Dostali sme vzorce na výpočet Diskrétnej Fourierovej transformácie (DFT) a inverznej DFT:

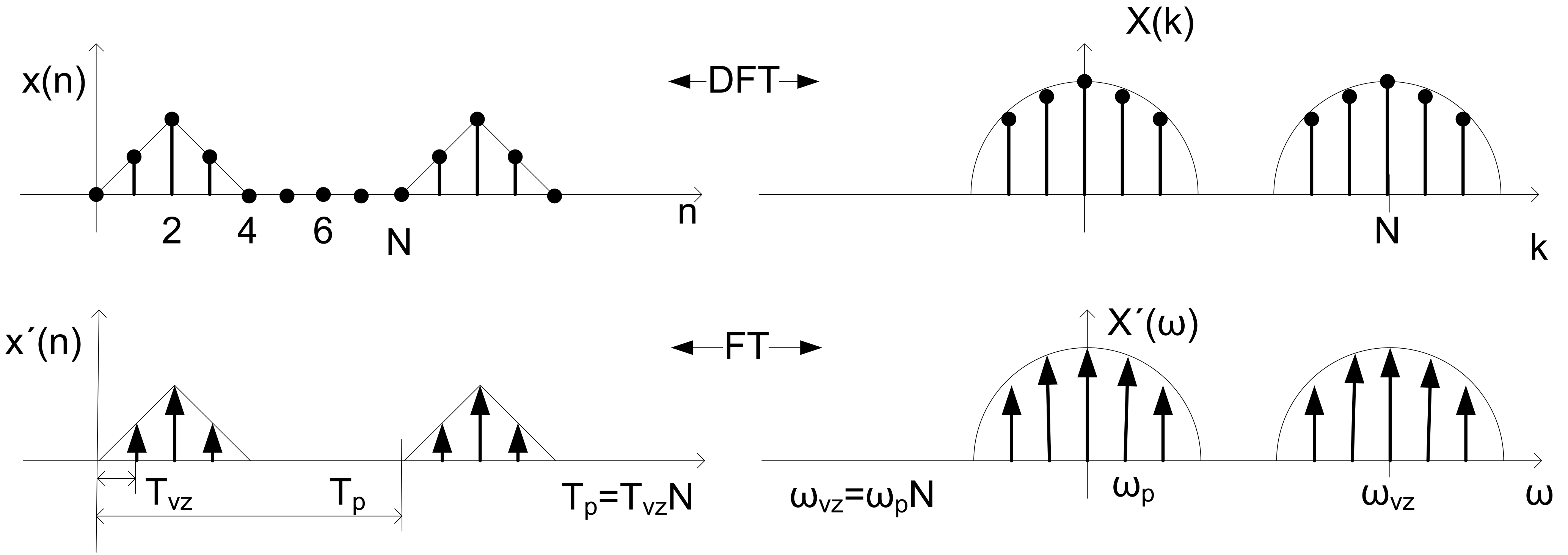
$$DFT: \qquad X(k) = \sum_n x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_n x(n) W_N^{-kn}$$

$$DFT^{-1}: \qquad x(n) = \frac{1}{N} \sum_k X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N} \sum_k X(k) W_N^{kn}$$

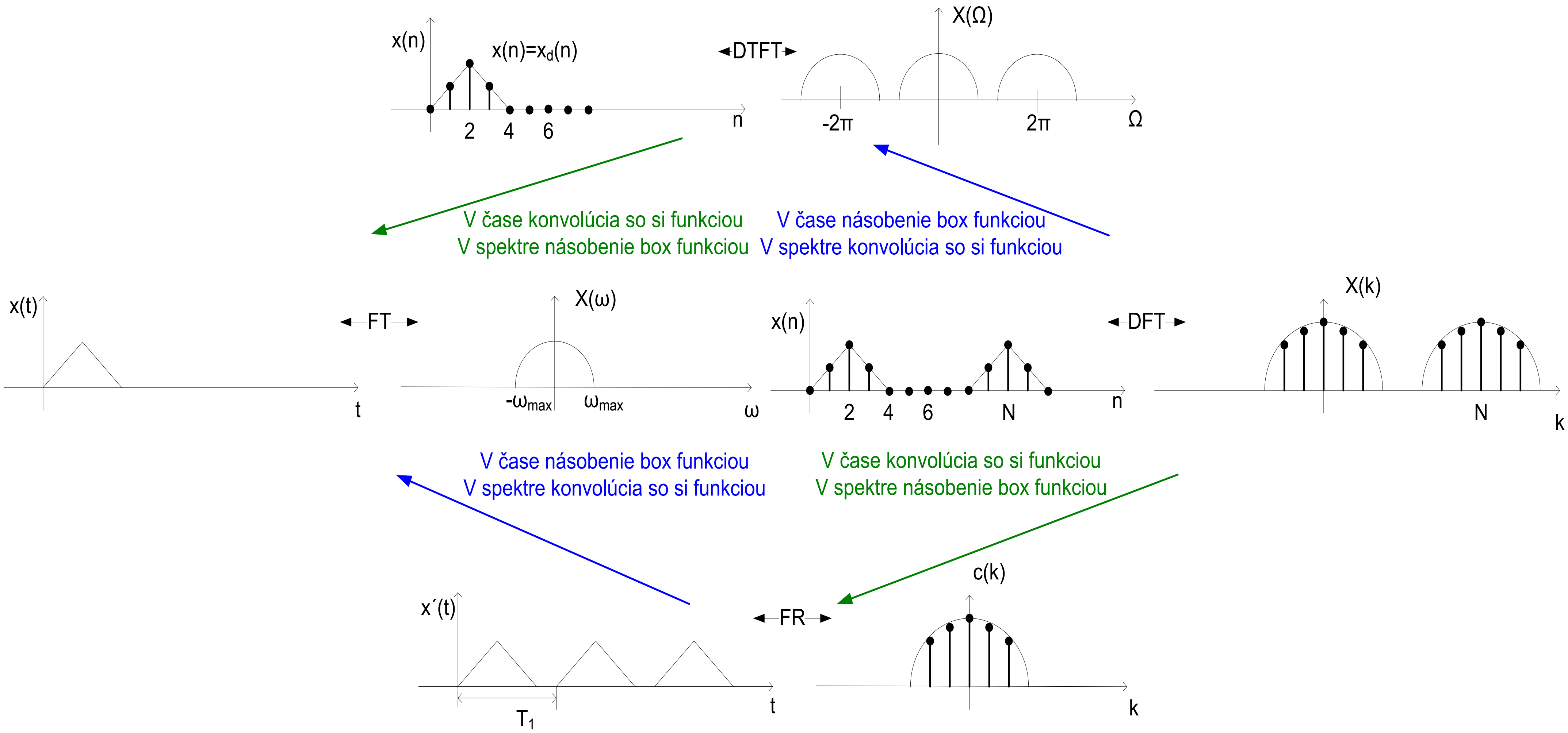
kde $W_N = e^{j\frac{2\pi}{N}}$

Teda transformujeme signál s periódou N vzoriek na spektrum s periódou N.

Keď vieme aká bola vzorkovacia frekvencia, vieme nakresliť obraz toho, čo sa deje aj v „spojitom čase“ a „spojitej frekvencii“:



Rekonštrukcia „pôvodného“ spojitého neperiodického signálu z periodicky sa opakujúcich sa vzoriek.



- Musíme si byť vedomí prítomnosti istého aliasingu (ak sme vhodne vzorkovali tak zanedbateľnému) v čase aj frekvencii.

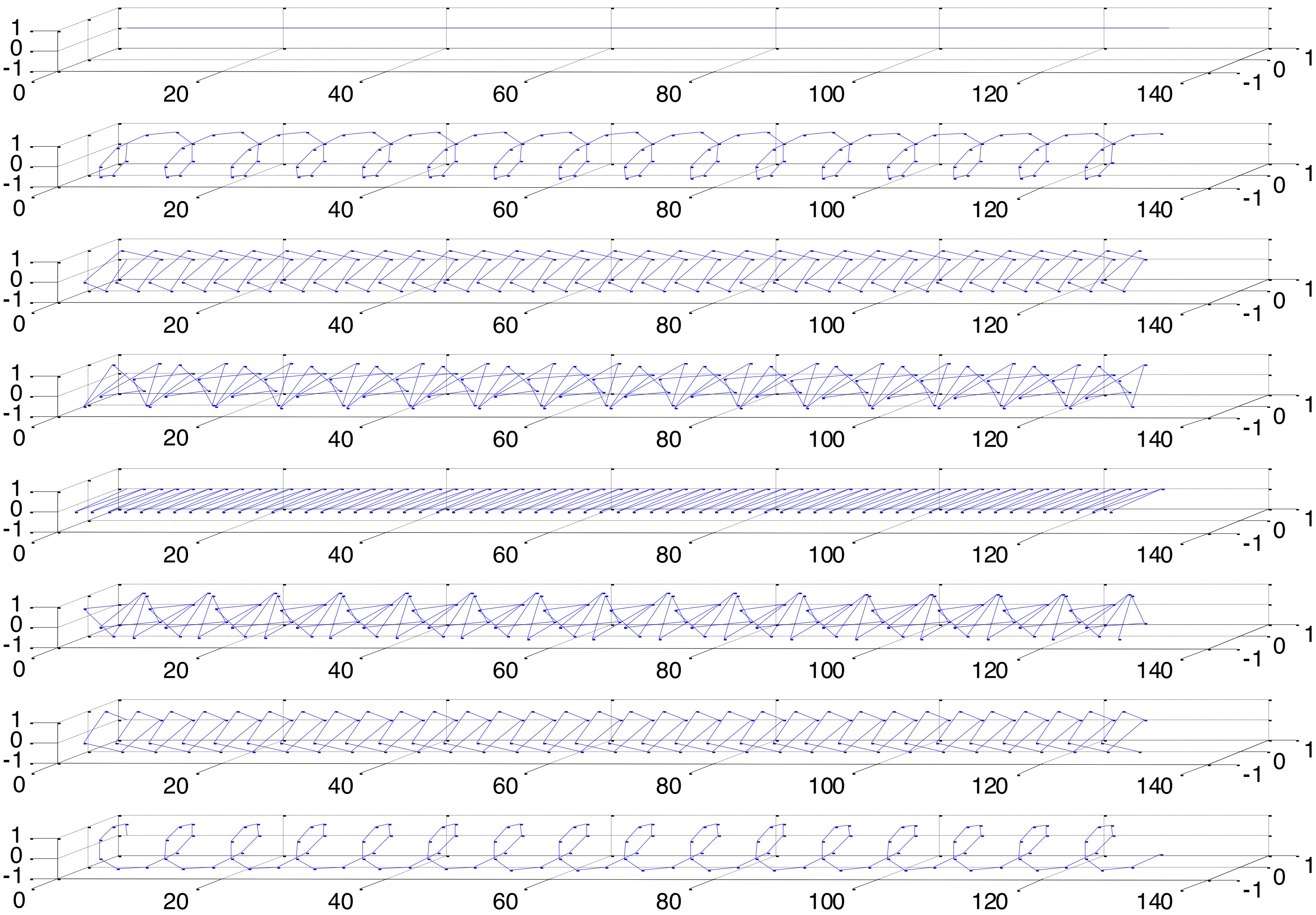
Zápis DFT v maticovom tvare

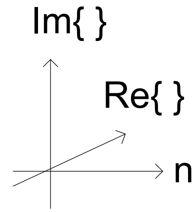
Druh	Povodný zápis	Maticový zápis
DFT	$X(k)=\sum_{n} x(n) W_N^{-kn}$	$\mathbf{X}=\begin{pmatrix} X(0) \\ \ldots \\ X(N-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} W_N^{-00} & \ldots & W_N^{-0(N-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ W_N^{-(N-1)0} & \ldots & W_N^{-(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(0) \\ \ldots \\ x(N-1) \end{pmatrix}=\mathbf{DFT}_N\mathbf{x}$
DFT^{-1}	$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k} X(k) W_N^{kn}$	$\mathbf{x}=\frac{1}{N}\begin{pmatrix} W_N^{00} & \ldots & W_N^{0(N-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ W_N^{(N-1)0} & \ldots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X(0) \\ \ldots \\ X(N-1) \end{pmatrix}=\mathbf{DFT}^{-1}{}_N\mathbf{X}$

Poznámka:

- platí: $\mathbf{x}=\mathbf{DFT}^{-1}{}_N\mathbf{X}=\mathbf{DFT}^{-1}{}_N\left(\mathbf{DFT}_N\mathbf{x}\right)=\left(\mathbf{DFT}^{-1}{}_N\mathbf{DFT}_N\right)\mathbf{x}=\mathbf{I}_N\mathbf{x}=\mathbf{x}$
- $\mathbf{DFT}^{-1}{}_N=\frac{1}{N}\,transponovaná(konjugovaná(\mathbf{DFT}_N))$

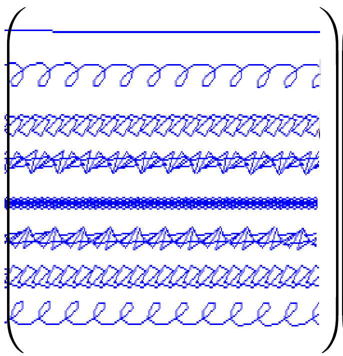
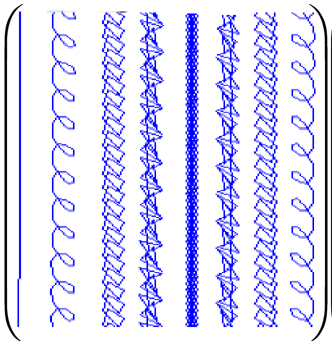
Ako vyzerajú funkcie v riadkoch $\mathbf{DFT}_N$, Nech N=128. Zobrazujeme pre k=0, 16, 32, 64, 80, 96.
Ako vyzerajú stĺpce? Tak isto. Matica je **symetrická**.





Čo pozorujeme keď sa pozrieme na tuto sadu funkcii?

- Najväčsie frekvencie sú pri N/2, potom frekvencia klesá (pričom špirála sa otáča naopak)
- Všetky tieto funkcie sú na seba navzájom ortogonálne (ich skalárny súčin je 0).
- Pri riadkoch a stĺpcoch matice $\mathbf{DFT}^{-1}{}_N$ by sme pozorovali to isté, len špirály by sa točili opačným smerom

Druh	Maticový zápis	Interpretácia
DFT	$\mathbf{X} = \mathbf{DFT}_N \mathbf{x}$ $\begin{pmatrix} X(0) \\ \dots \\ X(N-1) \end{pmatrix} =$  $\begin{pmatrix} x(0) \\ \dots \\ x(N-1) \end{pmatrix}$	$X(k) = \left\langle DFT_{N,riadok\,k}(n), x(n) \right\rangle$ ako sa „podobá“ signál na jednotlivé riadky matice?
DFT^{-1}	$\mathbf{x} = \mathbf{DFT}^{-1}{}_N \mathbf{X}$ $\begin{pmatrix} x(0) \\ \dots \\ x(N-1) \end{pmatrix} =$  $\begin{pmatrix} X(0) \\ \dots \\ X(N-1) \end{pmatrix}$	$x(n) = \sum_k X(k) DFT^{-1}_{N,stĺpec\,k}(n)$ ako sa dá signál poskladať z váhovaných stĺpcov matice?

Príklad 1:

Nech x(n)=(1,1,0,0,0,0,0,0) a je periodické s periódou N=8. Čomu sa rovná spektrum?

Porovnajte toto spektrum so signálom so spektrom neperiodického signálu $x_{np}(n) = (\dot{1},1)$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} W_8^{-nk} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ \dots \\ x(7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots \\ 1 & e^{-j\pi/4} & \dots & \dots \\ 1 & e^{-j2\pi/4} & \dots & \dots \\ 1 & e^{-j3\pi/4} & \dots & \dots \\ 1 & e^{-j4\pi/4} & \dots & \dots \\ 1 & e^{-j5\pi/4} & \dots & \dots \\ 1 & e^{-j6\pi/4} & \dots & \dots \\ 1 & e^{-j7\pi/4} & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1+e^{-j\pi/4} \\ 1-j \\ 1+e^{-j3\pi/4} \\ 0 \\ 1+e^{+j3\pi/4} \\ 1+j \\ 1+e^{+j\pi/4} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-j\pi/8}\cos(\pi/8) \\ e^{-j2\pi/8}\cos(2\pi/8) \\ e^{-j3\pi/8}\cos(3\pi/8) \\ e^{-j4\pi/8}\cos(4\pi/8) \\ e^{-j5\pi/8}\cos(5\pi/8) \\ e^{-j6\pi/8}\cos(6\pi/8) \\ e^{-j7\pi/8}\cos(7\pi/8) \end{pmatrix}$$

Využili sme $1 + e^{j\phi} = e^{j\phi/2}(e^{-j\phi/2} + e^{j\phi/2})$

.

$X_{np}(\Omega) = 2e^{-j\Omega/2}\cos(\Omega/2)$

Vidíme, že X(k) sú vzorkami z $X_{np}(\Omega)$ v bodoch $\Omega = 2\pi k / N$.

Príklad 2:

Majme spektrum X(k)=8(0,j,0,0,0,0,0-j) a je periodické s periódou N=8. Akému signálu Odpovedá?

$$\mathbf{x}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix} W_8^{nk} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X(0) \\ \dots \\ X(7) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{j\pi/4} & \dots & e^{-j\pi/4} \\ 1 & e^{j2\pi/4} & \dots & e^{-j2\pi/4} \\ 1 & e^{j3\pi/4} & \dots & e^{-j3\pi/4} \\ 1 & e^{j4\pi/4} & \dots & e^{-j4\pi/4} \\ 1 & e^{j5\pi/4} & \dots & e^{-j5\pi/4} \\ 1 & e^{j6\pi/4} & \dots & e^{-j6\pi/4} \\ 1 & e^{j7\pi/4} & \dots & e^{-j7\pi/4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ j \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -j \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{j2\pi/4}+e^{-j2\pi/4} \\ e^{j3\pi/4}+e^{-j3\pi/4} \\ e^{j4\pi/4}+e^{-j4\pi/4} \\ e^{j5\pi/4}+e^{-j5\pi/4} \\ e^{j6\pi/4}+e^{-j6\pi/4} \\ e^{j7\pi/4}+e^{-j7\pi/4} \\ e^{j8\pi/4}+e^{-j8\pi/4} \\ e^{j9\pi/4}+e^{-j9\pi/4} \end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\pi/4) \\ \sin(2\pi/4) \\ \sin(3\pi/4) \\ \sin(4\pi/4) \\ \sin(5\pi/4) \\ \sin(6\pi/4) \\ \sin(7\pi/4) \end{pmatrix}$$

Využili sme $e^{j\phi}+e^{-j\phi}=2\cos(\phi)$, $\sin(\phi+\pi/2)=\cos(\phi)$, $\sin(\phi+\pi)=-\sin(\phi)$

Rýchlejší algoritmus výpočtu DFT? Áno existuje.

- Ako na to? Využijeme symetrie a identity medzi jednotlivými W_N^{nk}
- Postupy
  - Decimácia v Čase
  - Decimácia vo frekvencii

Decimácia vo frekvencii

$$X(k)=\sum_{n} x(n) W_N^{-kn}$$

Vyjadrime si párne a nepárne **frekvečné** vzorky.

Párne

$$X(2r)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-2rn} =$$

$$=\sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) W_N^{-2rn} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n+N/2) W_N^{-2r(n+N/2)}$$

Platí:

$$W_N^{-2r(n+N/2)} = W_N^{-2rn} W_N^{-rN} = W_N^{-2rn}$$

Potom:

$$X(2r)=\sum_{n=0}^{N/2-1} \left[x(n)+x(n+N/2)\right] W_N^{-2rn}$$

Keďže platí $W_N^{-2rn} = W_{N/2}^{-rn}$

Dostaneme výsledok:

$$X(2r)=\sum_{n=0}^{N/2-1} \left[x(n)+x(n+N/2)\right] W_{N/2}^{-rn}$$

$$X(2r)=DFT_{N/2}\left[x(n)+x(n+N/2)\right]$$

Nepárne

$$X(2r+1)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-(2r+1)n} =$$

$$=\sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) W_N^{-(2r+1)n} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n+N/2) W_N^{-(2r+1)(n+N/2)}$$

Platí:

$$W_N^{-(2r+1)(n+N/2)} = W_N^{-(2r+1)n} W_N^{-rN} W_N^{-N/2} = W_N^{-(2r-1)n}(-1)$$

Potom:

$$X(2r+1)=\sum_{n=0}^{N/2-1} \left[x(n)-x(n+N/2)\right] W_N^{-(2r+1)n}$$

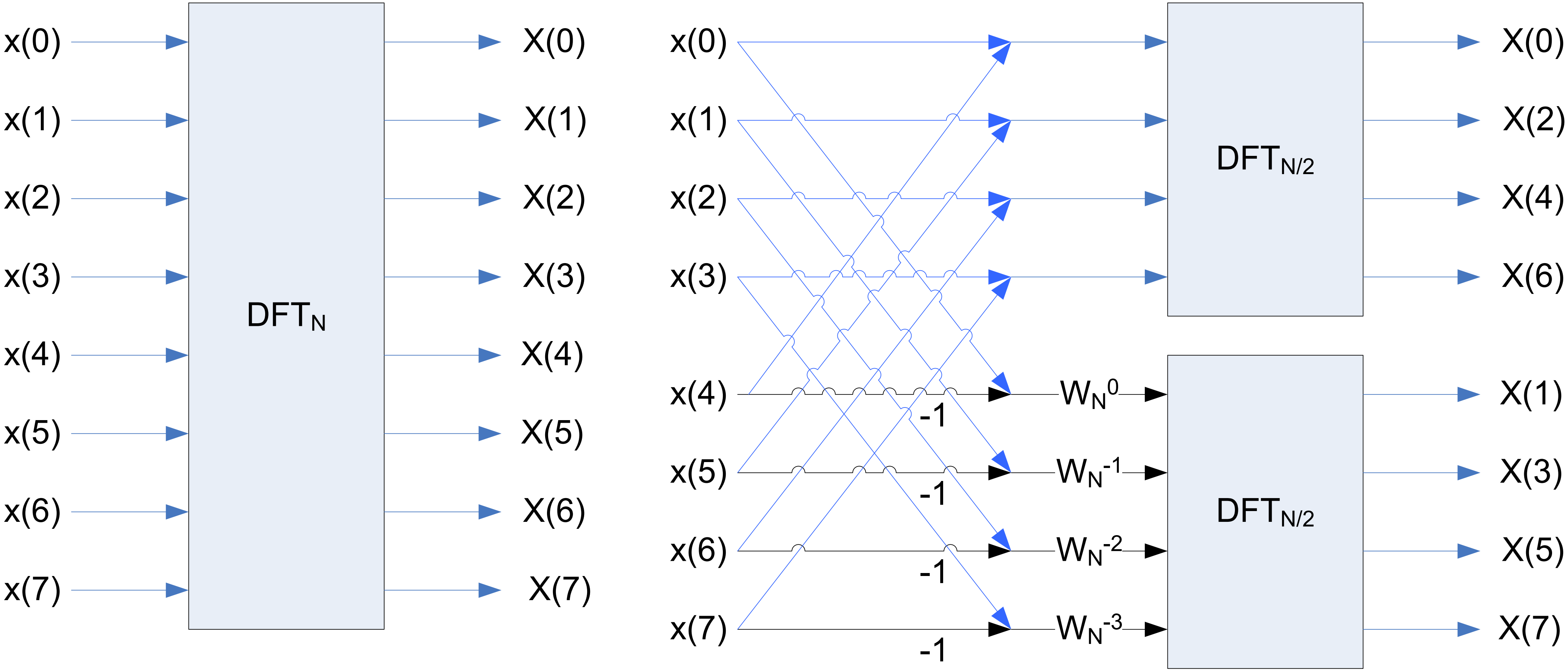
Keďže platí $W_N^{-(2r+1)n} = W_{N/2}^{-rn} W_N^{n}$

Dostaneme výsledok:

$$X(2r+1)=\sum_{n=0}^{N/2-1} \left[x(n)-x(n+N/2)\right] W_N^{n} W_{N/2}^{-rn}$$

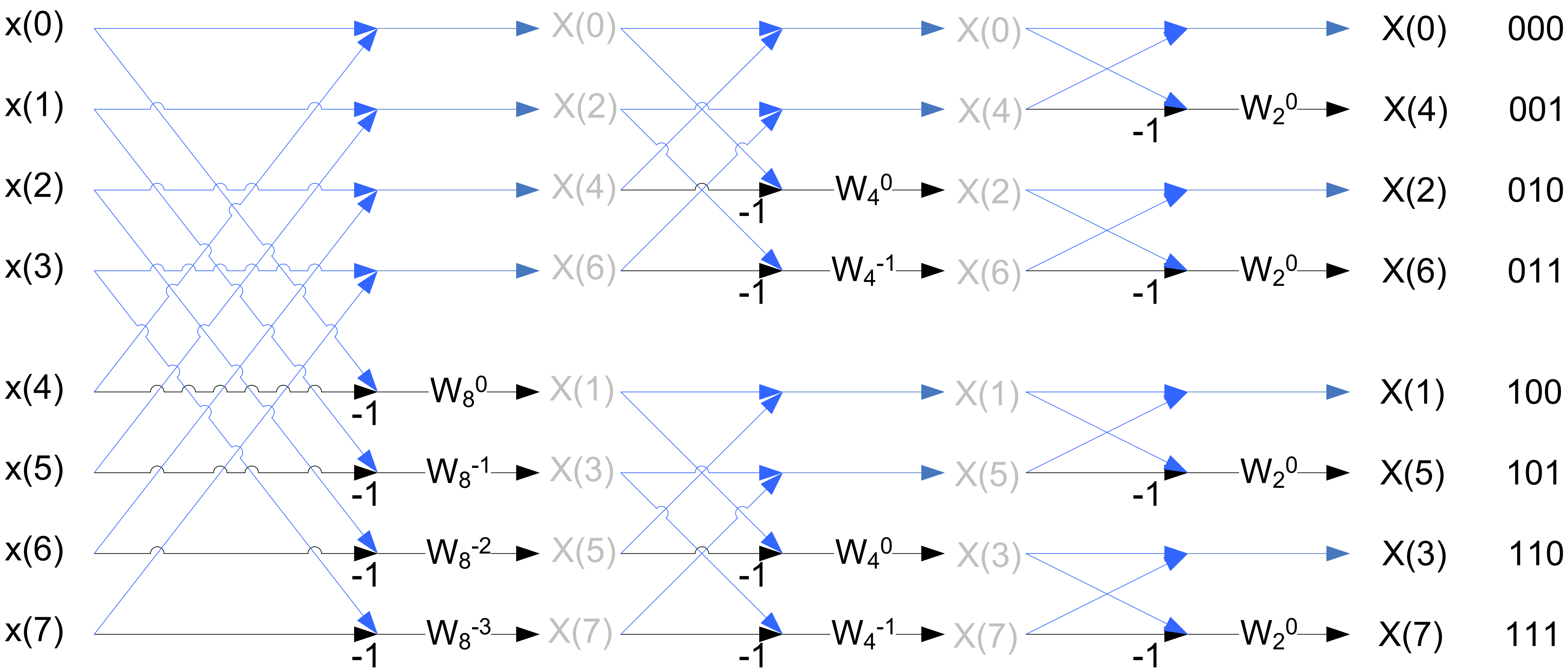
$$X(2r+1)=DFT_{N/2}\left[\left(x(n)-x(n+N/2)\right) W_N^{n}\right]$$

Ako sa zmení situácia po jednorazovom aplikovaní decimácie vo frekvencii:



Decimáciu vo frekvencii môžeme opakovať pre polovičné jadrá daľej a ďalej …

Rýchly algoritmus výpočtu DFT založený na Decimácii vo frekvencii (príklad pri N=8)



Decimácia v čase

$$X(k) = \sum_{n} x(n) W_N^{-nk}$$

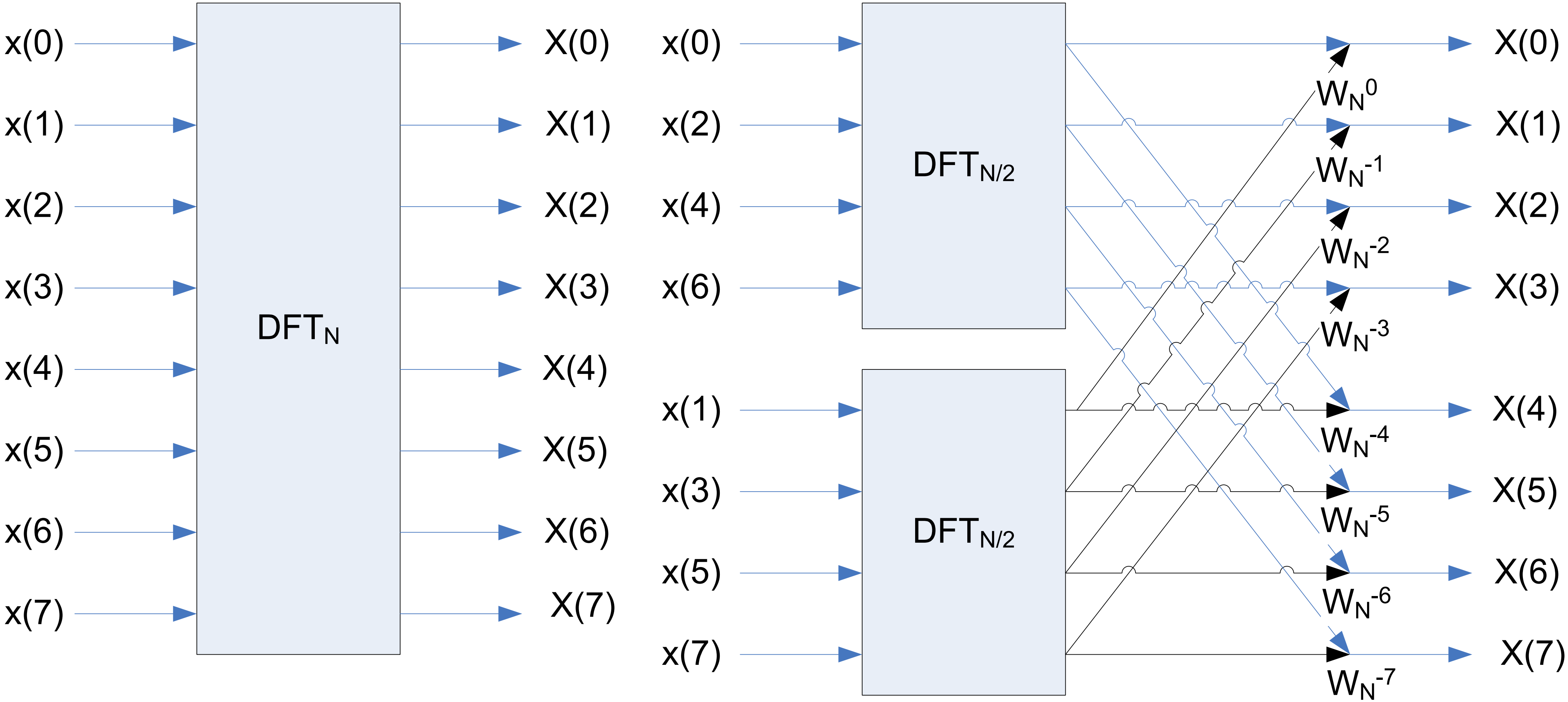
Oddeľme párne a nepárne **časové** vzorky.

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-nk} = \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r) W_N^{-2rk} + \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r+1) W_N^{-(2r+1)k} =$$

$$= \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r) W_{N/2}^{-rk} + W_N^{-k} \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r+1) W_{N/2}^{-rk} = DFT_{N/2}\left[x(2r)\right] + W_N^{-k} DFT_{N/2}\left[x(2r+1)\right]$$

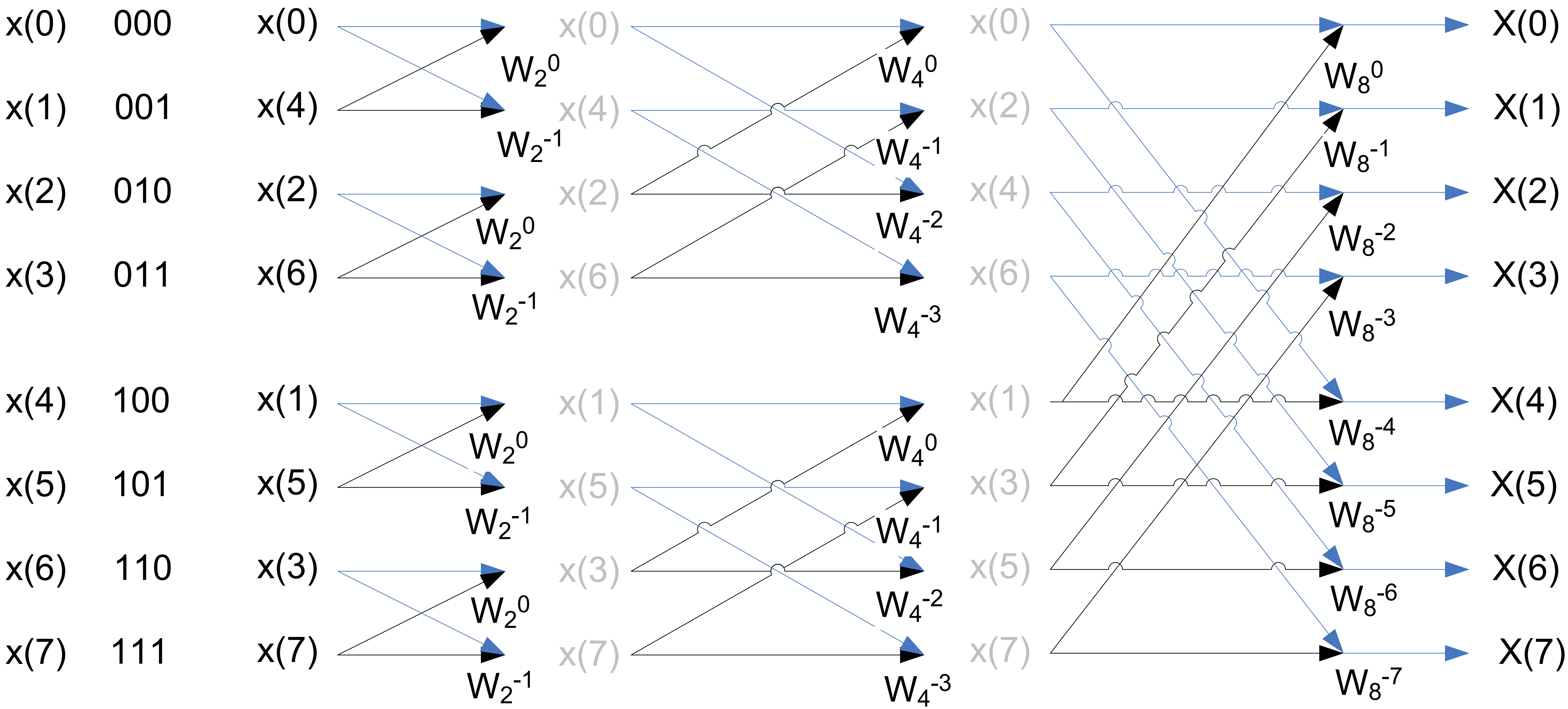
Pozor: $DFT_{N/2}$ rovnako prispieva ku $X(k)$ pre k=0, 1,..N/2-1 ako aj pre $X(k)$ k=N/2-1,…,N-1

Ako sa zmení situácia po jednorazovom aplikovaní decimácie v čase:



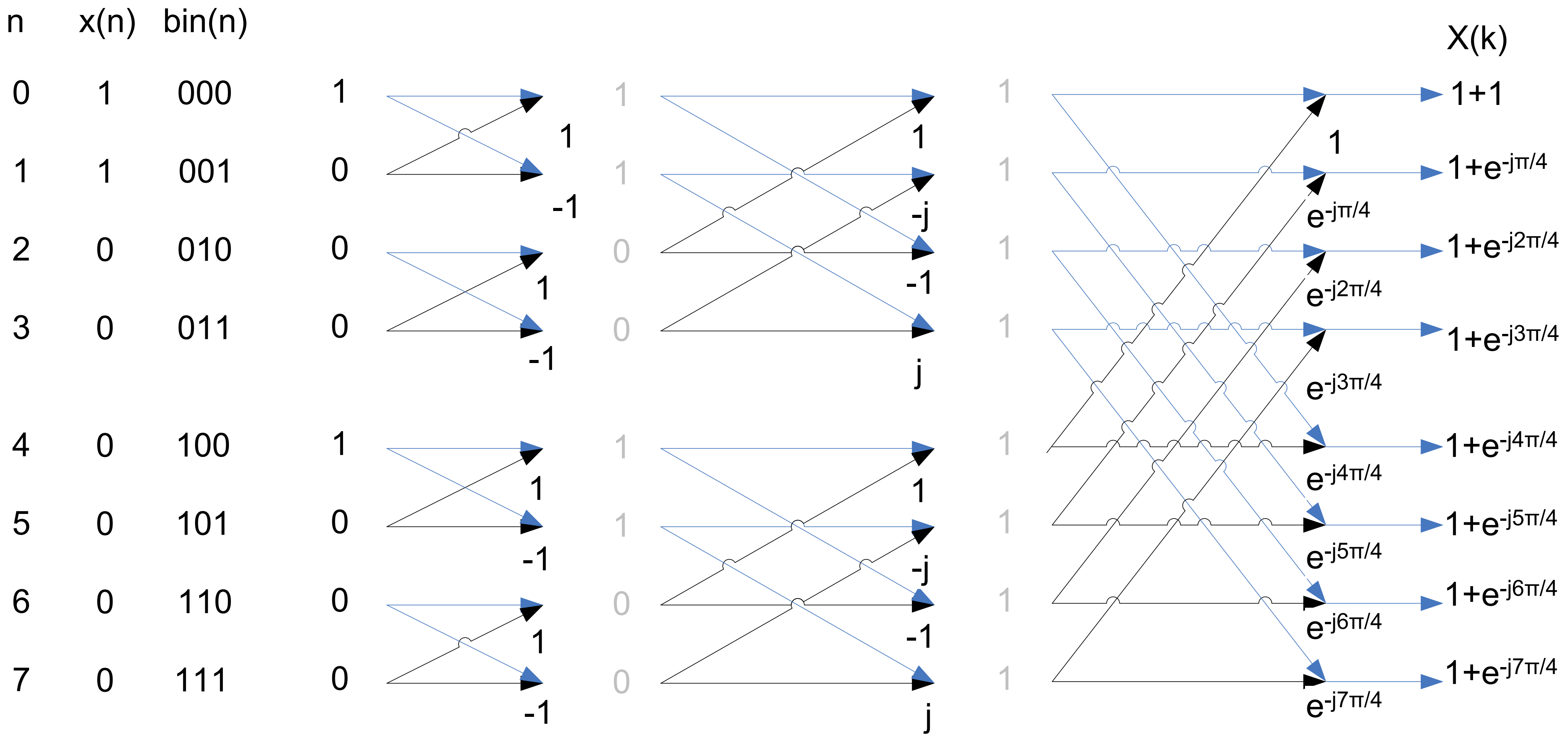
Decimáciu vo frekvencii môžeme opakovať pre polovičné jadrá daľej a ďalej …

Rýchly algoritmus výpočtu DFT založený na Decimácii v Čase (príklad pri N=8)



Príklad:

Nech $x(n)=(1,1,0,0,0,0,0,0)$ a je periodické s periódou $N=8$. Čomu sa rovná spektrum?
Pri výpočte použite decimáciu v Čase.



Na inverznú DFT chceme použiť ten istý algoritmus.

- Prečo je to také dôležité?
- Ako na to?

$DFT(x(n))$ $$X(k)=\sum_n x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}=\sum_n x(n)W_N^{-kn}$$

$DFT^{-1}(X(k)):$ $$x(n)=\frac{1}{N}\sum_k X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}=\frac{1}{N}\sum_k X(k)W_N^{kn}$$ kde $W_N=e^{j\frac{2\pi}{N}}$

Upravme:

$$DFT(\overline{x(n)})=\sum_n \overline{x(n)}W_N^{-kn}=\overline{\overline{\sum_n \overline{x(n)}W_N^{-kn}}}=\overline{\sum_n x(n)W_N^{kn}}=\overline{N\,DFT^{-1}(x(n))}$$

Z toho:

$$DFT^{-1}(x(n))=\overline{\frac{1}{N}DFT(\overline{x(n)})}$$ resp. $$DFT^{-1}(X(k))=\overline{\frac{1}{N}DFT(\overline{X(k)})}$$

Ak náš bol reálny, potom konjugácia spektra odpovedá „preusporiadaniu spektra“, kde prvky X(0) a X(N/2) necháme na svojich miestach a ostatné „pretočíme“ okolo bodu X(N/2). Výsledkom je teda postup:

1) Preusporiadame spektrum
2) Vypoćítame DFT

3) Výsledok podelíme N

Príklad 2:

Majme spektrum X(k)=8(0,0,j,0,0,0,-j,0) periodické s periódou N=8. Akému signálu odpovedá?

X(k)	X(k) preusporiadane	n	bin(n)
0	0	0	000
0	0	1	001
8j	-8j	2	010
0	0	3	011
0	0	4	100
0	0	5	101
-8j	8j	6	110
0	0	7	111