V praxi používame najmä zjednodušené zobrazenie, kde zobrazujeme iba nulové a nekonečné hodnoty $X(z)$.

- Nulové hodnoty – „nuly“ – označujeme krúžkom “o“
- Nekonečné hodnoty – „póly“ – označujeme krížikom „x“

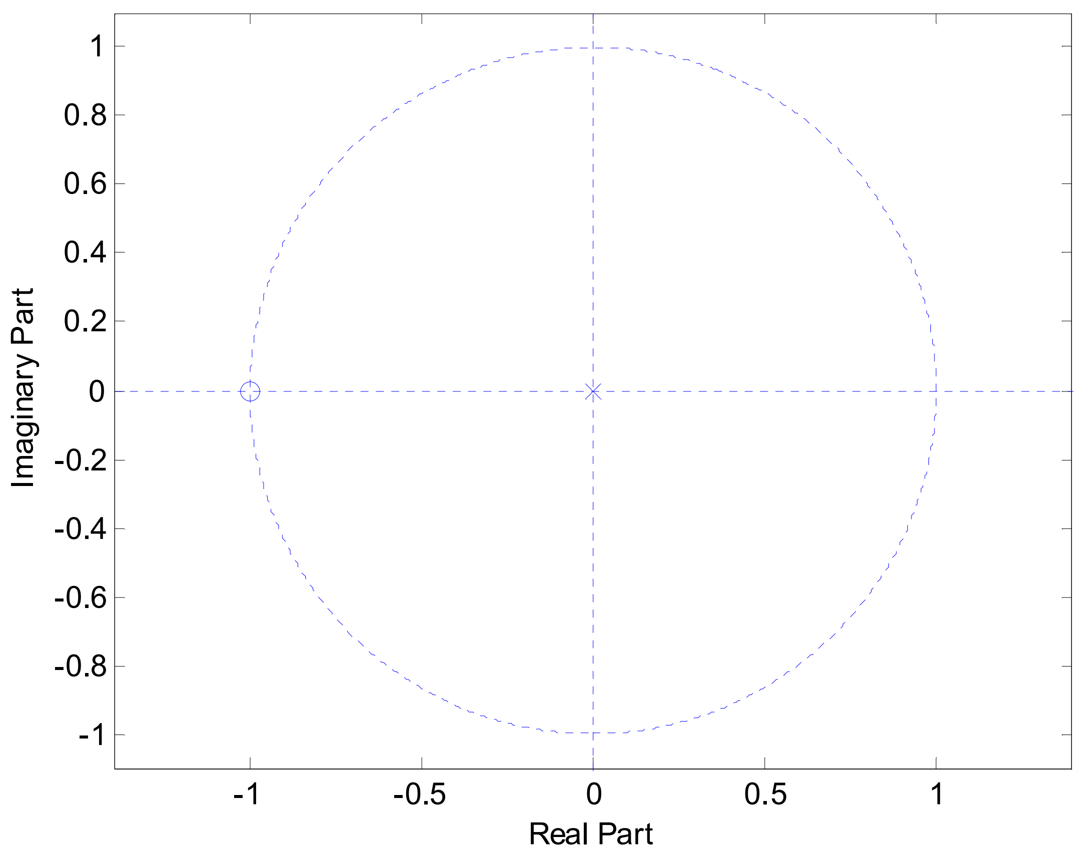
Pre $X(z) = 1 + \frac{1}{z}$ sú nuly a póly nasledovné:

- $X(z)$ má jednu nulu pri z=-1
- $X(z)$ má jeden pól pri z=0

Matlab: zplane([1,1],[1])

kde
[1,1] reprezentuje
x(0),x(1),...

(vdetailnejší popis
pomocou „doc zplane“)



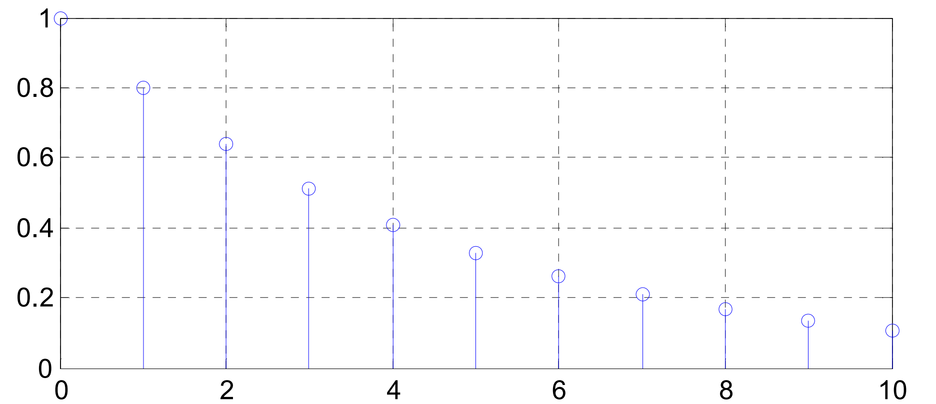
Aká je oblasť konvergencie $\left\{ z : \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \right| < \infty \right\}$ pre $x(n) = (1,1)$?

Z vyššie uvedeného vidíme, že sa jedná o celú komplexnú rovinu okem počiatku.

Príklad 2

Aká je oblasť konvergencie pre $x(n) = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 0.8 & n \geq 0 \end{cases}$?

```
n=0:10
stem(n,0.8.^n)
grid on
```



Skúsme vypočítať $X(z)$ a uvidíme ..

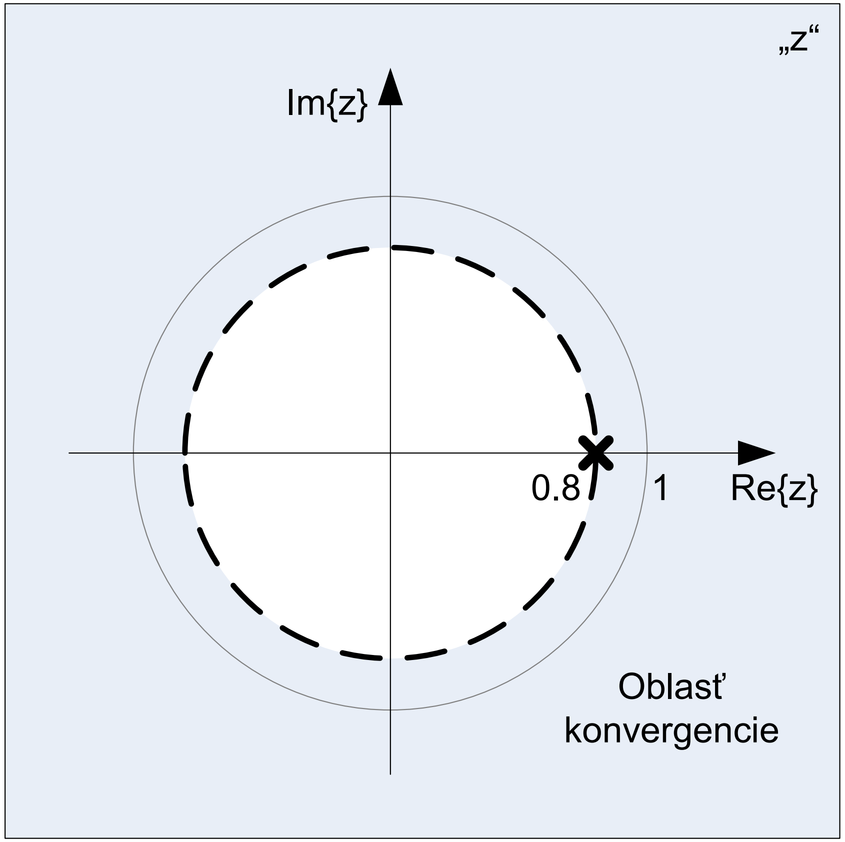
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 0.8^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 0.8^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{0.8}{z} \right)^n = \frac{1}{1 - \left(\frac{0.8}{z} \right)} = \frac{1}{1 - 0.8 z^{-1}}$$

Nekonečný rad konverguje k uvedenému výsledku iba pre $\left\{ z : \left| 0.8 z^{-1} \right| < 1 \right\}$

Znázornime oblasť konvergencie $\left\{ z : \left| 0.8z^{-1} \right| < 1 \right\}$ graficky (šedá oblasť).

Kde má $X(z) = \dfrac{1}{1 - 0.8z^{-1}}$ nuly a póly?

Nuly nemá.
Pól ma jeden a to v komplexnom čísle 0.8
Nuly a póly sú zakreslené do obrázku.



Vieme zovšeobecniť ohľadom konvergencie:

➔ V „z" rovine oblasť konvergencie kauzálneho signálu je oblasť mimo kruhu, ktorý obkolesuje všetky jeho póly.

➔Pre čisto nekauzálne signály je to presne naopak.

➔Pre kombinované signály obsahujúce kauzálne aj nekauzálne zložky je oblasť konvergencie medzikružie (alebo je oblasť prázdna)

Interpretujme, čo sa pri Z transformácii vlastne deje.

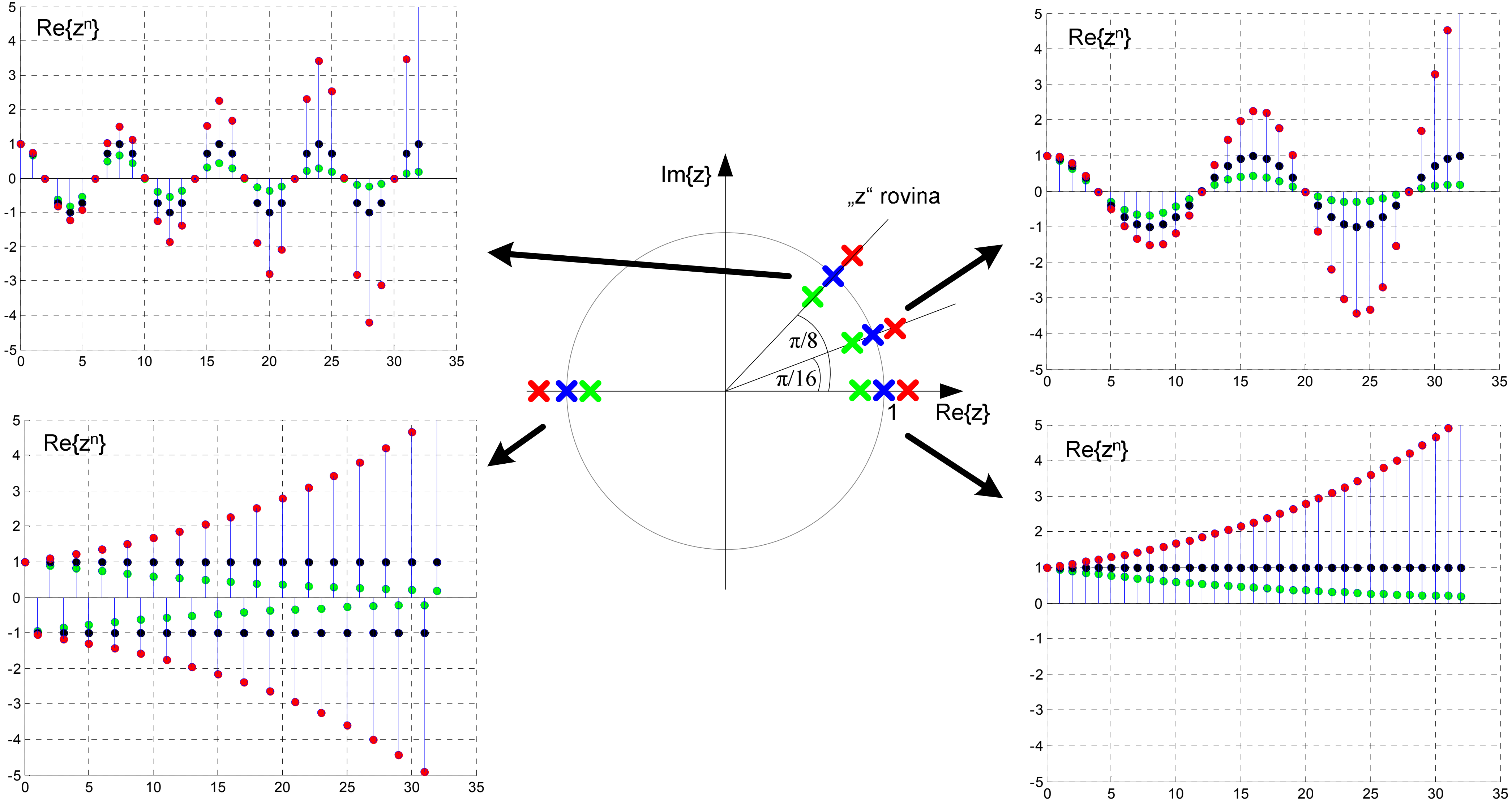
$$Z\{x(n)\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

Čo spôsobuje prítomnosť členu z^{-n}, ako vplýva na hodnotu $X(z)$?

- Hodnota $X(z)$ v bode z_b t.j. $X(z_b)$ vyjadruje „podobnosť" signálu $x(n)$ a signálu z_b^n. Prečo?
    - Ak sa kauzálny signál $x(n)$ zhoduje s príslužným z_b^n presne, potom má $X(z)$ v bode z_b^n **pól**, lebo $$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z_b{}^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z_b}{z}\right)^n = \frac{1}{1-\left(\frac{z_b}{z}\right)}$$
    - Čím ďalej od pólu skúmame hodnotu $X(z)$, tým viac hodnota $|X(z)|$ klesá
- **Ak** $x(n) = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ z_{b1}{}^n + z_{b2}{}^n + \dots + z_{bM}{}^n & n \ge 0 \end{cases}$ **potom** $X(z)$ **má póly v** $z_{b1}{}^n, z_{b2}{}^n, \dots, z_{bM}{}^n$
- **Resp. naopak, ak** $X(z)$ **má poly v** $z_{b1}{}^n, z_{b2}{}^n, \dots, z_{bM}{}^n$ **potom** $x(n)$ **obsahuje** $z_{b1}{}^n + z_{b2}{}^n + \dots + z_{bM}{}^n$
- Ako vlastne vyzerá z_b^n?

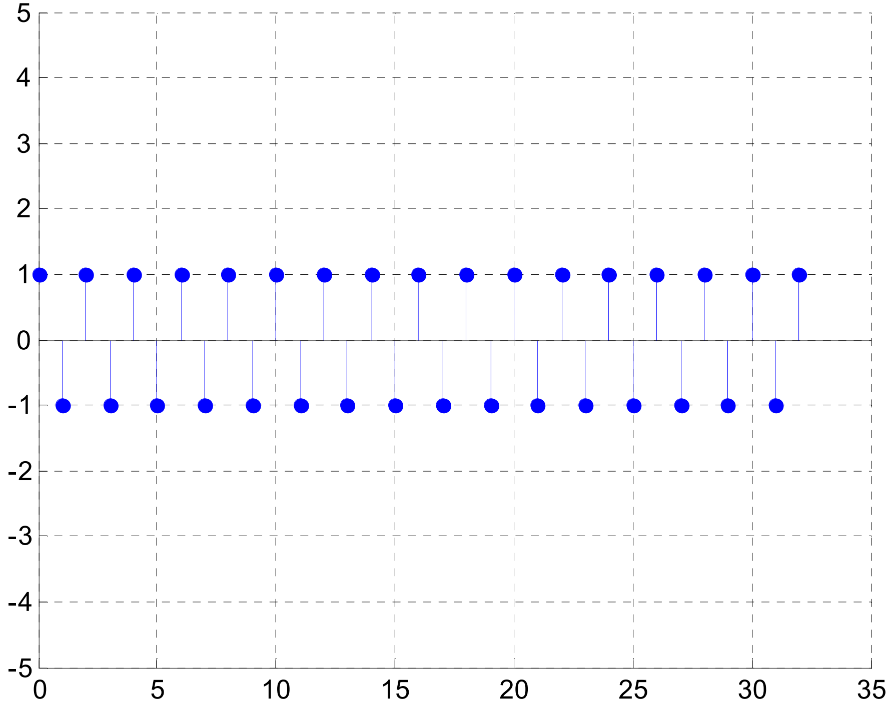
Ako vyzerajú signály z^{-n} pre rôzne z?

Vyjadrime si z v exponenciálnom tvare ($z = re^{j\phi}$). Potom $z^n = r^n e^{j\phi n}$ t.j. vo všeobecnosti sa jedná sa o komplexné diskrétne špirály. Pre názornosť si zobrazme reálnu časť výsledku.



Ked má $X(z)$ nuly niekde. Čo to presne znamená?

Signálu $x(n)=(1,1)$ odpovedá funkcia $X(z)=1+\frac{1}{z}$, ktorá má jednu nulu bode $z_0=-1$. Signál z^{-n} v bode z_0 má hodnoty z_0^n, čo pre $z_0=-1$ vytvorí signal:



Vidíme, že signal z_0^n nám (ak by sme rekonštruovali po kružnici, ktorá pretína túto nulu) zmysluplne neprispieva k rekonštrukcii signálu x(n) (ako nám pomôžu dve navzájom opačné hodnoty pri rekonžtrukcii dvoch rovnakých?).

- T.j. voľne môžeme povedať, že náš signál sa vobec na signál z_0^n „nepodobá“, resp. že je naň „ortogonálny“ (pozor, ortogonalita je definovaná pre priestory $l^2(Z)$ a tam my nie sme)

Z TRANSFORMÁCIA - VLASTNOSTI

Názov	Časová oblasť	Transformačná oblasť	Poznámka
	$x(n)$, neperiodické $y(n)$, neperiodické	$X(z)$, $Y(z)$,	$Z\{x(n)\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$ $x(n) = Z^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$
Linearita	$\alpha x(n) + \beta y(n)$	$\alpha X(z) + \beta Y(z)$	
Časové posunutie	$x(n-n_0)$	$X(z) z^{-n_0}$	Oneskorenie o 1 takt je ekvivalentné prenásobeniu z^{-1}
Časové otočenie	$x(-n)$	$X(z^{-1})$	
Konvolúcia v čase	$x(n) * y(n)$	$X(z)Y(z)$	
Násobenie v čase	$x(n)y(n)$	$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(v) Y(z/v) v^{-1} dv$	
Konjugácia v čase	$\overline{x(n)}$	$\overline{X(\overline{z})}$	
Násobenie $(-1)^n$ v čase	$(-1)^n x(n)$	$X(-z)$	
Nadvzorko-vanie v čase	$y(n) = \begin{cases} x(n/M) & n = kM; k \in Z \\ 0 & \textit{ináč} \end{cases}$	$Y(z) = X(z^M)$	
Podvzorkova nie v čase	$y(n) = x(Mn); M \in N$	$Y(z) = X(z^{1/M})$	

Poznámka: pozor na oblasť konvergencie

Časové posunutie:

$$Z\{x(n-n_0)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-n_0)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-n_0)z^{-n}.z^{-n_0}z^{n_0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-n_0)z^{-(n-n_0)}.z^{-n_0} = X(z)z^{-n_0}$$

Násobenie $(-1)^n$ v čase

$$Z\{(-1)^n x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(-1)^{-n} z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)((-1)z)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(-z)^{-n} = X(-z)$$

Konvolúcia v čase

$$Z\{x(n)*y(n)\} = Z\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)y(n-m)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)y(n-m)z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n-m)z^{-(n-m)}z^{-m} =$$

$$= Y(z)\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)z^{-m} = Y(z)X(z)$$

Z transformácia niektorých základných signálov

Signál	Definícia v čase	Z transformácia	Poznámka
Jednotkový impulz	$u(n) = \begin{cases} 1 & pre\, n = 0 \\ 0 & inak \end{cases}$	1	Kroneckerov impuls
Jednotkový skok	$\sigma(n) = \begin{cases} 1 & pre\, n \geq 0 \\ 0 & inak \end{cases}$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	Oblasť konvergencie: $\lvert z\rvert > 1$
	$a^n\sigma(n)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	Oblasť konvergencie: $\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$

Ako súvisí Z transformácia a DTFT?

Ak zvolíme podmnožinu všetkých možných kompexných čísiel $z = e^{j\Omega}$ (t.j. oblasť jednotkovej kružnice) potom:

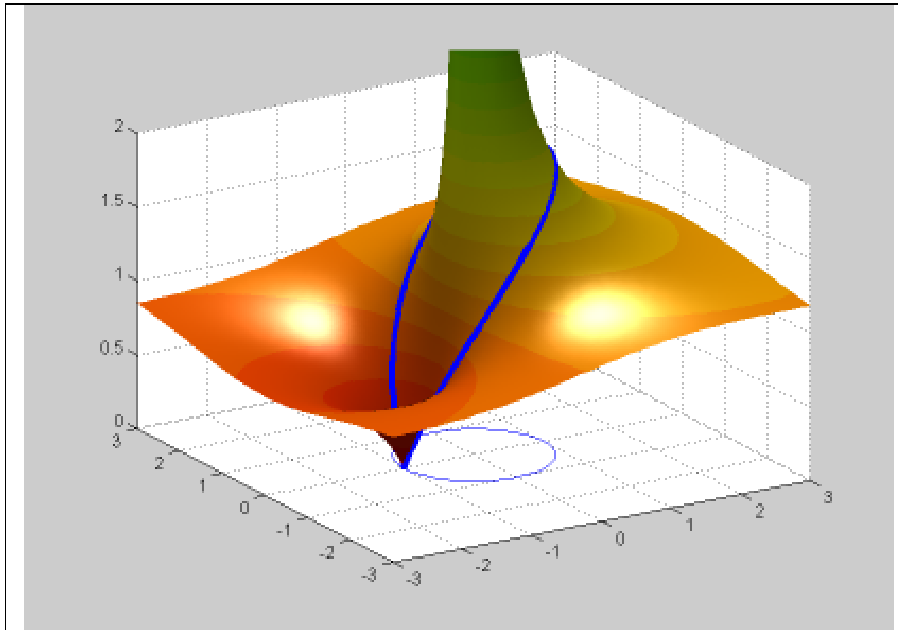
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \qquad X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(e^{j\Omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n}$$

Zjednodušene zapísané: $X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n}$

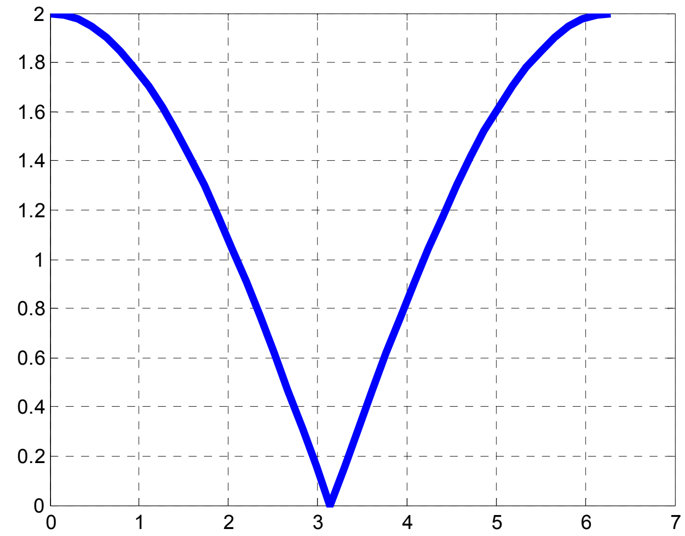
T.j. pri $z = e^{j\Omega}$ dostávame DTFT:

$$Z\{x(n)\}_{z=e^{j\Omega}} = DTFT\{x(n)\}$$

Príklad: Ak $x(n) = (1,1)$, potom $X(z) = 1 + z^{-1}$ a $X(\Omega) = 1 + e^{-j\Omega}$



$|X(z)|$



$|X(\Omega)|$

Ako nám Z transformácia pomôže pri LDKI systémoch?

LDKI boli opísané lineárnou diferenčnou rovnicou

$$\sum_{k=0}^{M} b_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{N} a_k x(n-k)$$

Hľadáme, čo je výstupom $y(n)$ pri daných $a_k, b_k, M, N, x(n)$. Vo všeobecnosti sa riešenie skladá z dvoch častí: $y(n) = y_1(n) + y_2(n)$, kde

- $y_1(n)$ je riešenie uvedenej rovnice **bez pravej strany**
- $y_2(n)$ je riešenie uvedenej rovnice **s pravou stranou**

Rovnicu riešme najprv bez pravej strany a použime Z transformáciu:

$$\sum_{k=0}^{M} b_k y(n-k) = 0 \quad \rightarrow \quad Y(z)\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} = 0 \quad \Big/ (.z^M) \quad \rightarrow \quad Y(z)\sum_{k=0}^{M} b_k z^{M-k} = 0$$

Charakteristická rovnica $\sum_{k=0}^{M} b_k z^{M-k} = 0$ má M koreňov $z_1, \ldots z_M$ riešenie celej rovnice je následne

$$y_1(n) = \sum_{k=1}^{M} c_k z_k^n$$

kde c_k sú konštanty vyplývajúce z počiatočných podmienok. Výsledkom je suma váhovaných komplexných diskrétnych špirál (viď slide 5). Fyzikálne to predstavuje **vlastné kmity sústavy**.

Hľadajme riešenie s pravou stranou:

$$\sum_{k=0}^{M} b_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{N} a_k x(n-k) \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{M} b(k) y(n-k) = \sum_{k=0}^{N} a(k) x(n-k)$$

Pomocou Z transformácie dostaneme (na oboch stranách sa jedná o konvolúciu):

$$B(z)Y(z) = A(z)X(z) \quad \Rightarrow \quad Y(z) = \frac{A(z)}{B(z)} X(z) = H(z)X(z) \quad \Rightarrow \quad y(n) = h(n) * x(n)$$

Kde $H(z) = \dfrac{A(z)}{B(z)} = \dfrac{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}$ sa nazýva **prenosová funkcia** sústavy. Výstup $y(n)$, ktorý získame sa nazýva **vnútená odozva**.

Signál $h(n) = Z^{-1}\{H(z)\}$ sa nazýva **impulzová charakteristika** sústavy lebo je identický s odpoveďou sústavy na jednotkový impulz:

ak $x(n) = u(n)$ potom $X(z) = 1$ a $Y(z) = H(z)$, resp. $y(n) = Z^{-1}\{H(z)\} = h(n)$.

Úplne riešenie diferenčnej rovnice je teda:

$$y(n) = y_1(n) + y_2(n) = \sum_{k=1}^{M} c_k z_k^n + h(n) * x(n)$$

Ak majú všetky vlastné kmity „doznievajúci charakter“, t.j. $|z_k| < 1$, výsledná odozva bude daná iba vnútenou odozvou, ktorá dominuje (tzv. **dominantná podmienka**). Potom $y(n) = h(n) * x(n)$.

Delenie sústav podľa dĺžky impulzovej odpovede $h(n)$

- S Konečnou Impulzovou Odpoveďou (KIO) – konečná dĺžka impulzovej odpovede (anglicky Finite Impulse Response - FIR)
- S Nekonečnou Impulzovou Odpoveďou (NIO) – nekonečná dĺžka impulzovej odpovede (anglicky Infinite Impulse Response - IIR)

Ako je to so stabilitou sústavy?

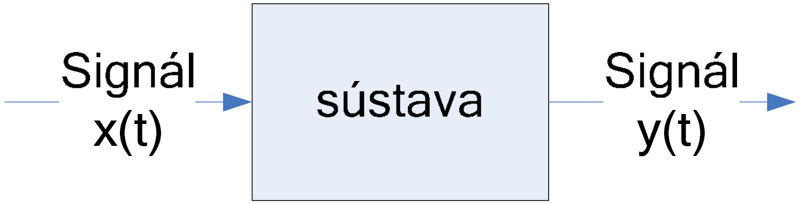
- Stabilita je určená prenosovou funkciou $H(z)$, resp. impulzovou charakteristikou a jej vlastnosťami
- Formulácia v čase
    - $\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty$
- Formulácia v Z rovine
    - Stabilita závisí od polohy nulových bodov $H(z)$
    - Stabilita závisí od **polohy pólov** $H(z)$ - **musia sa nachádzať vnútri jednotkovej kružnice.** Prečo? Ak podmienka nie je splnená, potom každý vstupný impulz spustí tvorbu signálu, ktorého amplitúda ostáva na výstupe rovnaká, alebo sa zväčšuje.

Kreslenie modelov LDKI sústav - poznámka

Názov	Označenie	Alternatívne označenie
Oneskorovací člen (posuvný register)	$x(n) \rightarrow \boxed{T} \rightarrow y=x(n-1)$	$x(n) \rightarrow \boxed{z^{-1}} \rightarrow y=x(n-1)$

LSKI (Lineárne Spojité Kauzálne Invariantné) sústavy

Základné vlastnosti	skratka	Skúmané typy
Lineárne + Spojité + Kauzálne + Invariantné (v čase)	LSKI	neparametrické, pamäťové



- vstup (**budiaci signál**) x(t)
- výstup (**odozva**) y(t)

Základné vlastnosti (je daná sústava LSKI?):

1) Linearita: Sústava je lineárna ak platí princí linearity a superpozície: ak $x_1(t) \rightarrow y_1(t)$ a $x_2(t) \rightarrow y_2(t)$ potom $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \rightarrow \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$

2) Časová invariancia: $x(t-t_0) \rightarrow y(t-t_0)$ nezáviske od $t_0 \in R$

3) Kauzalita: $y(t_0)$ je závislý iba od $x(t)$, kde $t \leq t_0$

Je daná sústava stabilná?

- Sústava je stabilná ak ľubovoľný vstupný signál $x(t)$ s konečnou amplitúdou vyvolá signál $y(t)$ s konečnou amplitúdou
- Čo je konečná amplitúda? $f(t)$ má konečnú amplitúdu, keď $|f(t)| \leq \infty; t \in R$

Opis LSKI sústavy

- Výstup (odozva) v danom čase je daný
  - Lineárnou závislosťou od aktuálnej budiacej hodnoty
  - Lineárnou kombináciou starších budiacich hodnôt
  - Lineárnou kombináciou starších výstupných hodnôt
- Vstupno/výstupné správania sa dá opísať lineárnou diferenciálnou rovnicou s konštantnými koeficientami a pravou stranou

$$b_m \frac{d^m y(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} y(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_0 y(t) = a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 x(t)$$

Táto rovnica sa dá pekne riešiť pomocou Laplaceovej transformácie ➔ Laplaceova transformácia (opakovanie)

Laplaceova transformácia (opakovanie)

- Zovšeobecenie Fourierovej Transformácie
- Namiesto $e^{j\omega t}$ sa používa e^{pt}, kde $p = \sigma + j\omega$ sa nazýva **komplexná frekvencia**.
- Namiesto frekvenčnej osi, máme „p“ rovinu

Dopredná transformácia:

$$X(p) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-pt}dt$$

resp. pre kauzálne signály stačí

$$X(p) = \int_{0}^{\infty} x(t)e^{-pt}dt$$

Spätná transformácia (integrácia po zvislej priamke prechádzajúcej bodom σ:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} X(p)e^{pt}dp$$

Podmienka existencia Laplaceovej transformácie je nasledovná:

$$\int_{0}^{\infty} |x(t)|e^{-\sigma t}dt < \infty$$

Kde $e^{-\sigma t}$ sa nazýva **<u>činiteľ konvergencie</u>**. Oblasť v „p“ rovine, v ktorej existuje Laplaceova transformácia sa volá oblasť konvergencie.

Vidíme, že Fourierova Transformacia je špeciálnum prípadom Laplaceovej transformácie, keď $p = j\omega$ a platí to za predpokladu, že oblasť konvergencie zahŕňa os $j\omega$.

Oblasť konvergencie – príklady

Príklad 1

Nech $x(t) = e^{-at}\sigma(t)$

Potom $$X(p) = L\left\{e^{-at}\sigma(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}\sigma(t)e^{-pt}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-pt}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(p+a)t}dt = -\frac{1}{p+a}(0-1) = \frac{1}{p+a}$$

Podmienka existencie je

$$\int_{0}^{\infty} \left|x(t)\right| e^{-\sigma t}dt < \infty \quad \Rightarrow \quad \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-\sigma t}dt < \infty \quad \Rightarrow \quad \int_{0}^{\infty} e^{-(a+\sigma)t}dt < \infty$$

Teda pre oblast konvergencie platí:

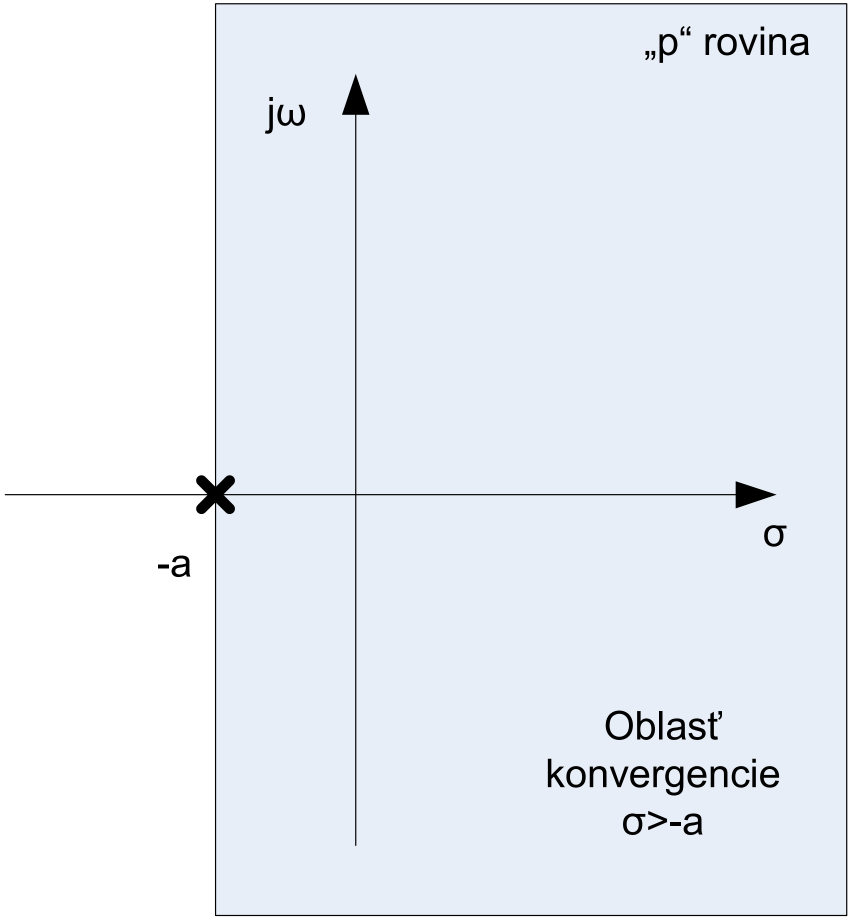
$$a + \sigma > 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma > -a$$

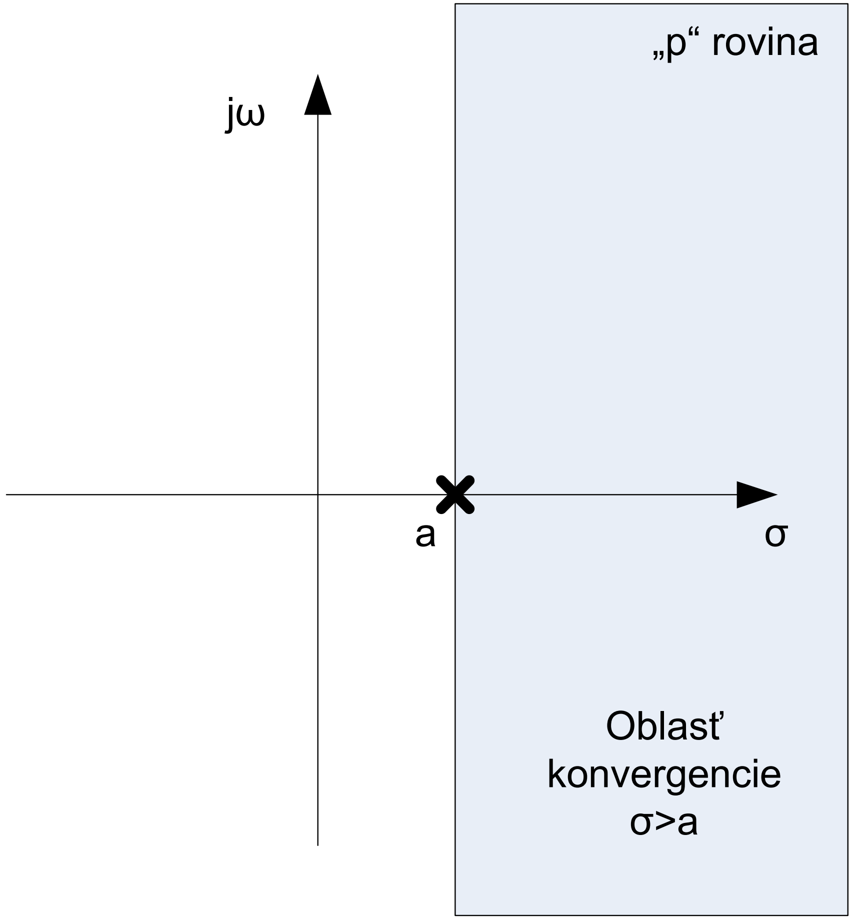
Príklad 2

Nech $x(t) = e^{at}\sigma(t)$, potom ..... oblasť konvergencie je $\sigma > a$

Nuly a póly $X(p)$

- Nulová hodnota $X(p)$ - nula v danej hodnote p – kreslí sa znakom „o“ v „p“ rovine
- Nekonečne veľká hodnota $X(p)$ - pól v danej hodnote p – kreslí sa znakom „x“ v „p“ rovine


„p“ rovina
jω
σ
-a
Oblasť
konvergencie
σ>-a


„p“ rovina
jω
a
σ
Oblasť
konvergencie
σ>a

LAPLACEOVA TRANSFORMÁCIA - VLASTNOSTI

Názov	Časová oblasť	Transformačná oblasť	Poznámka
	$x(t)$, neperiodické $y(t)$, neperiodické	$X(p)$, $Y(p)$,	$X(p)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-pt}dt$ $\quad$ $x(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} X(p)e^{pt}dp$
Linearita	$\alpha x(t)+\beta y(t)$	$\alpha X(p)+\beta Y(p)$	
Posunutie v čase	$x(t-t_0)$	$X(p)e^{pt_0}$	
Posunutie vo frekvencii	$x(t)e^{p_0 t}$	$X(p-p_0)$	
Derivácia v čase	$\frac{dx(t)}{dt}$	$pX(p)-x(0)$	
Derivácia vo frekvencii	$-tx(t)$	$\frac{dX(p)}{dp}$	
Integrovanie v čase	$\int\limits_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$X(p)/p-x^{-1}(0)/p$	
Integrovanie vo frekvencii	$x(t)/t$	$\int\limits_{p}^{\infty} X(s)ds$	
Konvolúcia v čase	$x(t)*y(t)$	$X(p)Y(p)$	
Násobenie v čase	$x(t)y(t)$	$x(n)=\frac{1}{2\pi j}X(p)*Y(p)$	

Laplaceova transformácia niektorých základných signálov

Signál	Definícia v čase	Laplaceova transformácia
Jednotkový impulz	$\delta(t)$	1
Jednotkový skok	$\sigma(t)=\begin{cases}1 & pre\, t\geq 0\\ 0 & inak\end{cases}$	$\frac{1}{p}$
	$e^{-at}\sigma(t)$	$\frac{1}{p+a}$
	$\sigma(t)=\sigma(t-t_0)$	$\frac{1-e^{-pt_0}}{p}$

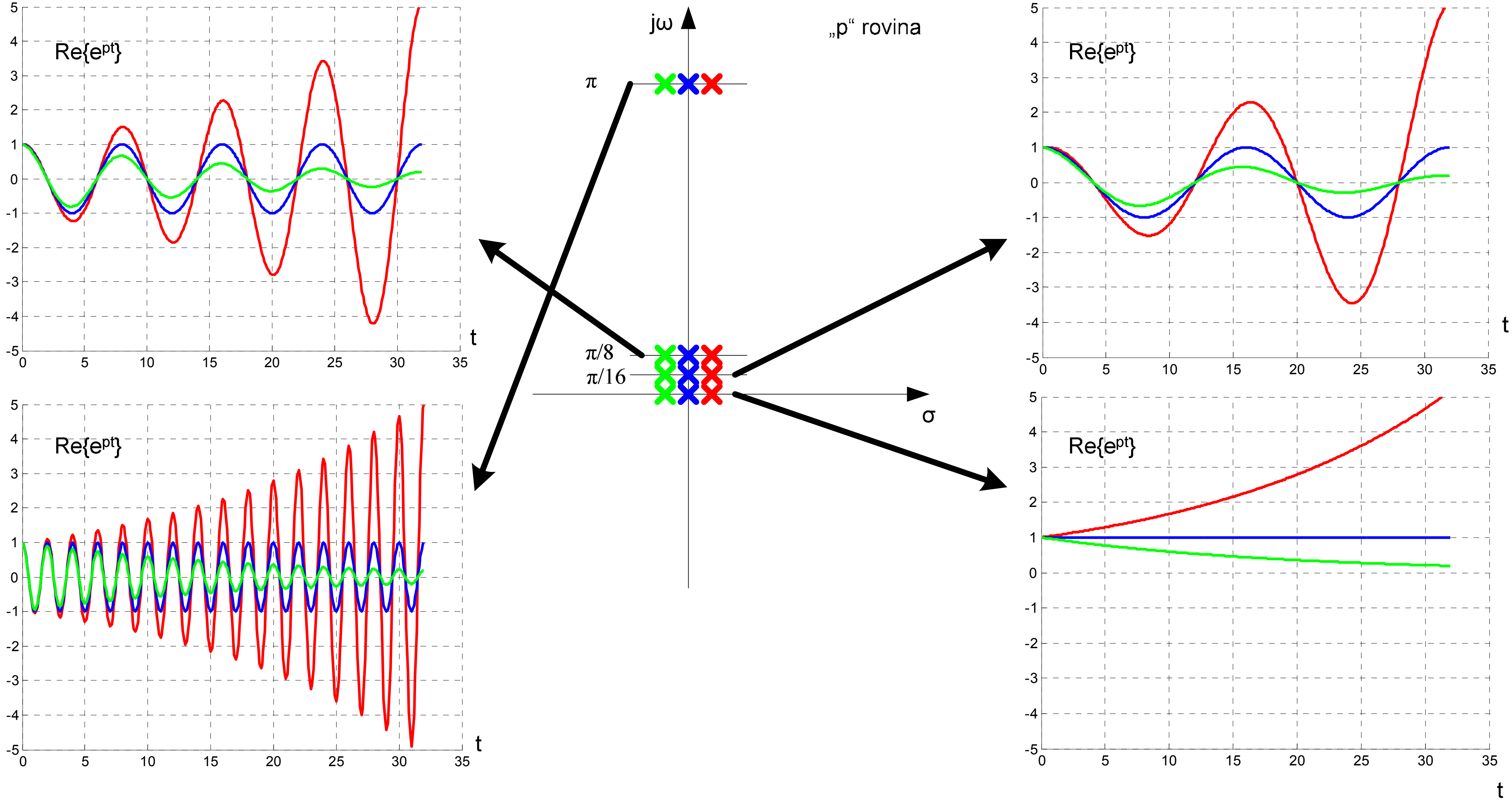
Laplaceova transformácia – interpretácia e^{-pt}

$$X(p)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-pt}dt$$

Čomu sa rovná hodnota v bode „p“?

S akými funkciami sa násobí $x(t)$ v integrále?

Aký tvar v závislosti od komplexnej frekvencie „p“ má $e^{pt}=e^{(\sigma+j\omega)t}=e^{\sigma t}e^{j\omega t}$?



Re{e^pt}
Re{e^pt}
t
t
jω
„p“ rovina
π
π/8
π/16
σ
Re{e^pt}
Re{e^pt}
t
t