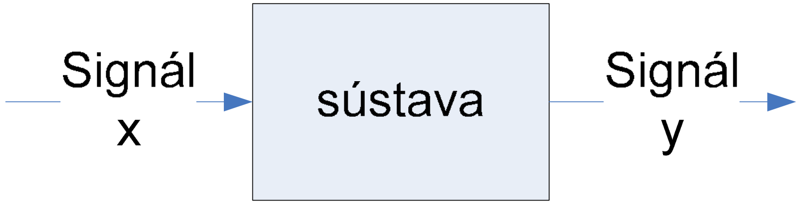
SÚSTAVY

- **<u>Sústava</u>** – signál vždy existuje v nejakej sústave (systéme), čo je množina prvkov, ktoré navzájom na seba pôsobia, aby plnili čo treba.



- Sústava bez styku s okolím pomocou nejakých signálov nemá zmysel
- Až doteraz sme robili analýzu signálov bez rozboru vzájomného pôsobenia sústav a signálov (ale predpokladali sme, že signál vznikol/existuje/šíri sa ... v nejakej sústave), je vstupom do nejakej sústavy ...)
- Budeme analyzovať jednoduché sústavy s jedným vstupom (**<u>budiaci signál</u>** x) a jedným výstupom (**<u>odozva</u>** y).

Opis sústavy

- Vonkajší – máme informáciu len o správaní sa výstupov v závislosti od vstupu. Snažíme sa aj o identifikáciu sústavy.
- Vnútorný – používa sa ak je štruktúra sústavy dostatočne známa

Delenie sústav

1)Podľa matematického modelu

a. Lineárne: vieme ich popísat lineárnymi diferenciálnymi resp. diferenčnými rovnicami. Platí princpíp superpozície a proporcionality (ak $x_1 \to y_1$ a $x_2 \to y_2$ potom $\alpha x_1 + \beta x_2 \to \alpha y_1 + \beta y_2$).

b. Nelineárne: neplatí vyššie uvedené.

2)Podľa sústredenosti parametrov

a. Sústredené (geometrické rozmery sústavy sú zanedbateľne malé oproti rozmerom ktoré ovplyvňujú šírenie)

b. Nesústredené (napr. vedenia)

3)Parametrickosť

a. Parametrické (aspoňe jeden parameter sústavy záleží od nejakej vonkajšej nezávislej veličiny)

b. Neparametrické

4)Premennostˇ v čase

a. Časovo nepremenné (vlastnosti sa nemenia včase, t.j. časovo invariantné)

b. Časovo premenné

Delenie sústav (pokračovanie)

5) Typ používaných signálov
   a. Spojité v čase
   b. Diskrétne v čase
      i. Spojité v hodnote
      ii. Diskrétne v hodnote
   c. Kombinované (hybridné)

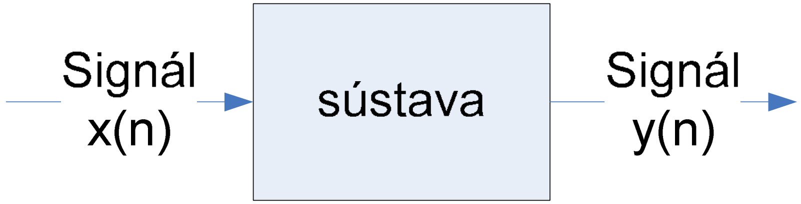
6) Pamäť
   a. Bezpamäťové: hodnota odozvy v každom časovom okamihu závisí len od hodnoty budiaceho signálu v danom čase.
   b. Pamäťové: hodnota odozvy v každom časovom okamihu závisí aj od hodnoty budiaceho signálu mimo daného času

7) Kauzalita
   a. Kauzálne – odozva záleží len od hodnoty budiaceho signálu v danom čase, resp. predtým
   b. Nekauzálne – odozva záleží aj od hodnoty budiaceho signálu, ktorá ešte len bude.

Aké sústavy budeme bližšie analyzovať?

Základné vlastnosti	skratka	Skúmané typy
Lineárne + Spojité + Kauzálne + Invariantné (v čase)	LSKI	neparametrické, pamäťové
Lineárne + Diskrétne + Kauzálne + Invariantné (v čase)	LDKI	neparametrické, pamäťové

LDKI (Lineárne diskrétne kauzálne invariantné)



- vstup (**<u>budiaci signál</u>**) x(n)
- výstup (**<u>odozva</u>**) y(n)

Základné vlastnosti (je daná sústava LDKI?):

1) Linearita: Sústava je lineárna ak platí princí linearity a superpozície: ak $x_1(n) \to y_1(n)$ a $x_2(n) \to y_2(n)$ potom $\alpha x_1(n) + \beta x_2(n) \to \alpha y_1(n) + \beta y_2(n)$

2) Časová invariancia: $x(n-k) \to y(n-k)$ nezáviske od $k \in Z$

3) Kauzalita: $y(n_0)$ je závislý iba od $x(n)$, kde $n \le n_0$

Je daná sústava stabilná?

- Sústava je stabilná ak ľubovoľný vstupný signál $x(n)$ s konečnou amplitúdou vyvolá signál $y(n)$ s konečnou amplitúdou
- Čo je konečná amplitúda? $f(n)$ má konečnú amplitúdu, keď $|f(n)| \le \infty; n \in Z$

Opis LDKI sústavy

- Výstup (odozve) v danom čase je daný
  - Lineárnou závislosťou od aktuálnej budiacej hodnoty
  - Lineárnou kombináciou starších budiacich hodnôt
  - Lineárnou kombináciou starších výstupných hodnôt
- Opíšeme to lineárnou diferenčnou rovnicou

$$\sum_{k=0}^{M} b_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{N} a_k x(n-k)$$

, kde $b_k, a_k \in R; n, k \in Z$

Vidíme, že LDKI sústava je úplne opísaná sadami koeficientov b_k, a_k

Základná otázky sú:

1) ak poznáme x(n) a k nemu odpovedajúce y(n), ako vyrátať b_k, a_k? Dá sa to? Z jedného pokusu $x(n) \rightarrow y(n)$?
2) Ak poznáme b_k, a_k, mali by sme dokonale vedieť aké ma sústava vlastnosti. Napr. či je stabilná. Ako to zistiť?

Skúmajme LDKI sústavu pomocou známych nástrojov

Prepíšme $a_k \to a(k)$ a $b_k \to b(k)$

$$\sum_{k=0}^{M} b(k)y(n-k) = \sum_{k=0}^{N} a(k)x(n-k)$$

Vidíme, že na oboch stranách sa jedná o konvolúciu diskrétnych signálov!

$$b(n) * y(n) = a(n) * x(n)$$

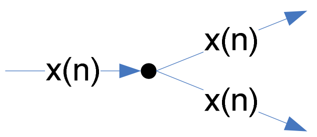
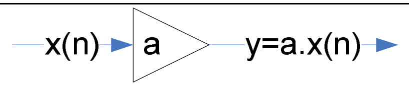
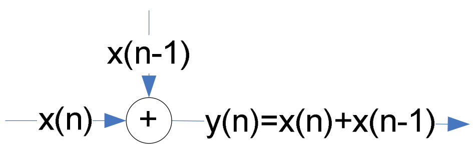
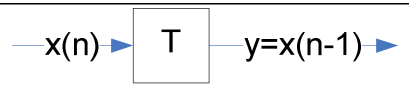
Kde sa tam nabrala konvolúcia a ako si to predstavit?

Z pôvodnej rovnice vyjadrime y(n) a kvoli jednoduchosti položme $b_0 = 1$:

$$b_0 y(n) + \sum_{k=1}^{M} b_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{N} a_k x(n-k)$$

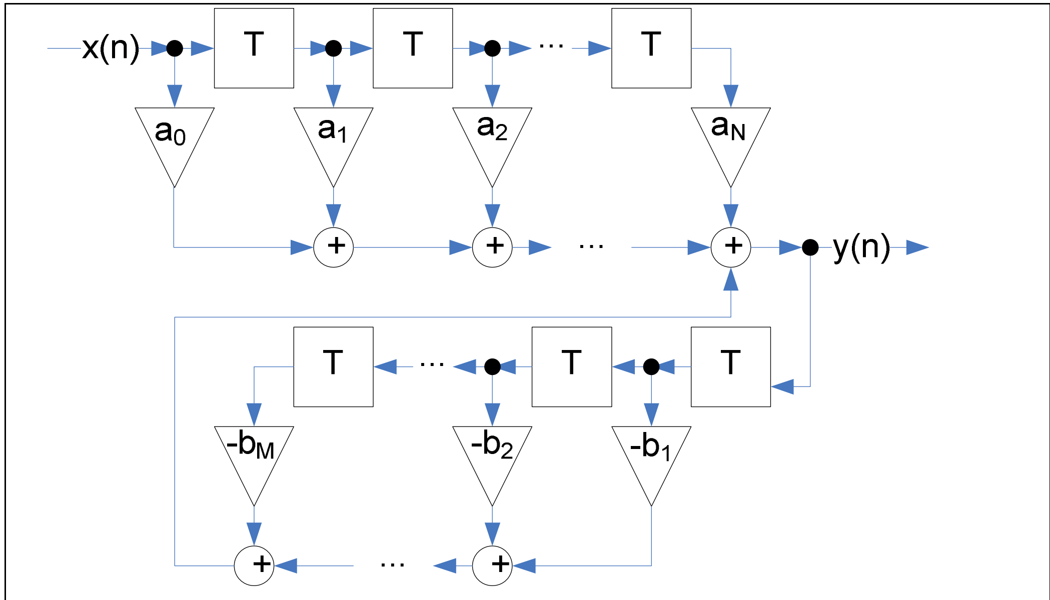
$$y(n) = \sum_{k=0}^{N} a_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{M} b_k y(n-k)$$

Čo sa deje v sústave môžeme zakresliť pomocou nasledovných prvkov:

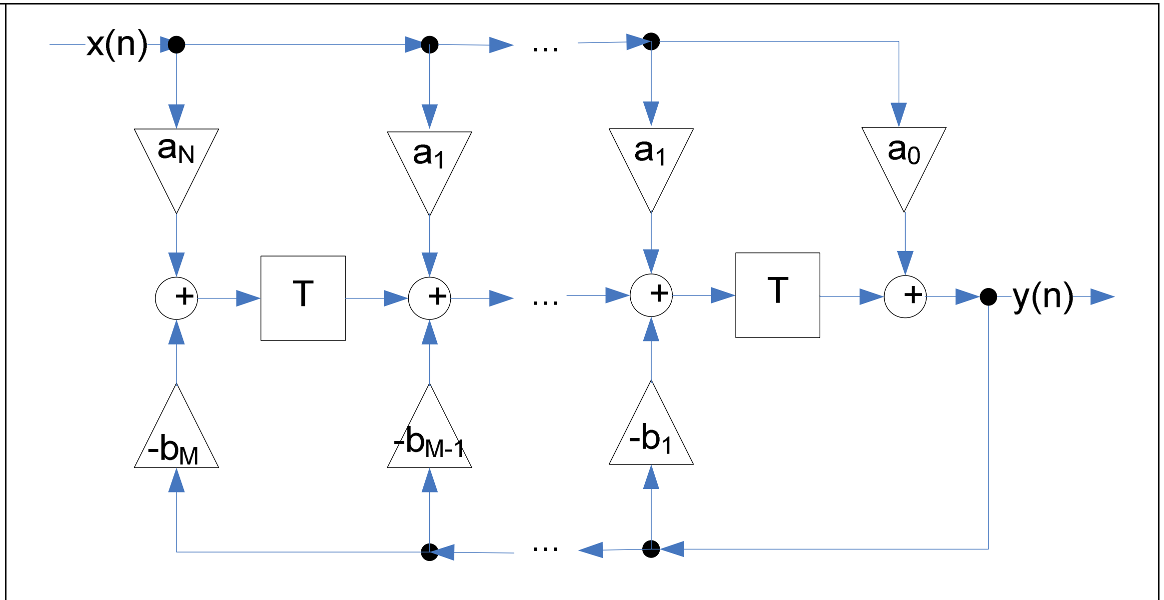
Názov	Označenie	Názov	Označenie
Rozvetvenie		Násobička	
Sumátor		Oneskorovací člen (posuvný register)	

Teda ešte raz: Kde sa tam nabrala konvolúcia a ako si to predstavit?

$$y(n)=\sum_{k=0}^{N}a_k x(n-k)-\sum_{k=1}^{M}b_k y(n-k)$$



Priamy nekánonický model



Priamy kánonický (minimálny počet prvkov) model

Urobme DTFT vzťahu:

$$b(n) * y(n) = a(n) * x(n)$$

Vyjadrime si to vo frekvenčnej oblasti:

$$B(\Omega)Y(\Omega) = A(\Omega)X(\Omega)$$

$$Y(\Omega) = \frac{A(\Omega)}{B(\Omega)}X(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega)$$

A naspäť v čase v pomocou inverznej DTFT:

$$y(n) = h(n) * x(n)$$

Teda ak existuje DTFT a inverzná DTFT ako je uvedené vyžšie vidíme že výstup ke konvolúciou vstupu a $h(n)$. Čo je to $h(n)$?

Uvažujme ako vstupný signál jednotkový impulz :

$$x(n) = u(n) = \begin{cases} 1 & pre\, n = 0 \\ 0 & inak \end{cases}$$

Čomu sa rovná $U(\Omega)$?

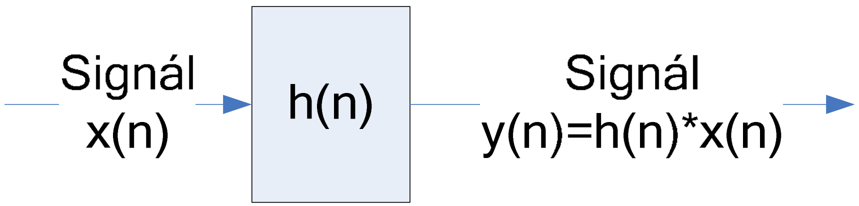
$$U(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n)e^{-j\Omega n} = 1e^{-j\Omega 0} = 1$$

Čo bude na týstupe sústavy, keď na vstup privedieme takýto signál?

$$Y(\Omega) = H(\Omega)1 = H(\Omega)$$

$$y(n) = h(n)$$

Čo je to $h(n)$? Je to odpoveď sústavy na jednotkový impulz!



Ake boli základné otázky?

1) ak poznáme x(n) a k nemu odpovedajúce y(n), ako vyrátať b_k, a_k? Dá sa to? Z jedného pokusu $x(n) \to y(n)$?

2) Ak poznáme b_k, a_k, mali by sme dokonale vedieť aké ma sústava vlastnosti. Napr. či je stabilná. Ako to zistiť?

Vie nám DTFT v tomto nejako pomôcť? Iba čiastočne.

- Napr. otázka stability sústavy. Keďže $Y(\Omega) = \dfrac{A(\Omega)}{B(\Omega)} X(\Omega)$ problém zo stabilitou asi bude, ak $B(\Omega)$ bude 0 pre nejaké Ω (vtedy máme môžeme mať problém DTFT zinvertovať).
- T.j. $a(n)$ asi nestabilitu nebudú spôsobovať (na výstup ide lineárna kombinácia vstupov). Ale b(n) asi hej (rekurzia ...)

Príklad:

Na vstupe máme signál x(n)=(1,1). Nech a(n)=(1,1), b(n)=(1, 2)

Čomu sa rovná y(n)? Je sústava stabilná?

n	$x(n)$	$\sum_{k=0}^{N} a(k)x(n-k)$	$\sum_{k=1}^{M} b(k)y(n-k)$	$y(n)$
0	1	1.1+1.0=1	1.0+2.0=0	1-0=1
1	1	1.1+1.1=2	1.1+2.0=1	2-1=1
2	0	1.0+1.1=1	1.1+2.1=3	1-2=-2
3	0	1.0+1.0=0	1.-2+2.1=0	0-0=0
4	0	1.0+1.0=0	1.0+2.-2=-4	0--4=4
5	0	1.0+1.0=0	1.4+2.0=4	0-4=-4
6	0	1.0+1.0=0	1.-4+2.4=4	0-4=4
7	0	1.0+1.0=0	1.4+2.-4=-4	0--4=4
8	0	1.0+1.0=0	1.4+2.4=12	0-12=-12
9	0	1.0+1.0=0	1.-12+2.4=-4	0-4=-4
10	0	1.0+1.0=0	1.-4+2.-12=-28	0-28=28
...	....	...	...	...

Sústava nevyzerá stabilne ... Hodnoty $y(n)$ asi budú rásť do nekonečna.

Vidíme, že nestabilitu nám spôsobujú b(n). Ako vyzerá $B(\Omega)$? $B(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} b(n)e^{-j\Omega n}=1+2e^{-j\Omega}$ ... táto funkcia nemá pre žiadne Ω nulovú hodnotu. Hm ... $B(\Omega)$ nás teda nevaruje ... ako ďalej?

Z transformácia

Nech x(n) je diskrétna postupnosť. Potom Z transformácia tejto postupnosti je:

$$Z\{x(n)\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

, kde $z \in C$. Oblasť konvergencie uvedeného radu môžeme vyjadriť ako:

$$\left\{ z : \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \right| < \infty \right\}$$

Pôvodnú postupnosť môžeme získať pomocou inverznej Z transformácie pomocou vzťahu:

$$x(n) = Z^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

Kde C predstavuje kružnicu $z = re^{j\phi}$, ktorá sa musí nachádzať v oblasti konvergencie $X(z)$.

Príklad:

Nech $x(n) = (1,1)$. Čomu sa rovná $X(z)$?

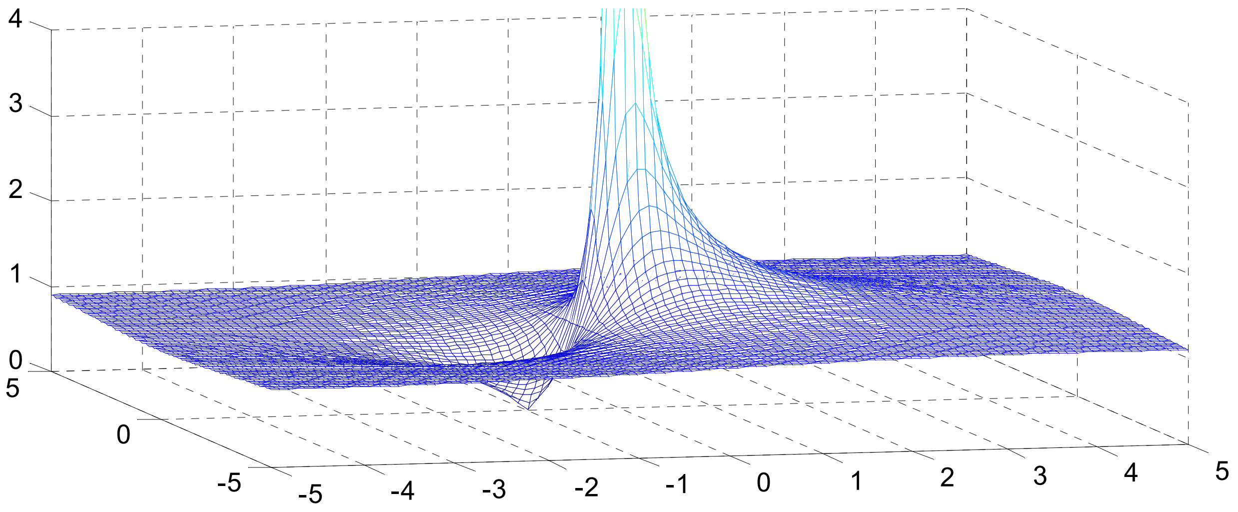
$$X(z) = Z\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \ldots + x(0) z^{-0} + x(1) z^{-1} + \ldots = 1 + z^{-1} = 1 + \frac{1}{z}$$

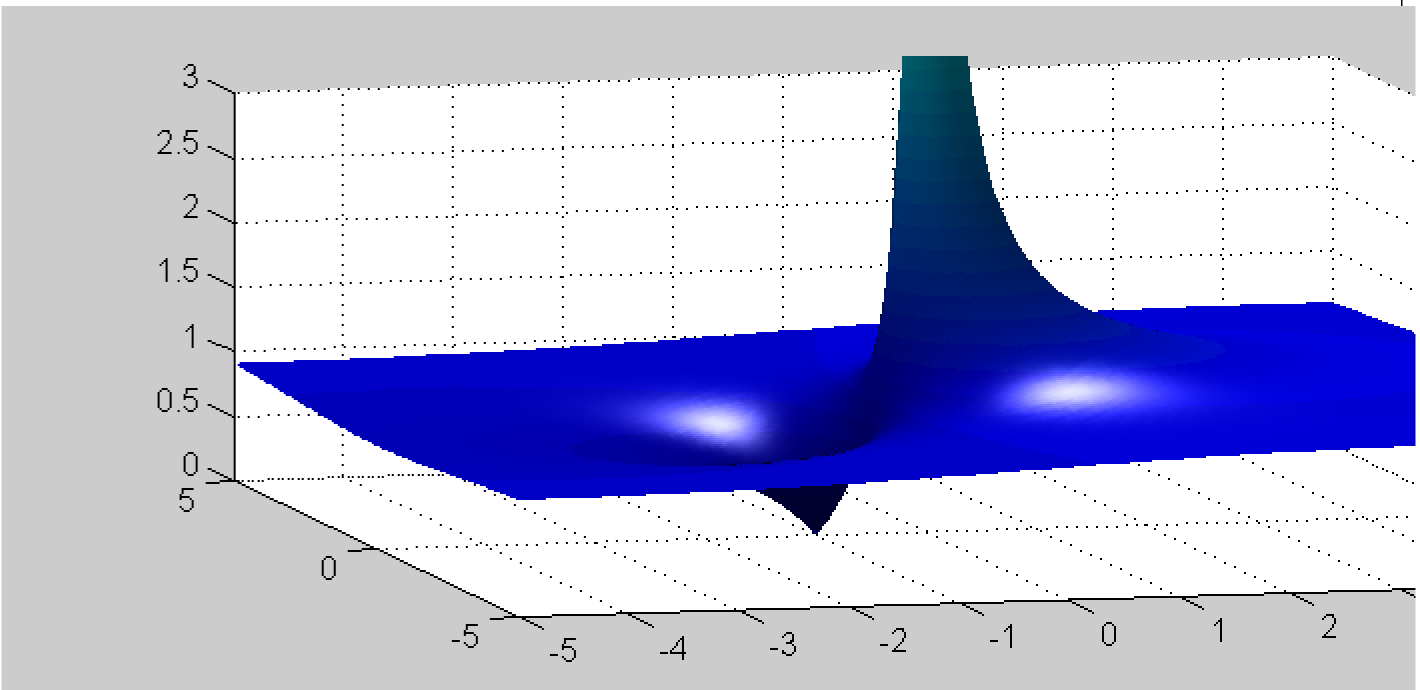
Čomu sa rovná $|X(z)|$?

```
[x,y] = meshgrid(-5:0.1:5)
z=x+i*y;
fz=1+1./z
mesh(x,y,abs(fz))
zlim([0,4])

figure
surf(x,y,abs(fz),'FaceColor','int
erp',...
 'EdgeColor','none',...
 'FaceLighting','phong')
camlight left
zlim([0,3])
```

$|X(z)|$





Ako zobrazenie zjednodušiť ?