

# FOURIEROVA TRANSFORMÁCIA (POKRAČOVANIE)

## Veta o kmitočtovom posunutí (modulačný teorém)

Operácia v kmitočtovej oblasti, ktorá je obdobou oneskorenia signálu v časovej oblasti.

Ak zavedieme substitúciu  $\Omega = \omega \pm \omega_0$  dostaneme:

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt$$

$$X(\omega \pm \omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j(\omega \pm \omega_0)t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) e^{\mp j\omega_0 t}] e^{-j\omega t} dt$$

Dostávame:

$$X(\omega + \omega_0) \rightarrow x(t) e^{-j\omega_0 t}$$

$$X(\omega - \omega_0) \rightarrow x(t) e^{j\omega_0 t}$$

Čomu sa rovná?

$$x_1(t) = x(t) \cos \omega_0 t$$

Použitím alternatívneho vyjadrenia pomocou goniometrických funkcií:

$$\begin{aligned} x(t)(\cos \omega_0 t - j \sin \omega_0 t) &\rightarrow X(\omega + \omega_0) \\ x(t)(\cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t) &\rightarrow X(\omega - \omega_0) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad x_1(t) = x(t) \cos \omega_0 t \rightarrow \frac{1}{2} X(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2} X(\omega - \omega_0) = X_1(\omega)$$

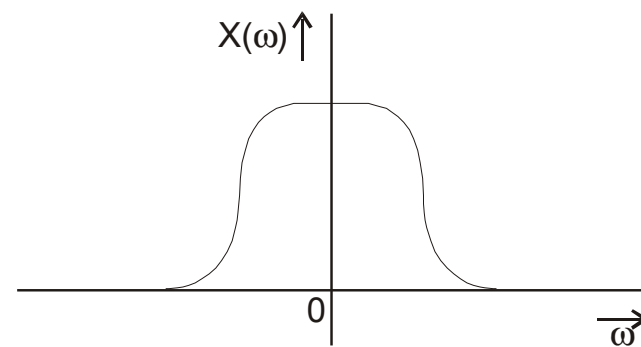
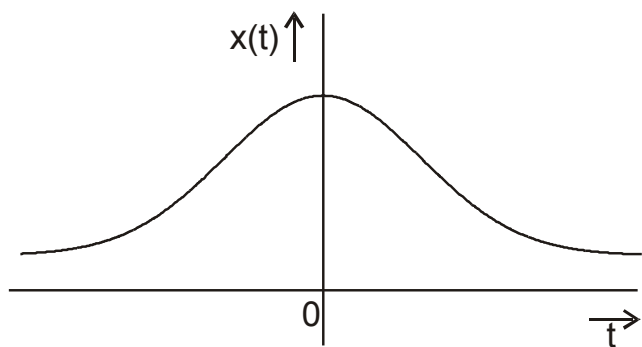
**Posunutie spektrálnej funkcie  $X(\omega)$  o hodnotu  $\omega_0$  a  $-\omega_0$  odpovedá násobeniu signálu  $x(t)$  reálnym harmonickým signálom.**

Signál  $x_1(t)$  odpovedá amplitúdovo namodulovanému signálu s potlačenou nosnou frekvenciou:

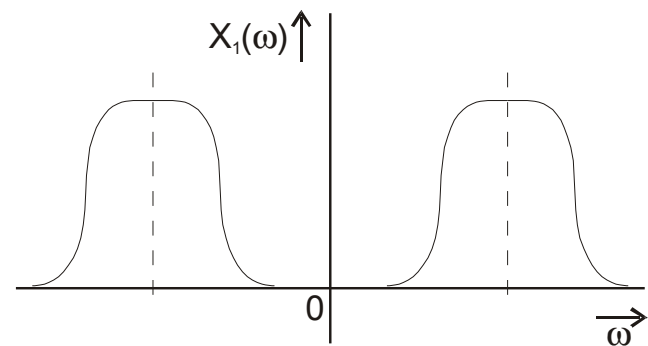
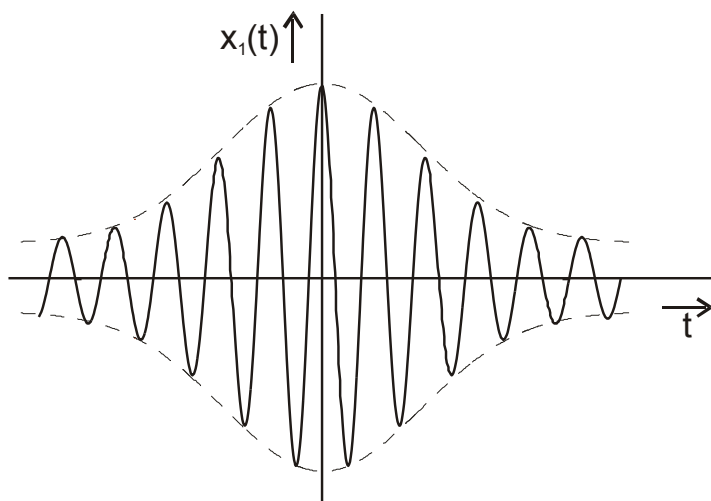
Signál  $x(t)$  predstavuje **modulačný signál**.

Signál  $\cos \omega_0 t$  je **nosným signálom** s frekvenciou  $\omega_0$ .

# Ilustrácia násobenia signálu $x(t)$ reálnym harmonickým signálom

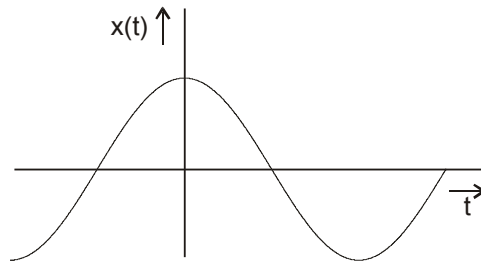


a)

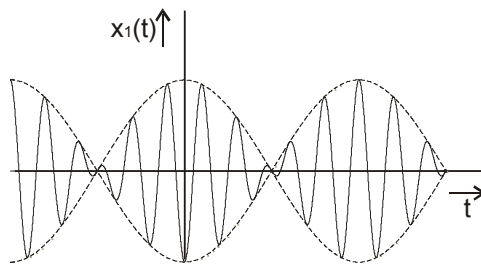
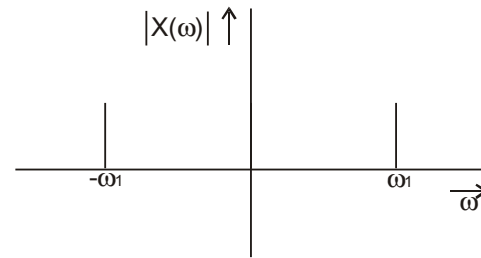


b)

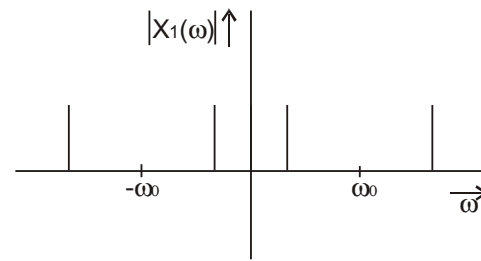
Amplitúdová modulácia keď modulačný signál je harmonický signál  $A \cos \omega_1 t$ .



a)



b)



## Veta o súčine (konvolúcii) signálov a spektra

### 4. Konvolúcia v kmitočtovej oblasti

Ak signál  $x(t)$  vyjadríme ako súčin dvoch signálov  $x(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$

$$x_1(t) \rightarrow X_1(\omega)$$

Pričom  $x_2(t) \rightarrow X_2(\omega)$

Potom pre Fourierov obraz signálu  $x(t)$  platí

$$F\{x(t)\} = F\{x_1(t) \cdot x_2(t)\} = X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) \cdot x_2(t) e^{-j\omega t} dt$$

Použitím substitúcie  $\omega = \Omega$   
 $d\omega = d\Omega$

môžeme funkciu  $x_1(t)$  vyjadriť v tvare  $x_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$

Dosadením a po úprave dostaneme

$$F\{x_1(t) \cdot x_2(t)\} = X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \right] x_2(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\Omega) \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t) e^{-j(\omega-\Omega)t} dt d\Omega$$

Na základe vety o kmitočtovom posunutí platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t) e^{-j(\omega-\Omega)t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t) e^{j\Omega t} e^{-j\omega t} dt = X(\omega - \Omega)$$

Dosadením dostaneme  $F\{x_1(t) \cdot x_2(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\Omega) \cdot X_2(\omega - \Omega) d\Omega = \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega) = X_1(f) * X_2(f)$

Poznámka:

Vyjadrením  $x_2(t)$  namiesto  $x_1(t)$

$$x_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega}^{\infty} X_2(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

dospejeme k tomu istému vzťahu:

$$F\{x_1(t) \cdot x_2(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_2(\Omega) \cdot X_1(\omega - \Omega) d\Omega = X_1(f) * X_2(f)$$

**Súčinu dvoch signálov v časovej oblasti zodpovedá konvolúcia ich spektrálnych funkcií v kmitočtovej oblasti.**

### B. Konvolúcia v časovej oblasti

Predpokladajme, že funkciu  $X(\omega)$  môžeme vyjadriť ako súčin dvoch funkcií:

$$X(\omega) = X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)$$

Platí

$$x(t) = F^{-1}\{X(\omega)\} = F^{-1}\{X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)] e^{j\omega t} d\omega$$

$$t = \tau$$

Ak použijeme substitúciu  $dt = d\tau$  potom  $X_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$

Dosadením a úpravou dostaneme

$$F^{-1}\{X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)\} = x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] X_2(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_2(\omega) e^{j\omega(t-\tau)} d\omega \right] d\tau$$

Na základe vety o časovom posunutí signálu

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_2(\omega) e^{j\omega(t-\tau)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_2(\omega) e^{-j\omega\tau} e^{j\omega t} d\omega = x(t - \tau)$$

Dosadením dostávame výsledok:

$$F^{-1}\{X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau) d\tau = x_1(t) * x_2(t)$$

Poznámka:

Vyjadrením  $X_2(\omega)$  namiesto  $X_1(\omega)$

$$X_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

dospejeme k tomu istému vzťahu:

$$F^{-1}\{X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau) \cdot x_1(t - \tau) d\tau = x_1(t) * x_2(t)$$

Platí:

**Súčinu dvoch signálov v kmitočtovej oblasti odpovedá konvolúcia príslušných signálov v časovej oblasti.**

**Konvolúcia je teda vzájomnú súvislosť medzi násobením dvoch signálov na jednej strane (napr. v kmitočtovej oblasti) a odpovedajúcou operáciou (konvolútorný súčin) na druhej strane (v časovej oblasti).**



# FOURIEROVA TRANSFORMÁCIA-VLASTNOSTI

- Platí  $x(t) \xleftrightarrow{FT} X(\omega)$  ,  $t, x(t) \in R$ ;  $X(\omega) \in C$
- Platí  $y(t) \xleftrightarrow{FT} Y(\omega)$  ,  $t, y(t) \in R$ ;  $Y(\omega) \in C$

| Názov                   | Časová oblasť                                     | Frekvenčná oblasť                                         | Poznámka                                                                                                                                        |
|-------------------------|---------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                         | $x(t)$ , neperiodické<br>$y(t)$ , neperiodické    | $X(\omega)$ , neperiodické<br>$Y(\omega)$ , neperiodické  | $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$<br>$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$ |
| Linearita               | $\alpha x(t) + \beta y(t)$                        | $\alpha X(\omega) + \beta Y(\omega)$                      |                                                                                                                                                 |
| Časové posunutie        | $x(t - t_0)$                                      | $e^{-j\omega t_0} X(\omega)$                              | odvodené                                                                                                                                        |
| Časové otočenie         | $x(-t)$                                           | $X(-\omega)$                                              | odvodené                                                                                                                                        |
| Posunutie vo frekvencii | $x(t) e^{-j\omega_0 t}$<br>$x(t) e^{j\omega_0 t}$ | $X(\omega + \omega_0)$<br>$X(\omega - \omega_0)$          | odvodené                                                                                                                                        |
| Zmena mierky            | $x(at)$                                           | $F\{x(at)\} = \frac{1}{a} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$ | odvodené                                                                                                                                        |
| Konvolúcia v čase       | $x(t) * y(t)$                                     | $X(\omega) Y(\omega) = X(f) Y(f)$                         | odvodené                                                                                                                                        |
| Násobenie v čase        | $x(t) y(t)$                                       | $\frac{1}{2\pi} X(\omega) * Y(\omega) = X(f) * Y(f)$      | odvodené                                                                                                                                        |
| Časová derivácia        | $d^n x(t) / dt^n$                                 | $(j\omega)^n X(\omega)$                                   |                                                                                                                                                 |

|                    |                                         |                                                                                               |          |
|--------------------|-----------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| Časová integrácia  | $\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau;$       | $\frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$                                        |          |
| Symetria v spektre | $x(t)$                                  | $X(\omega) = \bar{X}(-\omega)$                                                                |          |
| Rayleighova veta   | $E = \int_{-\infty}^{\infty} i^2(t) dt$ | $E = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty}  I(\omega) ^2 d\omega = \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega$ | odvodené |
| Dualita            | $X(t)$                                  | $2\pi x(-\omega)$                                                                             | odvodené |

Porovnajte si vlastnosti s vlastnosťami Fourierových radov ...

## Príklady MATLAB

Platí 
$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

- $X(\omega)$  budeme vyhodnocovať iba pre niektoré  $\omega$ .

## Zamyslenie

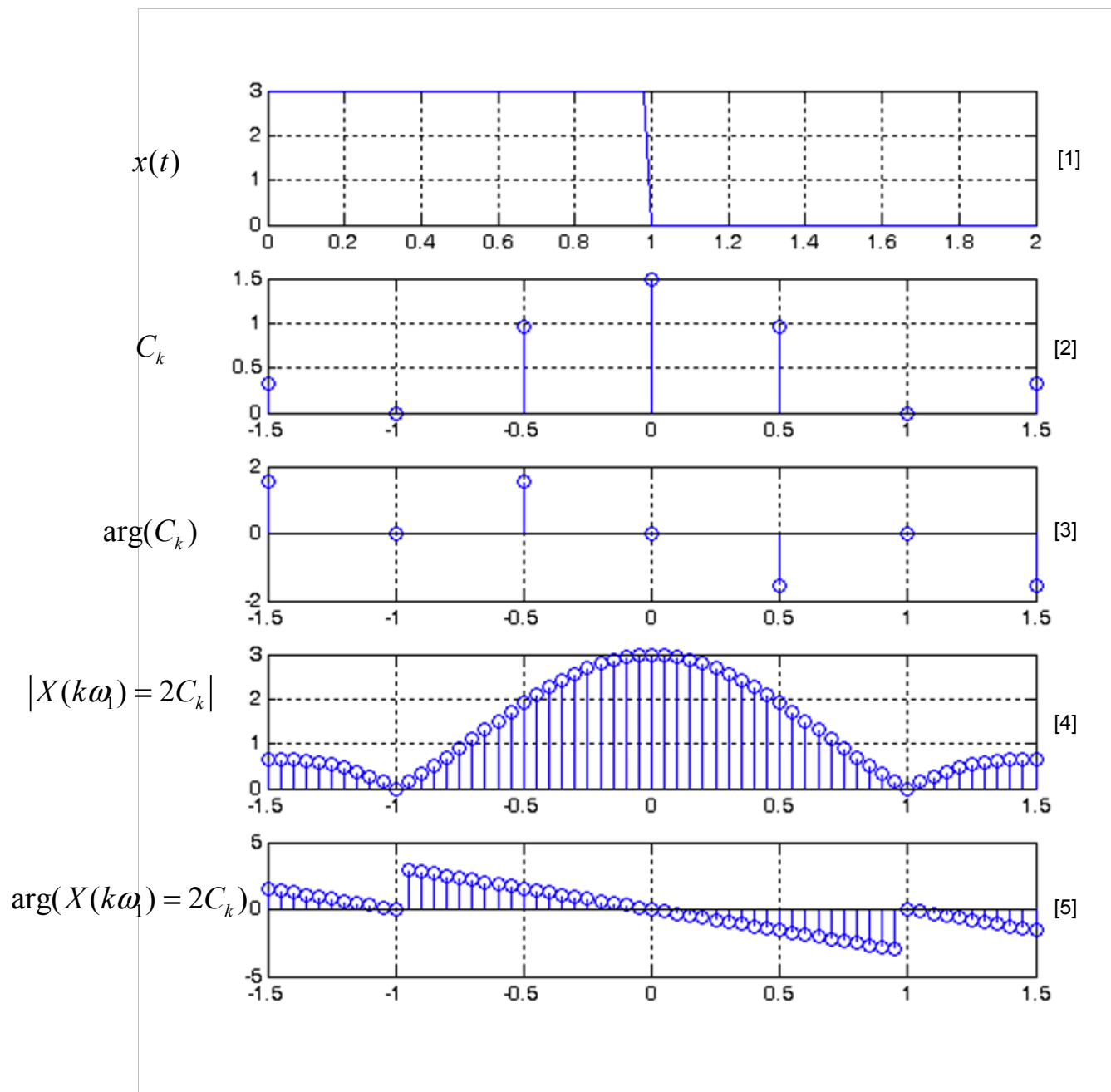
- Čo ak budeme vyhodnocovať hodnotu  $X(\omega)$  v násobkoch  $\omega_1 = 2\pi / T_1$  ? Označme ako  $X(k\omega_1)$ :

$$X(k\omega_1) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_1 t} dt$$

porovnajme so vzorcom na výpočet FR  $C_k = \frac{1}{T_1} \int_{T_1} x(t) e^{-jk\omega_1 t} dt$

Platí: 
$$X(k\omega_1) = T_1 C_k$$

**Porovnanie spektier „box“ funkcie [1]: a) periodickej s periódou 2 -> FR [2][3]b) neperiodickej -> FT [4][5]**  
 (hodnota FT je vypočítaná a nakreslená 10x hustejšie ako je to pri FR)



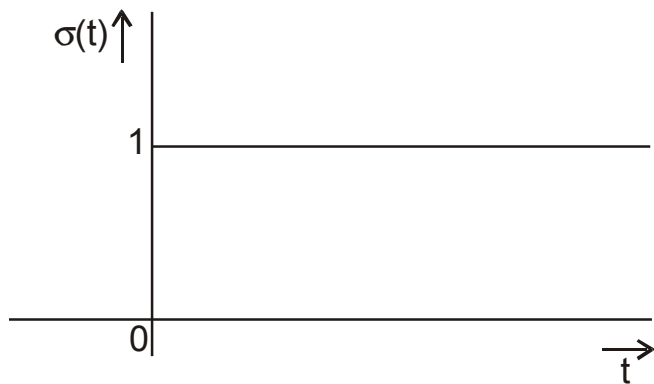
# Fourierova transformácia elementárnych funkcií

## Jednotkový skok

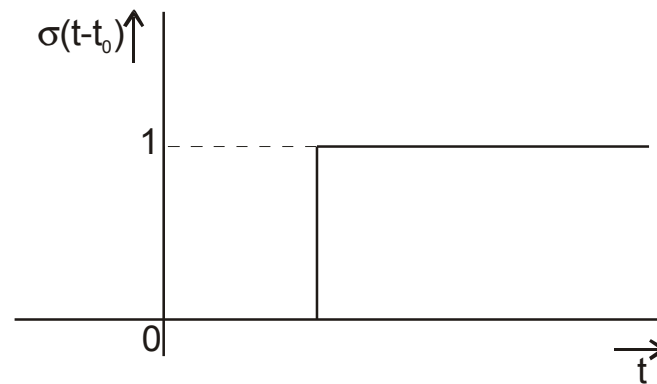
Pre jednotkový skok  $\sigma(t)$  - uvádza tiež pod názvom Heavisideova funkcia platí

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1 & \text{pre } t > 0 \\ 0 & \text{pre } t \leq 0 \end{cases}$$

$$\sigma(t - t_0) = \begin{cases} 1 & \text{pre } t > t_0 \\ 0 & \text{pre } t \leq t_0 \end{cases}$$



a)



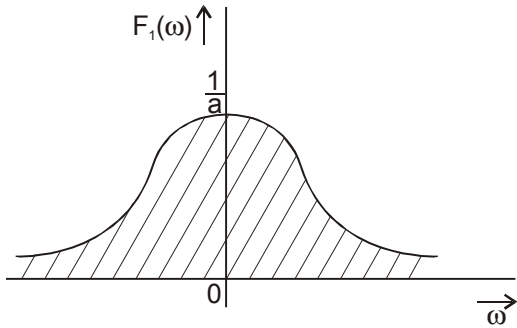
b)

Nahradíme funkciu  $\sigma(t)$  funkciou  $f(t) = \sigma(t)e^{-at}$  pre  $a \rightarrow 0$ .

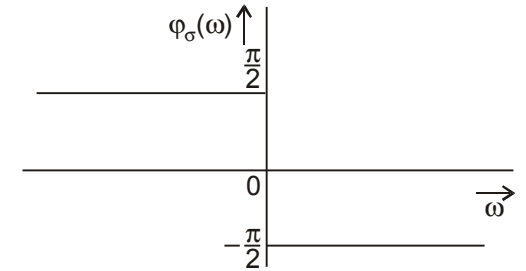
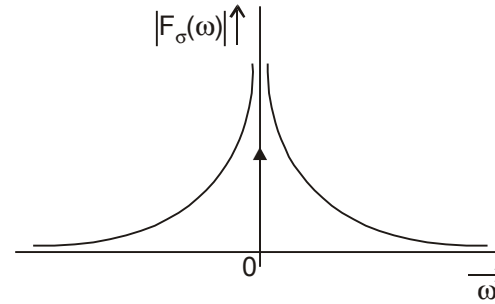
$$\begin{aligned} F\{\sigma(t)e^{-at}\} &= F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t)e^{-at}e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = -\frac{1}{a+j\omega} \left[ e^{-(a+j\omega)t} \right]_0^{\infty} = -\frac{1}{a+j\omega} \left[ \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(a+j\omega)t} - \lim_{t \rightarrow 0} e^{-(a+j\omega)t} \right] = \\ &= -\frac{1}{a+j\omega} [0 - 1] = \frac{1}{a+j\omega} \end{aligned}$$

Hľadáme limitu pre  $a \rightarrow 0$

$$F_{\sigma}(\omega) = \lim_{a \rightarrow 0} F(\omega) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a + j\omega} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{a - j\omega}{a^2 + \omega^2} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{a}{a^2 + \omega^2} + \frac{1}{j\omega} = F_1(\omega) + F_2(\omega)$$



$a \rightarrow 0$



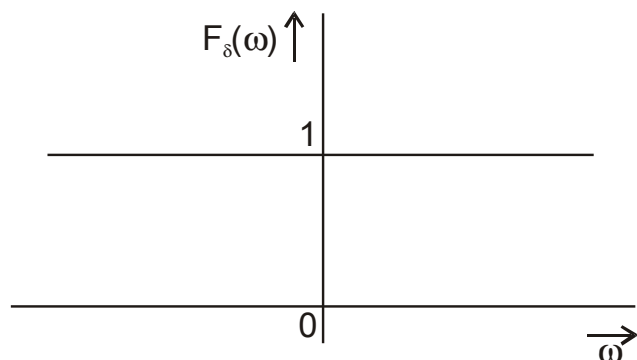
- Plocha pod krivkou  $F_1(\omega)$  je nezávislá na hodnote  $a$ . Jej hodnota je rovná  $\pi$ .
- Pre  $a \rightarrow 0$  sa bude krivka zužovať, ale jej hodnota v okolí bodu  $\omega = 0$  narastáť. V limitnom prípade pre  $a \rightarrow 0$  sa zmení na jednotkový impulz  $\delta(t)$ .
- Spektrálna funkcia jednotkového skoku  $\sigma(t)$  má teda tvar

$$F_{\sigma}(\omega) = F_1(\omega) + F_2(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

## Jednotkový impulz

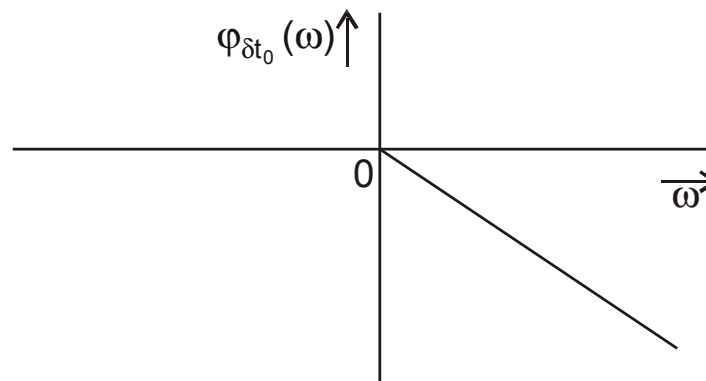
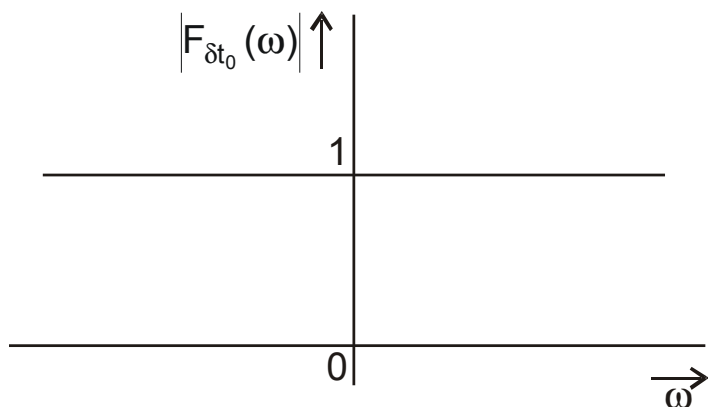
Pre spektrálnu funkciu  $F_{\delta}(\omega)$  jednotkového impulzu  $\delta(t)$  platí

$$F\{\delta(t)\} = F_{\delta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = \left[ e^{-j\omega t} \right]_{t=0} = 1$$



Spektrálna funkcia posunutého jednotkového impulzu  $\delta(t - t_0)$  :

$$F\{\delta(t - t_0)\} = F_{\delta_{t_0}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = \left[ e^{-j\omega t} \right]_{t=t_0} = e^{-j\omega t_0}$$

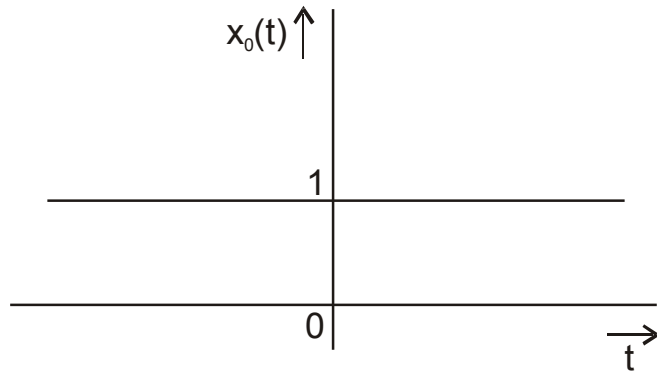


## Jednotkový impulz vo frekvenčnej oblasti

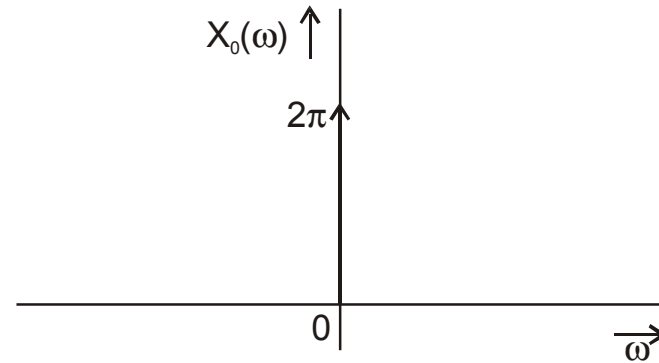
Nech  $X(\omega) = \delta(\omega)$  potom

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \quad \text{t.j.} \quad \frac{1}{2\pi} \xleftrightarrow{FT} \delta(\omega) \quad \text{resp.} \quad 1 \xleftrightarrow{FT} 2\pi\delta(\omega)$$

Signálu  $2\pi\delta(\omega)$  (jednotkovému impulzu o mohutnosti  $2\pi$ ) odpovedá v časovej oblasti signál  $x_0(t) = 1$  (teda jednosmerná zložka).



b)



a)

## Vlna vo frekvenčnej oblasti

Uvažujme ďalej signál  $X_1(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_1)$ .

Na základe inverznej Fourierovej transformácie pre signál  $x_1(t)$  platí

$$x_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_1) e^{j\omega t} d\omega = e^{j\omega_1 t}$$

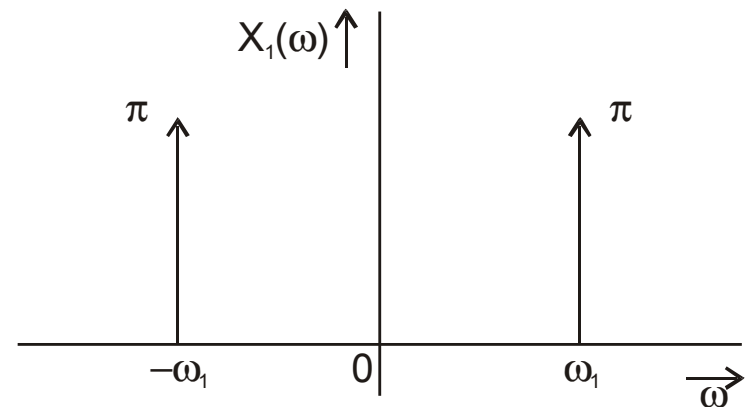
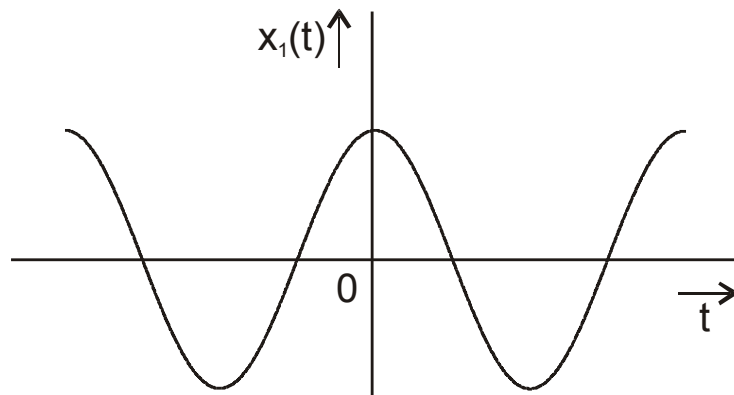
T.j. výsledkom je „komplexná vlna“

$$e^{j\omega_1 t} \xleftrightarrow{FT} 2\pi\delta(\omega - \omega_1)$$

Uvážme že  $\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$

$$x_1(t) = \cos(\omega_1 t) \xleftrightarrow{FT} X(\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_1) + \pi\delta(\omega + \omega_1)$$

Potom:





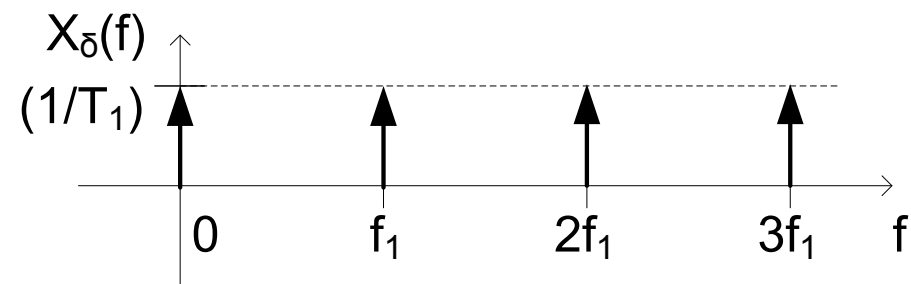
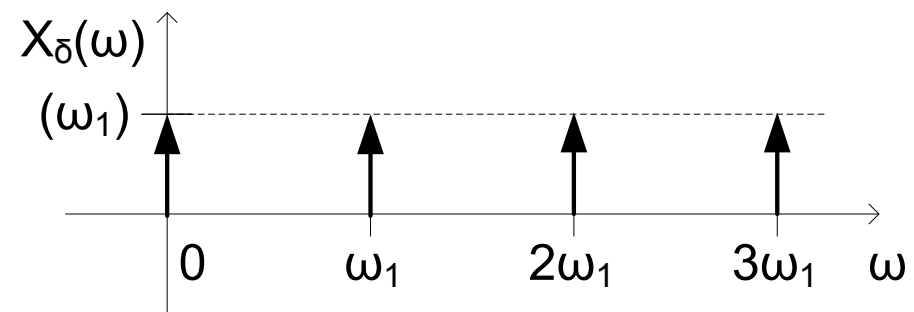
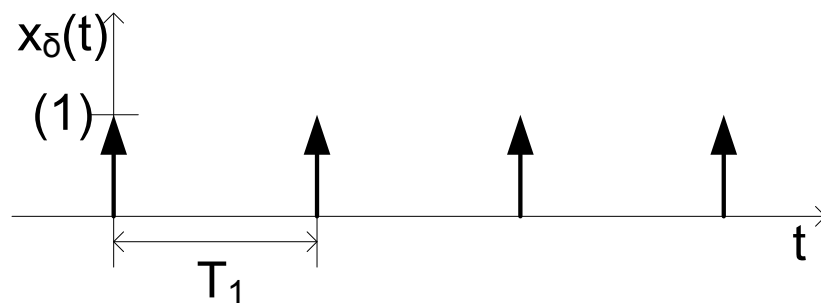
## Periodický rad jednotkových impulzov (revízia)

Pomocou FR sme dostali: 
$$x_{\delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_1 t} = \frac{1}{T_1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_1 t}$$
$$e^{j\omega_1 t} \xleftrightarrow{FT} 2\pi\delta(\omega - \omega_1)$$

Pre vlnu vo frekvenčnej oblasti platí

Potom (uvážime, že  $\omega_1 = 2\pi / T_1$ )

$$\frac{1}{T_1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_1 t} \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{T_1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - k\omega_1)$$
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_1) \xleftrightarrow{FT} \omega_1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_1) \quad \text{resp.} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_1) \xleftrightarrow{FT} 1/T_1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - k/T_1)$$



# Ivory FT (doplnenie)

| Časová oblasť         | Frekvenčná oblasť (uhlová frekvencia)                                                                                                                                    | Frekvenčná oblasť (frekvencia v Hz)                                                                                                 |
|-----------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $x(t)$ , neperiodické | $X(\omega)$ , neperiodické<br>$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$ $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega$ | $X(f)$ , neperiodické<br>$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$ $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df$ |

## Porovnanie tvaru FR a FT

Zo spojitého spektra  $X(\omega)$  signálu  $x(t)$  vyrobme diskkrétne tak, že ho budeme násobiť sekvenciou Diracových impulzov:

$$X'(\omega) = X(\omega) X_\delta(\omega) = X(\omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_1 \delta(\omega - k\omega_1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_1 X(k\omega_1) \delta(\omega - k\omega_1)$$

Výsledkom je sekvencia Diracových impulzov:

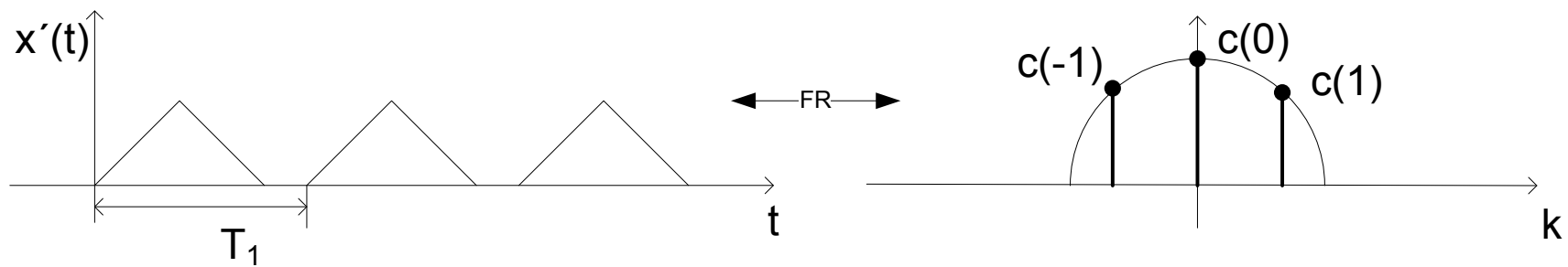
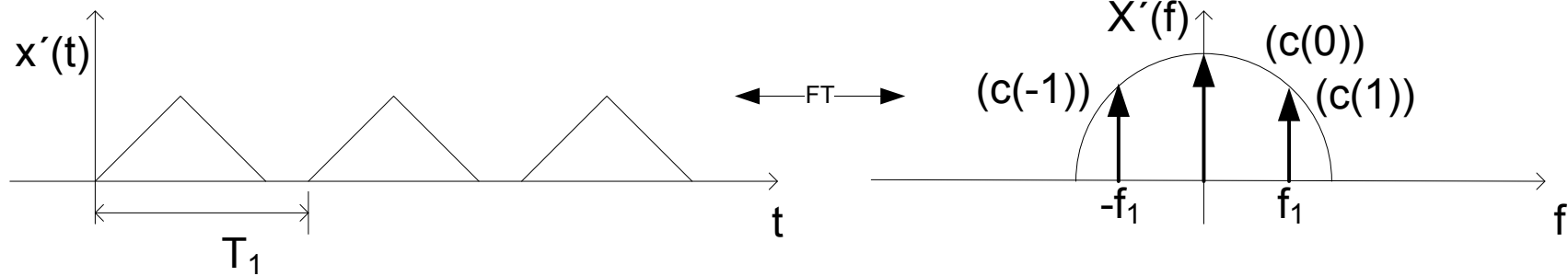
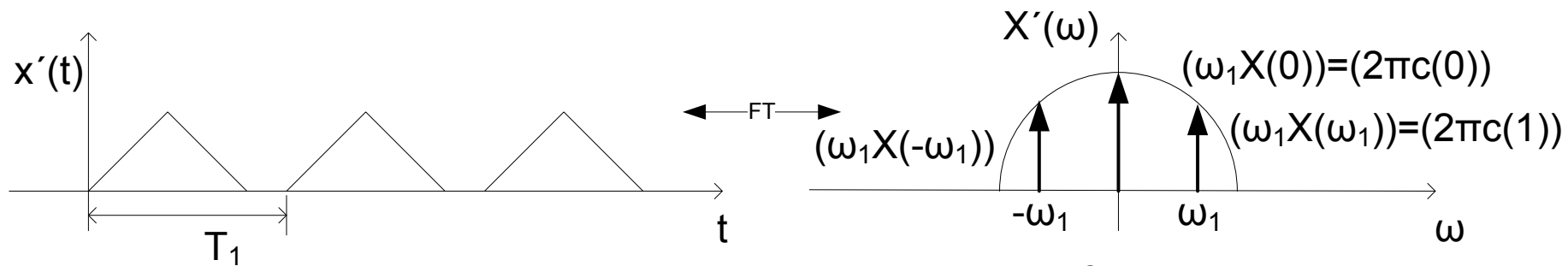
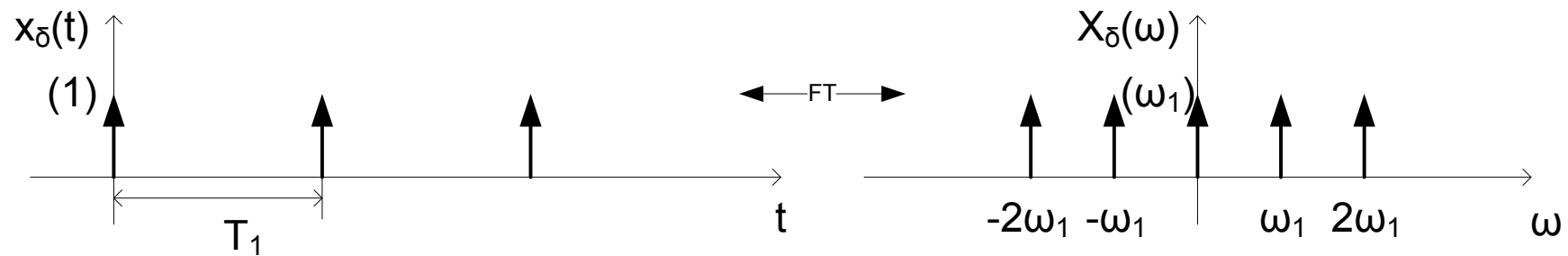
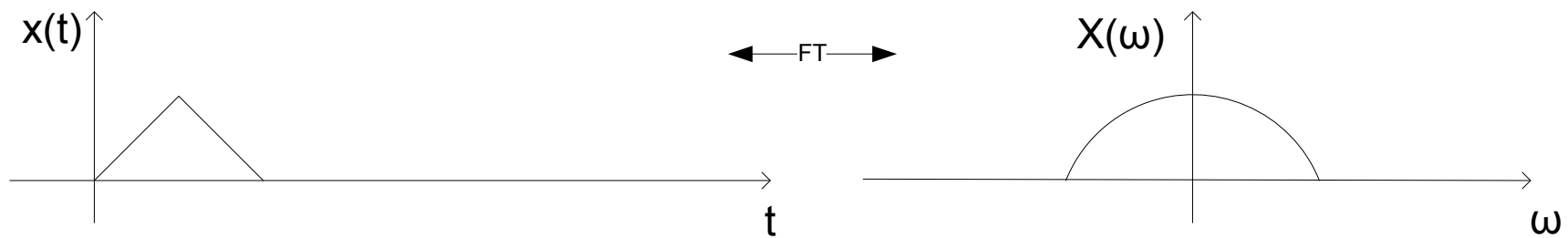
- Na osi  $\omega$  s mohutnosťami  $\omega_1 X(k\omega_1) = \omega_1 T_1 C_k = 2\pi C_k$
- Na osi  $f$  s mohutnosťami  $1/T_1 X(kf_1) = (1/T_1) T_1 C_k = C_k$

**T.j. výsledkom na osi  $f$  je diskkrétne spektrum s mohutnosťami koeficientov ako pri FR.**

Čo vznikne v čase? Tam sa odpovedajúce signály konvolvujú:

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) * x_\delta(t) = x(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_1) = (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau - nT_1) d\tau = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau - nT_1) x(\tau) d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT_1) \end{aligned}$$

**T.j. výsledkom je periodifikovaný signál  $x(t)$ , t.j. signál**  $x'(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT_1)$



Čo sme videli?

- Násobenie vo frekvencii vytvorilo diskkrétne spektrum
  - Zo spojitého spektra sme vytvorili diskkrétne – použili sme iba vzorky spektra – t.j. spektrum sme tzv. **„ideálne navzorkovali“**
- Táto operácia zároveň spôsobila periodifikáciu signálu v čase
  - Ak by sme nevhodne vzorkovali spektrum, periodifikovaný signál by bol „zliaty“ (jednotlivé opakované verzie by sa potrekrývali a posčítavali „cez seba“)

Vieme proces obrátiť? T.j. vieme zo vzoriek spektra zrekonštruovať pôvodné spektrum?

Odpoveď: vieme, ak sa nám v jednotlivé opakované verzie nepoprekrývali „cez seba“)

Začneme zvolna a celý proces a jeho dôsledky si radšej ukážeme pri vzorkovaní signálu v čase.

# Ideálne vzorkovanie v čase

Majme  $x(t)$  - reálny spojitý neperiodický signál so spektrom  $X(\omega)$ .

Z neho vytvoríme diskretný signál  $x_d(n)$  tak, že budeme brať so zvolenou frekvenciou vzorky zo signálu  $x(t)$  pomocou vzťahu  $x_d(n) = x(nT_{vz})$ .

## Otázky

- Majú rôzne  $x(t)$  vždy od seba rôzne  $x_d(n)$ ?
- Ak  $x(t)$  má spektrum  $X(\omega)$ , aké spektrum má  $x_d(n)$ ?
- Dokážeme z  $x_d(n)$  rekonštruovať povodný  $x(t)$ ?

Na tieto otázky budeme postupne odpovedať ...

### Príklad:

Majme signál,  $x(t)$  ktorý je na intervale  $<0, T>$ ,  $T=2$  definovaný nižšie a mimo tohto intervalu má hodnoty nulové:

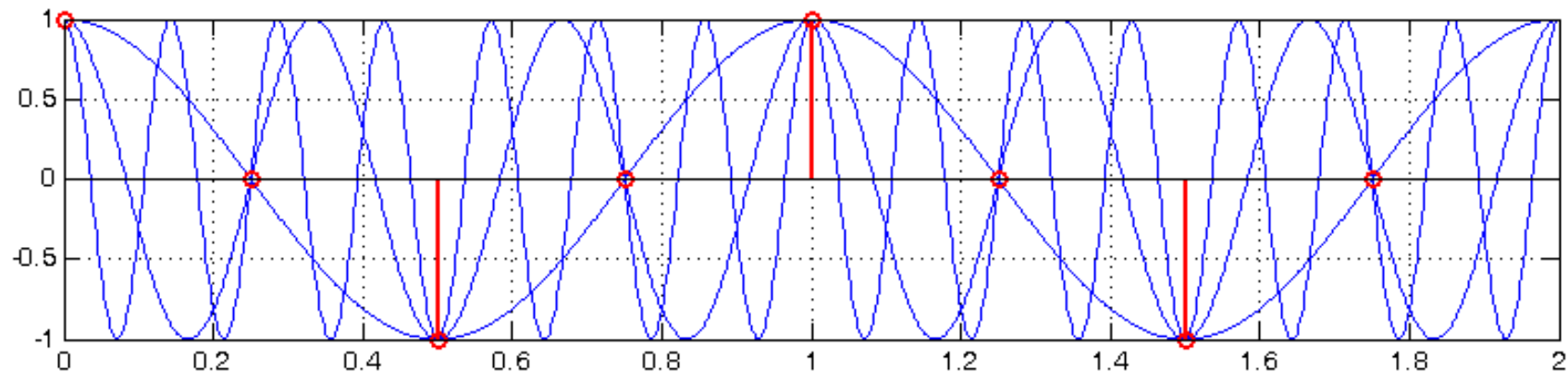
- a)  $x(t) = \cos(2\pi t)$  , harmonický signál s frekvenciou 1Hz
- b)  $x(t) = \cos(6\pi t)$  , harmonický signál s frekvenciou 3Hz
- c)  $x(t) = \sin(14\pi t)$  , harmonický signál s frekvenciou 7Hz

Vytvorte diskkrétne verzie týchto signálov, použite vzorkovaciu frekvenciu 4Hz.

### Riešenie:

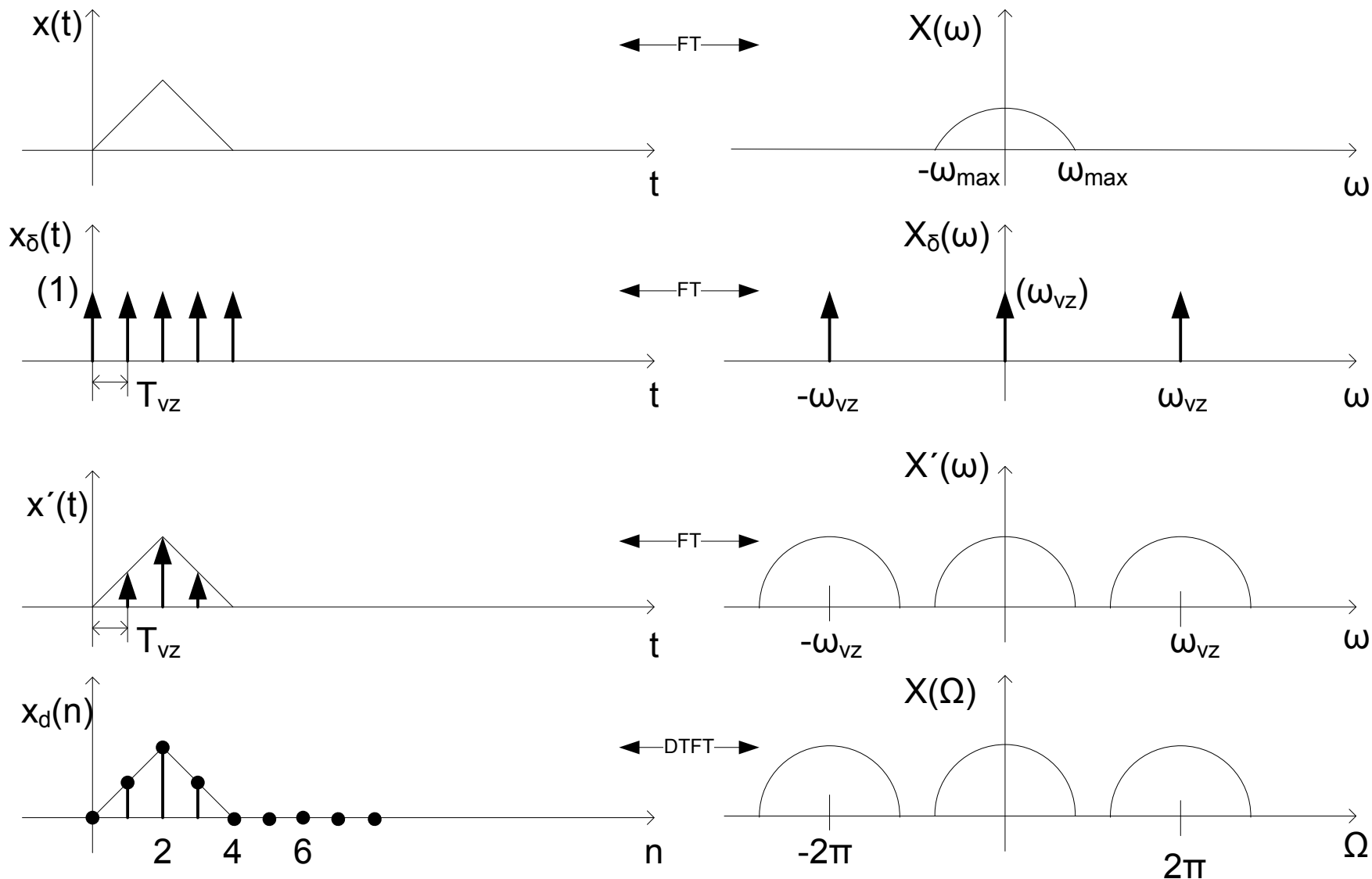
- a) b) c) vždy  $x_d(n) = (1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0)$  .

Vidíme, že  $x_d(n)$  nevieme od seba odlíšiť ... toto v reáli asi nechceme robiť



Ako zistíme spektrum  $x_d(n)$ ? Predsa pomocou sekvencie Diracových impulzov a pomocou pravidla, že násobenie v čase odpovedá konvolúcii v spektre.

Odpovedajúcu transformáciu budeme nazývať „DTFT“ (Discrete Time Fourier transform).





Z obrázku bolo pekne vidieť nasledovné veci:

- Pri vzorkovaní musí platiť  $\omega_{\text{vz}} \geq 2\omega_{\text{max}}$  (Shannon-Kotelnikov teorém) ináč sa nám spektrum „zleje“
- Keď sa spektrum zleje – vzniká aliasing
  - Vzniká nesprávny frekvenčný obsah, hoci pôvodne v signále prítomný nebol.
  - Napr. 3Hz a 7Hz signály interpretujeme ako prítomnosť 1Hz signálu (nevieme ich od prítomnosti 1Hz signálu odlíšiť)

- Nové spektrum  $X'(\omega)$  vzniklo periodifikáciou pôvodného a zväčšením s faktorom  $\omega_{\text{vz}} / 2\pi$ ,

t.j.:

$$X'(\omega) = \sum_n \frac{\omega_{\text{vz}}}{2\pi} X(\omega - n\omega_{\text{vz}})$$

- Využili sme pritom

$$x(t)y(t) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{2\pi} X(\omega) * Y(\omega)$$

- a uvážili, že sekvencia použitých dirakových impulzov má vo frekvencii mohutnosť  $\omega_{\text{vz}}$