Uhlové modulácie

$$n(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

Nemeníme amplitúdu A, ale uhol t.j. argument funkcie cos.

Výsledný modulovaný signál po uhlovej modulácii má teda **konštantnú obálku**.

Najprv si zadefinujme:

- **Okamžitý uhol** je $\Phi(t)$ celý argument funkcie kosínus.
- **Okamžitá frekvencia** $\Omega(t)$ rýchlosť zmeny okamžitého uhla, t.j.: $\Omega(t) = \dfrac{d\Phi(t)}{dt}$

Platí:

$$s(t) = A\cos(\Phi(t))$$

$$\Phi(t) = \int_0^t \Omega(\tau)d\tau + C$$

Pri uhlovej modulácii manipulujeme $\Phi(t)$,buď priamo, alebp nepriamo prostredníctvom $\Omega(t)$.

Pre $n(t)$ platí

- $\Phi(t) = \omega_0 t + \phi$
- $\Omega(t) = \dfrac{d\Phi(t)}{dt} = \omega_0$
- $\Phi(t) = \int_0^t \Omega(\tau)d\tau + C = \int_0^t \omega_0 d\tau + \phi = \omega_0 t + \phi$

:

Fázová modulácia

$\phi \to \phi(t)$, ω_0 =konštanta

$s(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi(t))$

Kde

- $\phi(t) = \psi_m c_n(t)$, pričom $c_n(t)$ je normovaný, t.j. dosahuje hodnoty v intervale $(-1,1)$
- ψ_m je **fázový zdvih**, musí byť volený tak, aby $\phi(t)$ dosahovalo hodnoty menšie $\pm\pi$, ináč by po demodulácii bol signál nejednoznačný

Okamžitá fáza je v tvare

$$\Phi(t) = \omega_0 t + \psi_m c_n(t)$$

A okamžitá frekvencia

$$\Omega(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} = \omega_0 + \psi_m \frac{dc_n(t)}{dt}$$

t.j. odchylky okamžitej frekvencie sú úmerné derivácií modulačného signálu.

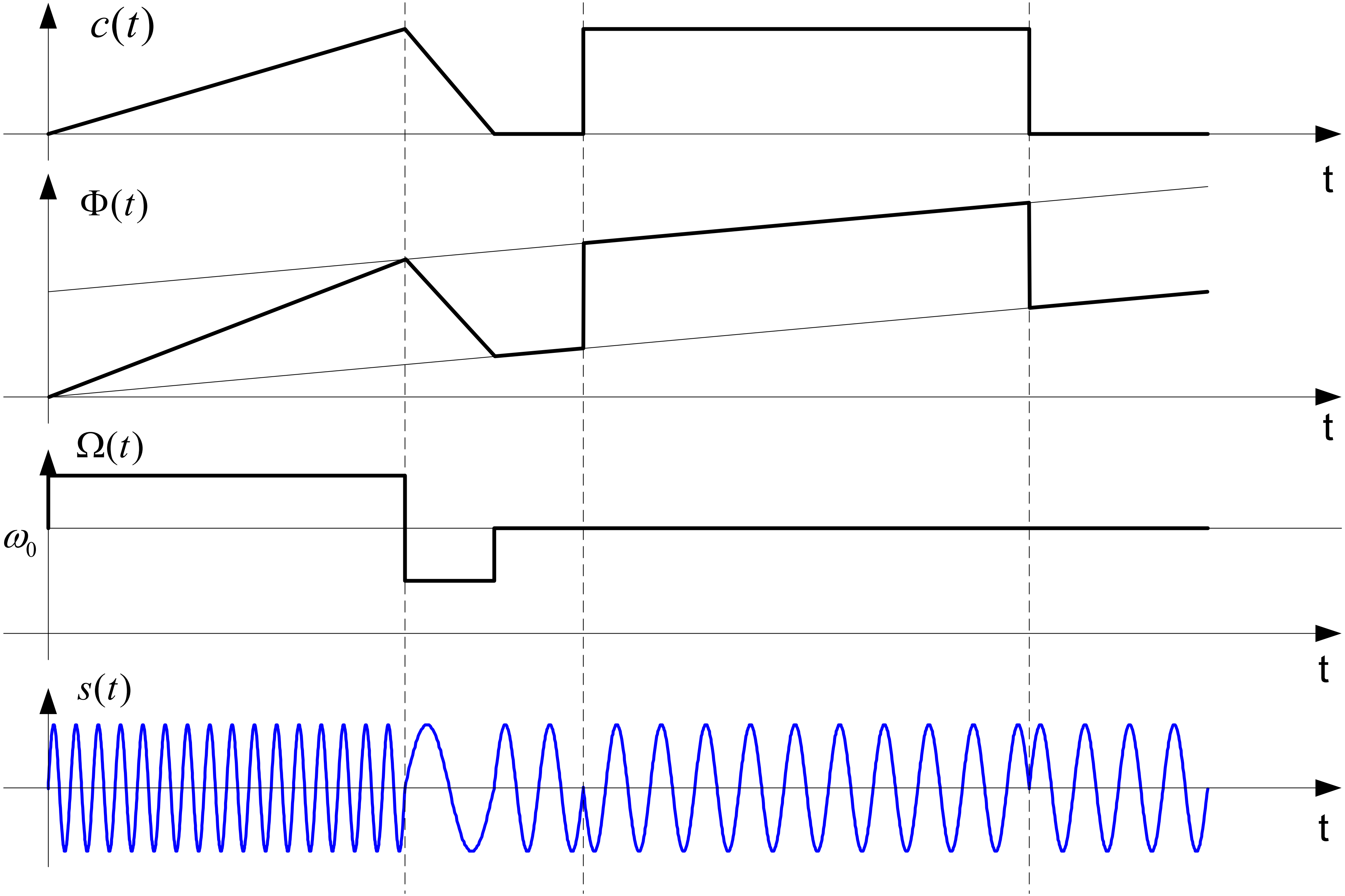
Uvažujme prípad, že modulačný signál je harmonický: $c_n(t) = \sin\omega t$

Potom:

- $s(t) = A\cos(\omega_0 t + \psi_m \sin(\omega t))$
- $\Omega(t) = \omega_0 + \psi_m \omega \cos\omega t$
- $\Omega(t) \in (\omega_0 - \Delta\omega, \omega_0 + \Delta\omega)$, kde $\Delta\omega = \psi_m \omega$

- T.j. fázový zdvih ψ_m spôsobil **frekvenčný zdvih** $\Delta\omega$

Fázová modulácia - príklad



Frekvenčná modulácia:

$$s(t) = A\cos(\Phi(t))$$

Okamžitú fázu meníme nepriamo, pomocou zmeny okamžitej frekvencie:

- $\Omega(t) = \omega_0 + \Delta\omega_0 c_n(t)$, pričom $c_n(t)$ dosahuje hodnoty v intervale $(-1,1)$
- $\Delta\omega_0$ je **frekvenčný zdvih**

Okamžitá fáza je v tvare

$$\Phi(t) = \int_0^t \Omega(\tau)d\tau = \int_0^t \omega_0 + \Delta\omega_0 c_n(\tau)d\tau = \int_0^t \omega_0 d\tau + \Delta\omega_0 \int_0^t c_n(\tau)d\tau = \omega_0 t + \Delta\omega_0 \int_0^t c_n(\tau)d\tau$$

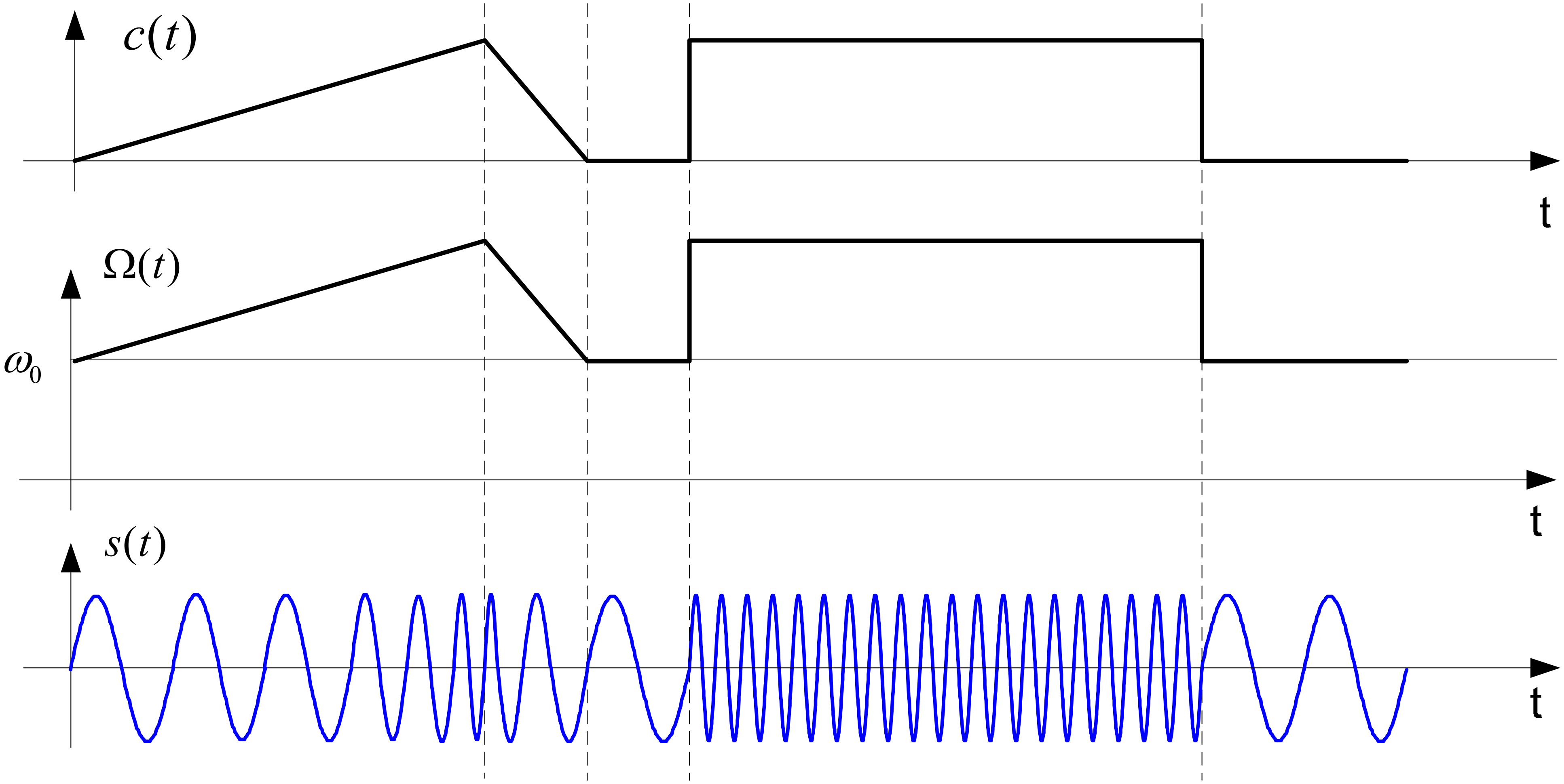
t.j. odchylky okamžitého uhla sú úmerné integrálu modulačného signálu.

Uvažujme prípad, že modulačný signál je harmonický: $c_n(t) = \cos\omega t$

Potom:

- $\Phi(t) = \int_0^t \omega_0(\tau)d\tau = \int_0^t \omega_0 + \Delta\omega_0 \cos(\omega\tau)d\tau = \ldots = \omega_0 t + \frac{\Delta\omega_0}{\omega}\sin(\omega t) = \omega_0 t + \beta\sin(\omega t)$
- Koeficient β predstavuje fázový zdvih (nazývaný aj „index FM“). Teda frekvenčný zdvih $\Delta\omega_0$ sposobil fázový zdvih β.
- $s(t) = A\cos(\omega_0 t + \beta\sin(\omega t))$

Frekvenčná modulácia - príklad



Porovnajme:

Fázová modulácia (PM)	Frekvenčná modulácia (FM)
$s(t) = A\cos(\omega_0 t + \psi_m c_n(t))$	$s(t) = A\cos(\omega_0(t)t + \phi)$ $\Phi(t) = \int_0^t \omega_0(\tau)d\tau = \ldots = \omega_0 t + \Delta\omega_0 \int_0^t c_n(\tau)d\tau$ $s(t) = A\cos(\omega_0 t + \Delta\omega_0 \int_0^t c_n(\tau)d\tau)$

Platí:

- Ak teda pri PM použijeme iný modulačný signál a to $\int_0^t c_n(\tau)d\tau$ namiesto $c_n(t)$ a zvolíme $\psi_m = \Delta\omega_0$, výsledný signál bude identický ako pri FM pri modulačnom signále $c_n(t)$. T.j FM signál získame aj tak, že modulačný signal najprv zintegrujeme a následne zmodulujeme pomocou PM.
- Ak teda pri FM použijeme namiesto $c_n(t)$ iný modulačný signál a to $\frac{dc_n(t)}{dt}$ a zvolíme $\Delta\omega_0 = \psi_m$, výstupom po FM bude signál $s(t) = A\cos(\omega_0 t + \Delta\omega_0 c_n(t))$ identický ako pri PM pri modulačnom signále $c_n(t)$. T.j PM signál získame aj tak, že modulačný signal najprv zderivujeme a následne zmodulujeme pomocou FM.

Zhrnutie PM, FM

- Doteraz sme analyzovali, čo sa deje v čase
- Zistili sme, že PM a FM sú uvedeným spôsobom zameniteľné
- Ďaľej sa preto budeme venovat podrobnejšie iba jednej z nich - volíme FM
- Ideme zisťovať, co sa deje vo frekvencii

Širokopásmová FM

Pre jednoduchosť predpokladajme

$$c_n(t) = \cos \omega t$$

Následne

$$s(t) = A\cos(\omega_0 t + \beta \sin(\omega t))$$

, kde index FM $\beta = \dfrac{\Delta\omega_0}{\omega}$

$$s(t) = A\cos(\omega_0 t + \beta \sin(\omega t)) = A\cos(\omega_0 t)\cos(\beta \sin(\omega t)) - A\sin(\omega_0 t)\sin(\beta \sin(\omega t))$$

Funkcie $\cos(\beta \sin(\omega t)),\ \sin(\beta \sin(\omega t))$ sú periodické, vieme vytvoriť ich FR

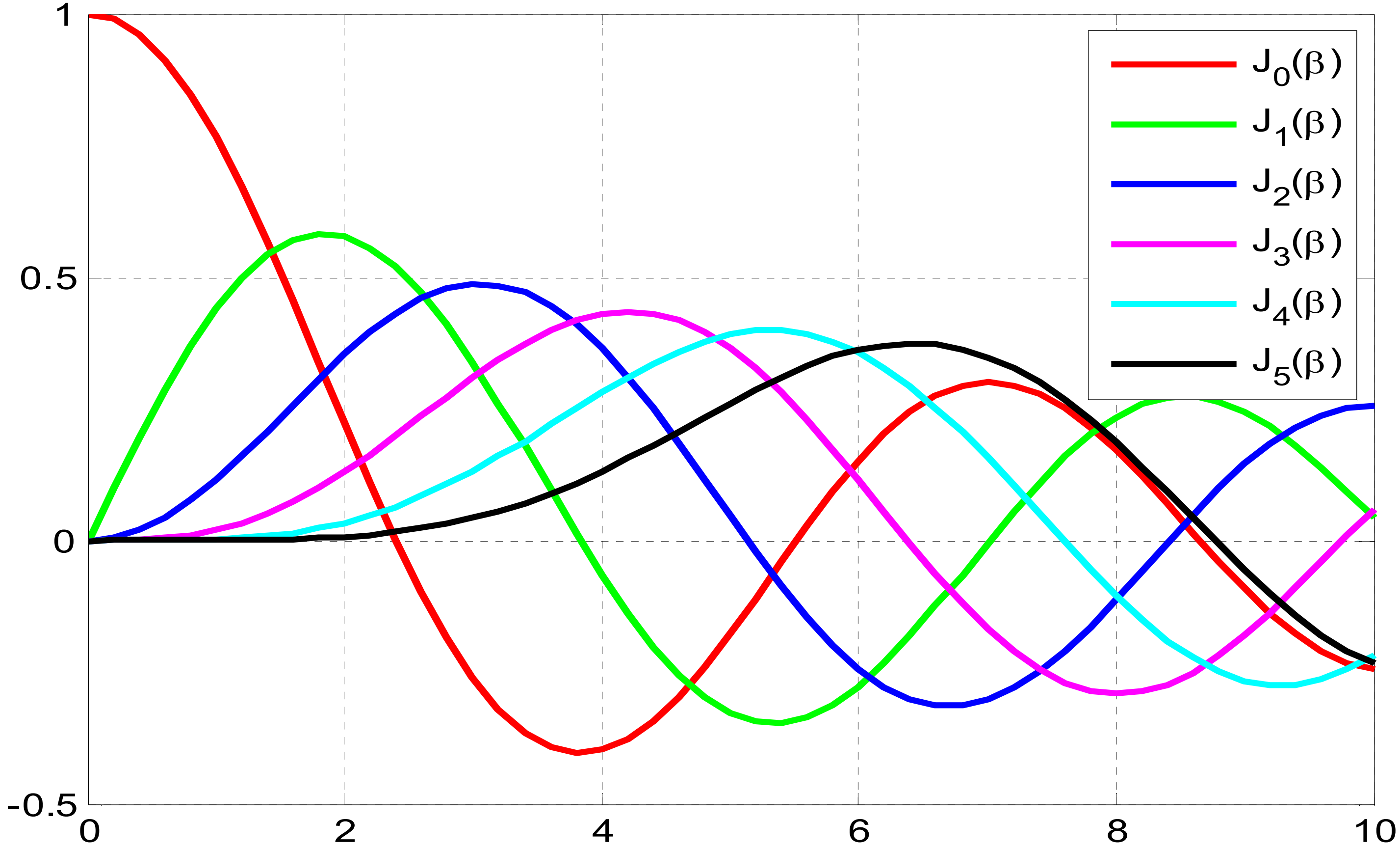
$\cos(\beta \sin(\omega t))$ - párna, obsahuje len cos členy FR

$\sin(\beta \sin(\omega t))$ - nepárna, obsahuje len sin členy FR

$$\cos(\beta \sin(\omega t)) = J_0(\beta) + 2J_2(\beta)\cos 2\omega t + 2J_4(\beta)\cos 4\omega t \ ...$$

$$\sin(\beta \sin(\omega t)) = 2J_1(\beta)\sin \omega t + 2J_3(\beta)\sin 3\omega t + 2J_5(\beta)\sin 5\omega t + \ ...$$

Koeficienty $J_n(\beta)$ sú koeficienty besselových funkcií 1. Druhu, n teho rádu reálneho argumentu β:



Poznámka:

- v matlabe besselj(n,beta)
- platí $\sum_n J_n^{\,2}(\beta) = 1$, pre ľubovoľné β

Upravme:

$$s(t) = A\cos(\omega_0 t + \beta\sin(\omega t)) = A\cos(\omega_0 t)\cos(\beta\sin(\omega t)) - A\sin(\omega_0 t)\sin(\beta\sin(\omega t))$$

$$\cos(\beta\sin(\omega t)) = J_0(\beta) + 2J_2(\beta)\cos 2\omega t + 2J_4(\beta)\cos 4\omega t \ \ldots$$

$$\sin(\beta\sin(\omega t)) = 2J_1(\beta)\sin\omega t + 2J_3(\beta)\sin 3\omega t + 2J_5(\beta)\sin 5\omega t + \ldots$$

Pomocou:

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$-\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right]$$

Dostaneme:

$$s(t) = A\Big\{J_0\left(\beta\right)\cos\omega_0 t +$$

$$+J_1\left(\beta\right)\left[\cos(\omega_0+\omega)t - \cos(\omega_0-\omega)t\right] +$$

$$+J_2\left(\beta\right)\left[\cos(\omega_0+2\omega)t + \cos(\omega_0-2\omega)t\right] +$$

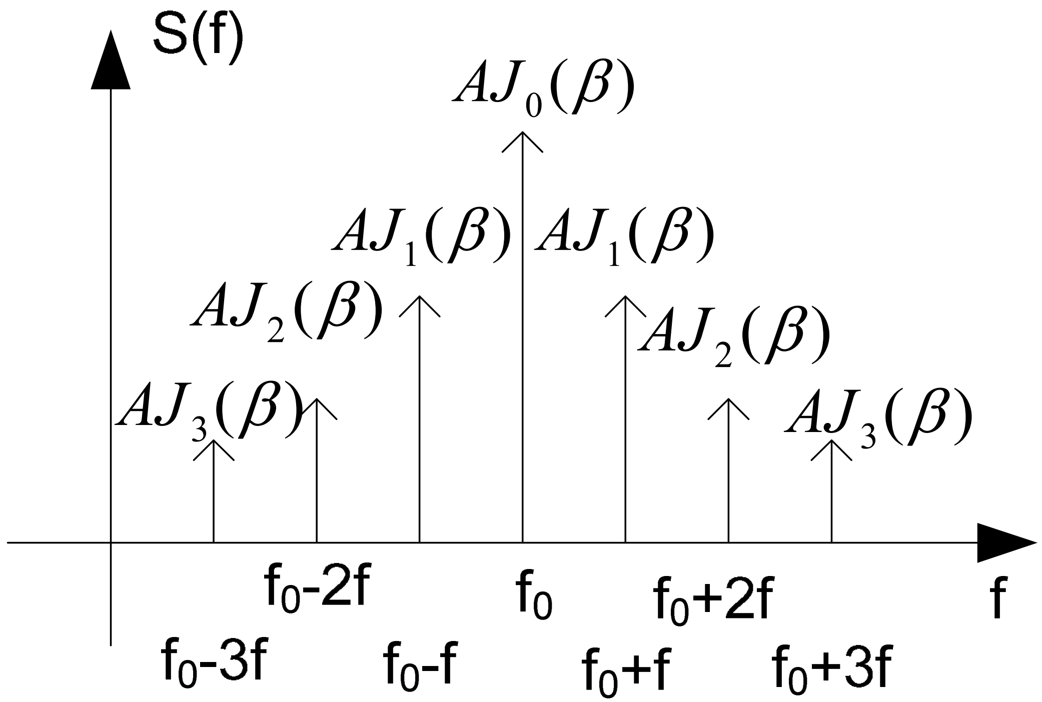
$$+J_3\left(\beta\right)\left[\cos(\omega_0+3\omega)t - \cos(\omega_0-3\omega)t\right] +$$

$$+J_4\left(\beta\right)\left[\cos(\omega_0+4\omega)t + \cos(\omega_0-4\omega)t\right] + \ldots$$

Ak uvážime, že $J_n(\beta) = J_{-n}(\beta)$ dostaneme:

$$s(t) = A\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta)\cos(\omega_0 + n\omega)$$

Umiestnenie jednotlivých zložiek $s(t)$ vo frekvencii pri FM. Je nakreslené jednostranné spektrum:



- s rastúcim β sa zvyšuje počet význačných zložiek
- s rastúcou hodnotou $c_n(t)$ sa zvyšuje počet význačných zložiek
- Stredný výkon FM ja stále rovnaký (nezáviský od β)

$$P_s = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} s^2(t)dt = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[AJ_n(\beta)\right]^2 = \frac{A^2}{2}1 = \frac{A^2}{2}$$

Zovšeobecnenie širokopásmovej FM

Nech

$c_n(t) = \cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t$

potom

$$s(t) = A\cos(\omega_0 t + \beta_1 \sin(\omega_1 t) + \beta_2 \sin(\omega_2 t))$$

$$s(t) = A\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_m(\beta_1)J_n(\beta_2)\cos(\omega_0 + n\omega_1 + n\omega_2)$$

Výsledné spektrum sa skladá z 3 typov zložiek:

1) $m = n = 0$: $S(\omega_0) = AJ_0(\beta_1)J_0(\beta_2)$

2) $m = 0$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ alebo $n = 0$, $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$ ➔ zložky $\omega_0 \pm n\omega_1$ resp. $\omega_0 \pm m\omega_1$

3) $m \neq 0, n \neq 0$ ... ➔ zložky $\omega_0 \pm n\omega_1 \pm m\omega_1$

Úzkopásmová FM

Ak $\beta << 1$ potom približne platí

$$J_0(\beta) \doteq 1$$

$$J_1(\beta) \doteq \frac{\beta}{2}$$

$$J_n(\beta) \doteq 0 \quad pre \;\; n > 1$$

Šírka pásma pri FM

Ak c(t) má medznú frekvenciu f_m

Ak $\beta << 1$

$$B_s = 2 f_m$$

Ak $\beta >> 1$

$$B_s = 2\beta f_m = 2\Delta f$$

Ak $2 < \beta < 20$

$B_s = 2\beta f_m + 2a f_m$, kde a=1, 3 v závislosti od druhu signálu