita: $y(n_0)$ je závislý iba od $x(n)$, kde $n \leq n_0$

Je daná sústava stabilná?

- Sústava je stabilná ak ľubovoľný vstupný signál $x(n)$ s konečnou amplitúdou vyvolá signál $y(n)$ s konečnou amplitúdou
- Čo je konečná amplitúda? $f(n)$ má konečnú amplitúdu, keď $|f(n)| < \infty; n \in \mathbb{Z}$

Opis LDKI sústavy

- Výstup (odozve) v danom čase je daný
 - Lineárnou závislosťou od aktuálnej budiacej hodnoty
 - Lineárnou kombináciou starších budiacich hodnôt
 - Lineárnou kombináciou starších výstupných hodnôt
- Opíšeme to lineárnou diferenčnou rovnicou

$$\sum_{k=0}^M b_k y(n-k) = \sum_{k=0}^N a_k x(n-k)$$

, kde $b_k, a_k \in R; n, k \in Z$

Vidíme, že LDKI sústava je úplne opísaná sadami koeficientov b_k, a_k

Základná otázky sú:

- 1) ak poznáme $x(n)$ a k nemu odpovedajúce $y(n)$, ako vyrátať b_k, a_k ? Dá sa to? Z jedného pokusu $x(n) \rightarrow y(n)$?
- 2) Ak poznáme b_k, a_k , mali by sme dokonale vedieť aké má sústava vlastnosti. Napr. či je stabilná. Ako to zistiť?

Skúmajme LDKI sústavu pomocou známych nástrojov

Prepíšme $a_k \rightarrow a(k)$ a $b_k \rightarrow b(k)$

$$\sum_{k=0}^M b(k)y(n-k) = \sum_{k=0}^N a(k)x(n-k)$$

Vidíme, že na oboch stranách sa jedná o konvolúciu diskretných signálov!

$$b(n) * y(n) = a(n) * x(n)$$

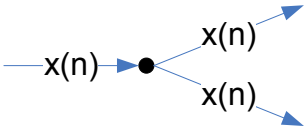
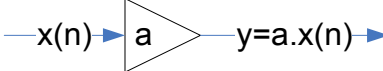
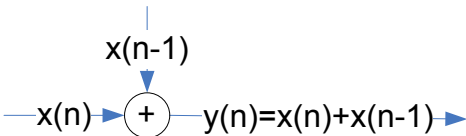
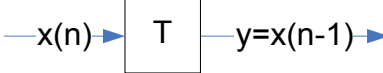
Kde sa tam nabrala konvolúcia a ako si to predstaviť?

Z pôvodnej rovnice vyjadríme $y(n)$ a kvoli jednoduchosti položíme $b_0 = 1$:

$$b_0 y(n) + \sum_{k=1}^M b_k y(n-k) = \sum_{k=0}^N a_k x(n-k)$$

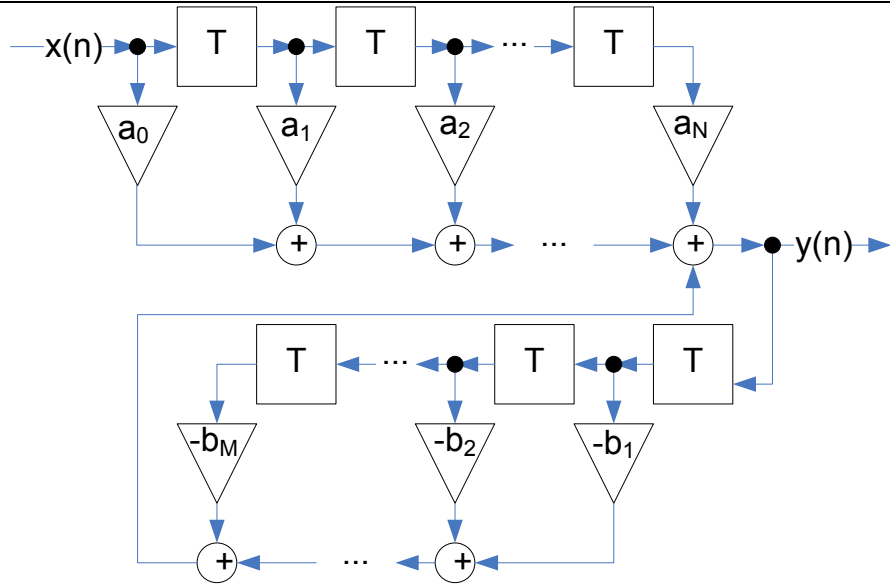
$$y(n) = \sum_{k=0}^N a_k x(n-k) - \sum_{k=1}^M b_k y(n-k)$$

Čo sa deje v sústave môžeme zakresliť pomocou nasledovných prvkov:

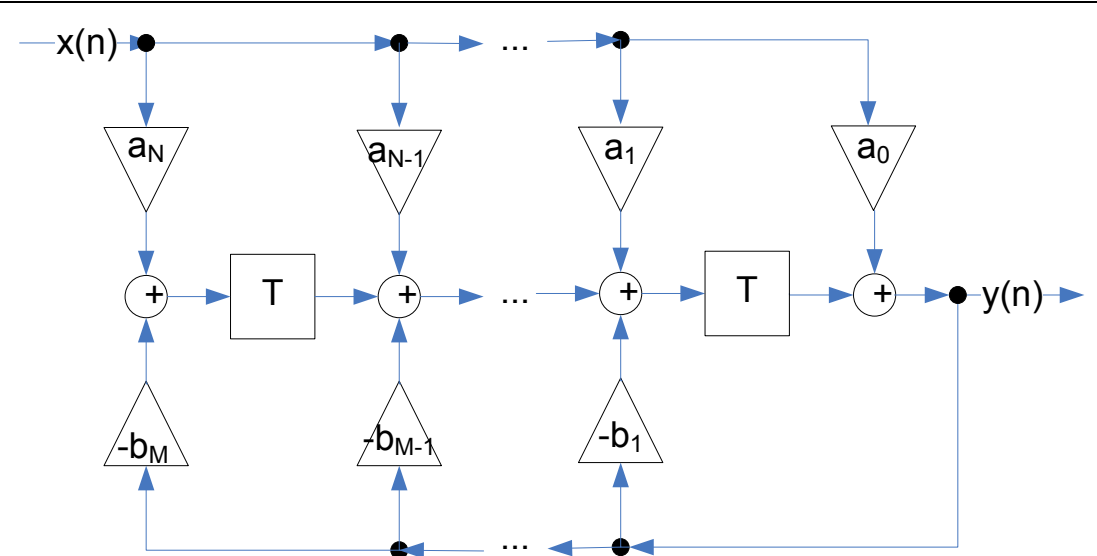
Názov	Označenie	Názov	Označenie
Rozvetvenie		Násobička	
Sumátor		Oneskorovací člen (posuvný register)	

Teda ešte raz: Kde sa tam nabrala konvolúcia a ako si to predstaviť?

$$y(n) = \sum_{k=0}^N a_k x(n-k) - \sum_{k=1}^M b_k y(n-k)$$



Priamy nekánonický model



Priamy kánonický (minimálny počet prvkov) model

Urobme DTFT vzťahu:

$$b(n) * y(n) = a(n) * x(n)$$

Vyjadrimo si to vo frekvenčnej oblasti:

$$B(\Omega)Y(\Omega) = A(\Omega)X(\Omega)$$

$$Y(\Omega) = \frac{A(\Omega)}{B(\Omega)} X(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega)$$

A naspäť v čase v pomocou inverznej DTFT:

$$y(n) = h(n) * x(n)$$

Teda ak existuje DTFT a inverzná DTFT ako je uvedené vyššie vidíme že výstup je konvolúciou vstupu a $h(n)$. Čo je to $h(n)$?

Uvažujme ako vstupný signál jednotkový impulz :

$$x(n) = u(n) = \begin{cases} 1 & \text{pre } n = 0 \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

Čomu sa rovná $U(\Omega)$?

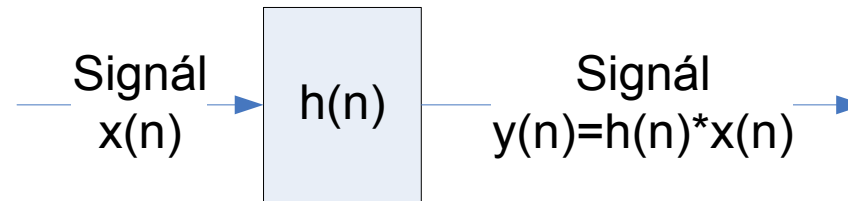
$$U(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n)e^{-j\Omega n} = 1e^{-j\Omega 0} = 1$$

Čo bude na výstupe sústavy, keď na vstup privedieme takýto signál?

$$Y(\Omega) = H(\Omega)1 = H(\Omega)$$

$$y(n) = h(n)$$

Čo je to $h(n)$? Je to odpoveď sústavy na jednotkový impulz!



Ake boli základné otázky?

- 1) ak poznáme $x(n)$ a k nemu odpovedajúce $y(n)$, ako vyrátať b_k, a_k ? Dá sa to? Z jedného pokusu $x(n) \rightarrow y(n)$?
- 2) Ak poznáme b_k, a_k , mali by sme dokonale vedieť aké ma sústava vlastnosti. Napr. či je stabilná. Ako to zistiť?

Vie nám DTFT v tomto nejako pomôcť? Iba čiastočne.

- Napr. otázka stability sústavy. Keďže $Y(\Omega) = \frac{A(\Omega)}{B(\Omega)} X(\Omega)$ problém zo stabilitou asi bude, ak $B(\Omega)$ bude 0 pre nejaké Ω (vtedy máme možnosť mať problém DTFT zinvertovať).
- T.j. $a(n)$ asi nestabilitu nebudú spôsobovať (na výstup ide lineárna kombinácia vstupov). Ale $b(n)$ asi hej (rekurzia ...)

Príklad:

Na vstupe máme signál $x(n)=(1,1)$. Nech $a(n)=(1,1)$, $b(n)=(1, 2)$. Signály sú číslované od 0 (pozor aj $b(n)$). Čomu sa rovná $y(n)$? Je sústava stabilná?

n	$x(n)$	$\sum_{k=0}^N a(k)x(n-k)$	$\sum_{k=1}^M b(k)y(n-k)$	$y(n)$
0	1	$1.1+1.0=1$	$1.0+2.0=0$	$1-0=1$
1	1	$1.1+1.1=2$	$1.1+2.0=1$	$2-1=1$
2	0	$1.0+1.1=1$	$1.1+2.1=3$	$1-3=-2$
3	0	$1.0+1.0=0$	$1.-2+2.1=0$	$0-0=0$
4	0	$1.0+1.0=0$	$1.0+2.-2=-4$	$0--4=4$
5	0	$1.0+1.0=0$	$1.4+2.0=4$	$0-4=-4$
6	0	$1.0+1.0=0$	$1.-4+2.4=4$	$0-4=4$
7	0	$1.0+1.0=0$	$1.4+2.-4=-4$	$0--4=4$
8	0	$1.0+1.0=0$	$1.4+2.4=12$	$0-12=-12$
9	0	$1.0+1.0=0$	$1.-12+2.4=-4$	$0--4=4$
10	0	$1.0+1.0=0$	$1.4+2.-12=-20$	$0--20=20$
...		...	...	...

Sústava nevyzerá stabilne ... Hodnoty $y(n)$ asi budú rásť do nekonečna.

Vidíme, že nestabilitu nám spôsobujú $b(n)$. Ako vyzerá $B(\Omega)$? $B(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b(n)e^{-j\Omega n} = 1 + 2e^{-j\Omega}$... táto funkcia nemá pre žiadne Ω nulovú hodnotu. Hm ... $B(\Omega)$ nás teda nevaruje ... ako ďalej?

Z transformácia

Nech $x(n)$ je diskrétna postupnosť. Potom Z transformácia tejto postupnosti je:

$$Z\{x(n)\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

, kde $z \in \mathbb{C}$. Oblasť konverencie uvedeného radu môžeme vyjadriť ako:

$$\left\{ z : \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \right| < \infty \right\}$$

Pôvodnú postupnosť môžeme získať pomocou inverznej Z transformácie pomocou vzťahu:

$$x(n) = Z^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{n-1}dz$$

Kde C predstavuje kružnicu $z = re^{j\phi}$, ktorá sa musí nachádzať v oblasti konverencie $X(z)$.

Príklad:

Nech $x(n) = (1, 1)$. Čomu sa rovná $X(z)$?

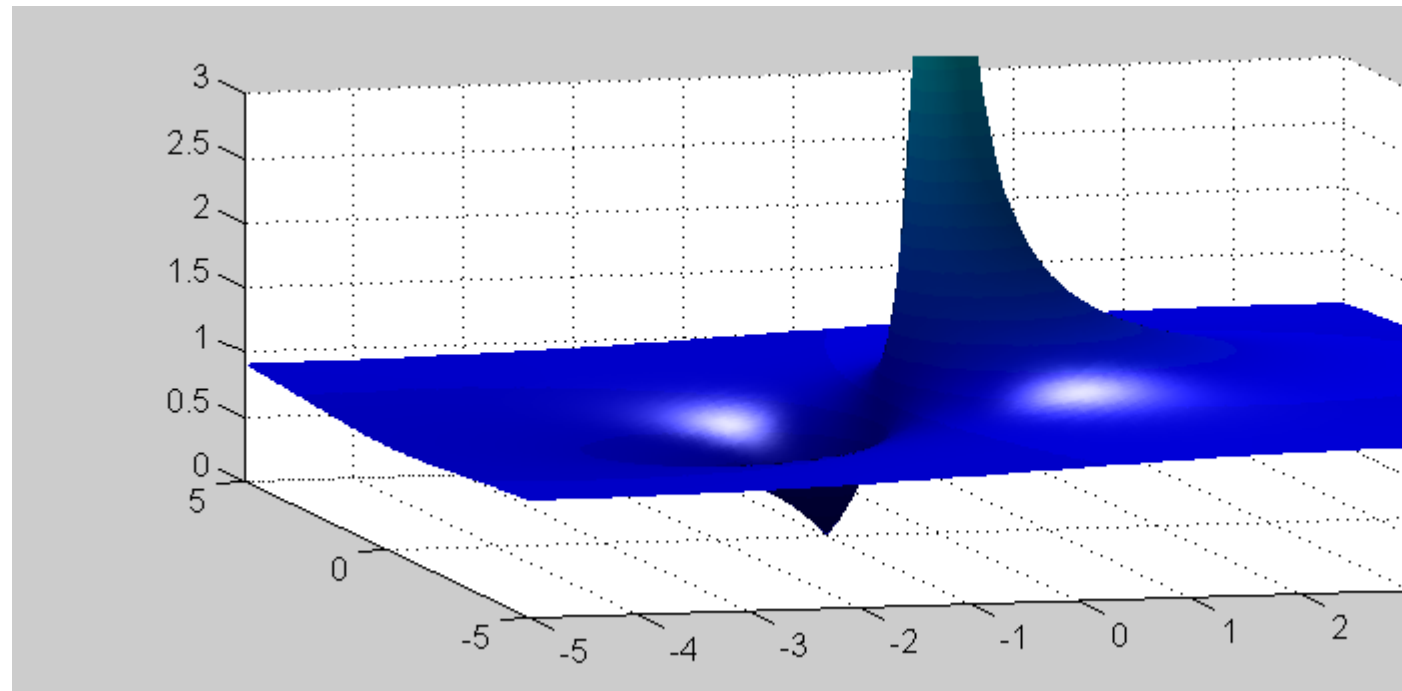
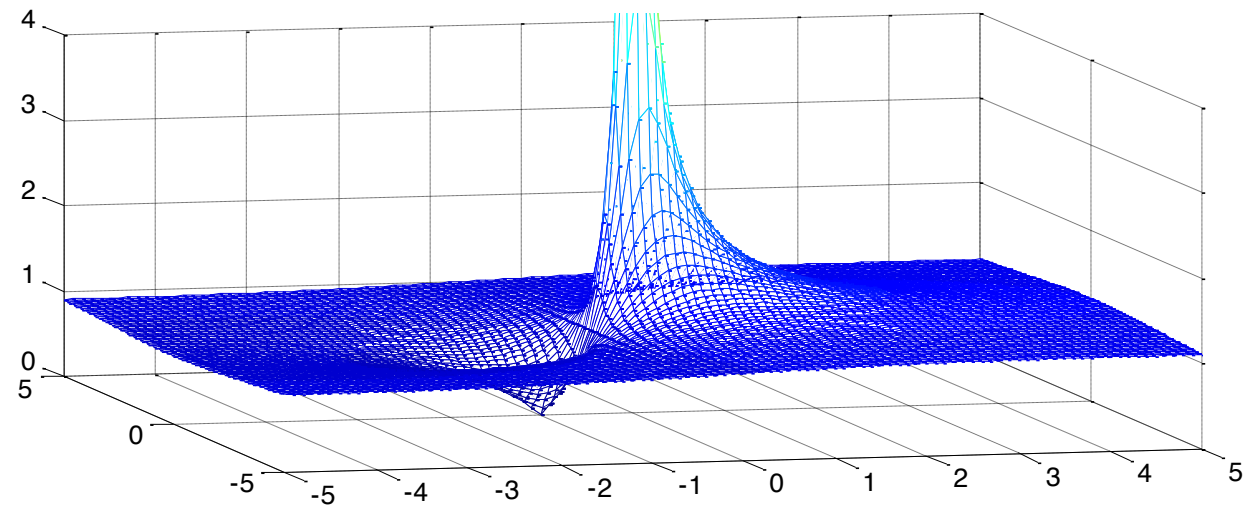
$$X(z) = Z\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \dots + x(0)z^{-0} + x(1)z^{-1} + \dots = 1 + z^{-1} = 1 + \frac{1}{z}$$

Čomu sa rovná $|X(z)|$?

```
[x,y] = meshgrid(-5:0.1:5)
z=x+i*y;
fz=1+1./z
mesh(x,y,abs(fz))
zlim([0,4])
```

```
figure
surf(x,y,abs(fz),'FaceColor','interp',...
    'EdgeColor','none',...
    'FaceLighting','phong')
camlight left
zlim([0,3])
```

$|X(z)|$



Ako zobrazenie zjednodušiť ?