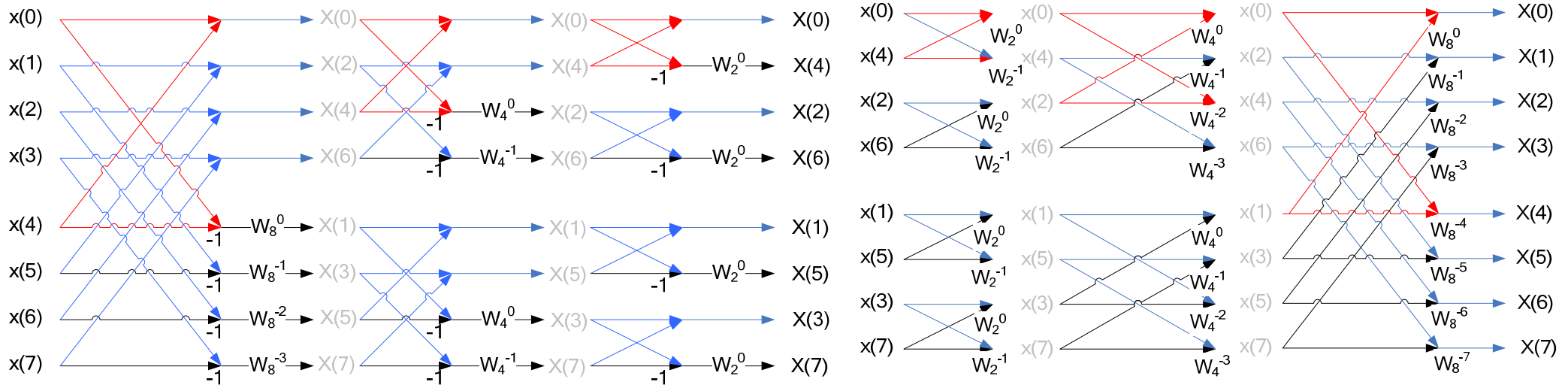


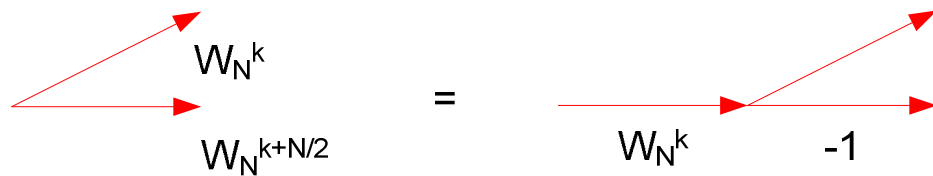
RÝCHLY ALGORITMUS – VLASTNOSTI

- Rýchly algoritmus výpočtu DFT sa nazýva RFT (Rýchla Fourierova Transformácia)
- RFT má výhodu oproti DFT - vieme ho realizovať bez spotreby ďalšej pamäti (t.j. „in place“)
- V oboch uvedených spôsoboch výpočtu RFT sa nachádza „motýlik“ (označený Červenou):



Preto sa tento spôsob výpočtu nazýva aj výpočet „motýlikovým diagramom“.

- Zložitosť na pravej strane sa môže javiť ako väčšia (2 skutočné komplexné násobenia na motýlik namiesto jedného) avšak celá pravá strana sa dá prekresliť do jednoduchšieho tvaru pomocou:



$$W_N^{k+N/2} = W_N^k W_N^{N/2} = W_N^k e^{j \frac{2\pi N}{N} \frac{1}{2}} = W_N^k e^{j\pi} = W_N^k (-1)$$

Ak teda vstupný signál má N hodnôt, pre počet operácií a zložitosť výpočtu platí:

Operácia	Pomalý algoritmus	Rýchly algoritmus
Komplexné sčítanie	$N(N-1) = N^2 - N$	$N \log_2 N$
Komplexné násobenie	$NN = N^2$	$N \log_2 N$
Zložitosť algoritmu	$O(N^2)$	$O(N \log_2 N)$

- Zatiaľ sme robili algoritmus pre $N = 2^M$, $M = 1, 2, 3, \dots$. Odpovedajúci typ RFT sa nazýva aj „radix 2“, t.j. základ 2 (myslí sa tým dezinácia so základom 2), resp. podľa autorov (Cooley-Tukey 1965)
- Ak $N = 4^M$, $M = 1, 2, 3, \dots$ dá sa vytvoriť mierne efektívnejší algoritmus ...
- Ak $N = R^M$, $M = 1, 2, 3, \dots$ dajú sa vytvoriť rýchle algoritmy pre iné základy R ...
- Efektívnejšie algoritmy existujú ak chceme rátať DFT s reálnych signálov (cca 60% úspora počtu operácií)
- Existujú algoritmy s inými pomerní počtu sčítaní a násobení fungujúce pre rôzne N
 - Winogradov (Winograd Fourier Transform Algorithm – WFTA)
 - Prime Factor Algorithm (PFA)
 - Delený základ (Split Radix algorithm)
- S novšími generáciami DSP/FPU sa stiera bývalá väčšia dôležitosť počtu násobení. Vo všeobecnosti záleží veľmi od konkrétneho typu procesora, ktorý algoritmus RFT pobeží na ňom najrýchlejšie
- **Stále ostáva otvorený základný problém: existuje rýchlejší algoritmus ako $O(N \log_2 N)$?
(žiadny rýchlejší sa zatiaľ nenašiel, ani sa nedokázalo, že taký neexistuje)**

DFT - VLASTNOSTI

- Platí $x(n) \xleftrightarrow{DFT} X(k)$, $n \in \mathbb{Z}, x(n) \in \mathbb{C}; X(k) \in \mathbb{C}$
- Platí $y(n) \xleftrightarrow{DFT} Y(k)$, $n \in \mathbb{Z}, y(n) \in \mathbb{C}; Y(k) \in \mathbb{C}$

Názov	Časová oblasť	Frekvenčná oblasť	Poznámka
	$x(n)$, periodické $y(n)$, neperiodické	$X(k)$, periodické $Y(k)$, periodické	$X(k) = \sum_n x(n) W_N^{-kn}, \quad W_N = e^{j\frac{2\pi}{N}}$ $x(n) = \frac{1}{N} \sum_k X(k) W_N^{kn}$
Linearita	$\alpha x(n) + \beta y(n)$	$\alpha X(k) + \beta Y(k)$	
Časové posunutie	$x(n - n_0)$	$W_N^{-kn_0} X(k)$	Odvođenje nižšie
Časové otočenie	$x(-n)$	$X(-k)$	Odvođenje nižšie
Posunutie vo frekvencii	$x(n) W_N^{nk_0}$	$X(k - k_0)$	Odvođenje nižšie
Konvolúcia v čase	$x(n) * y(n)$	$X(k) Y(k)$	
Násobenie v čase	$x(n) y(n)$	$\frac{1}{N} X(k) * Y(k)$	
Konjugácia v čase	$\overline{x(n)}$	$\overline{X(-k)}$	Odvođenje nižšie
Symetria v spektre	$x(n)$ reálny	$X(k) = \bar{X}(-k)$	
Parsevalova teoréma	$E = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) ^2$	$E = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) ^2$	
Dualita	$X(n)$	$Nx(-k)$	Odvođenje nižšie

$$\begin{aligned} DFT \{x(n - n_0)\} &= \sum_n x(n - n_0) W_N^{-kn} W_N^{kn_0} W_N^{-kn_0} = \sum_n x(n - n_0) W_N^{-k(n-n_0)} W_N^{-kn_0} = \\ &= W_N^{-kn_0} \sum_n x(n - n_0) W_N^{-k(n-n_0)} = W_N^{-kn_0} X(k) = e^{-j2\pi kn_0/N} X(k) \end{aligned}$$

$$DFT \{x(-n)\} = \sum_n x(-n) W_N^{+k(-n)} = X(-k)$$

$$\begin{aligned} IDFT \{X(k - k_0)\} &= \frac{1}{N} \sum_k X(k - k_0) W_N^{kn} = \frac{1}{N} \sum_k X(k - k_0) W_N^{kn} W_N^{-k_0 n} W_N^{k_0 n} = \\ &= W_N^{k_0 n} \frac{1}{N} \sum_k X(k - k_0) W_N^{(k-k_0)n} = W_N^{k_0 n} x(n) \end{aligned}$$

$$DFT \{\overline{x(n)}\} = \sum_n \overline{x(n)} W_N^{-kn} = \overline{\sum_n x(n) \overline{W_N^{-kn}}} = \overline{\sum_n x(n) W_N^{-(-k)n}} = \overline{X(-k)}$$

Dualita. Upravme:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_k X(k) W_N^{kn} = x(n) = \sum_k \left(\frac{1}{N} X(k) \right) W_N^{kn} = \sum_k \left(\frac{1}{N} X(-k) \right) W_N^{-kn}$$

Zameníme k s n :

$$x(k) = \sum_n \left(\frac{1}{N} X(-n) \right) W_N^{-kn}$$

Výsledkom je teda: $\frac{1}{N} X(-n) \xleftrightarrow{DFT} x(k)$ resp. $X(n) \xleftrightarrow{DFT} Nx(-k)$

POROVNANIE - DTFT-VLASTNOSTI

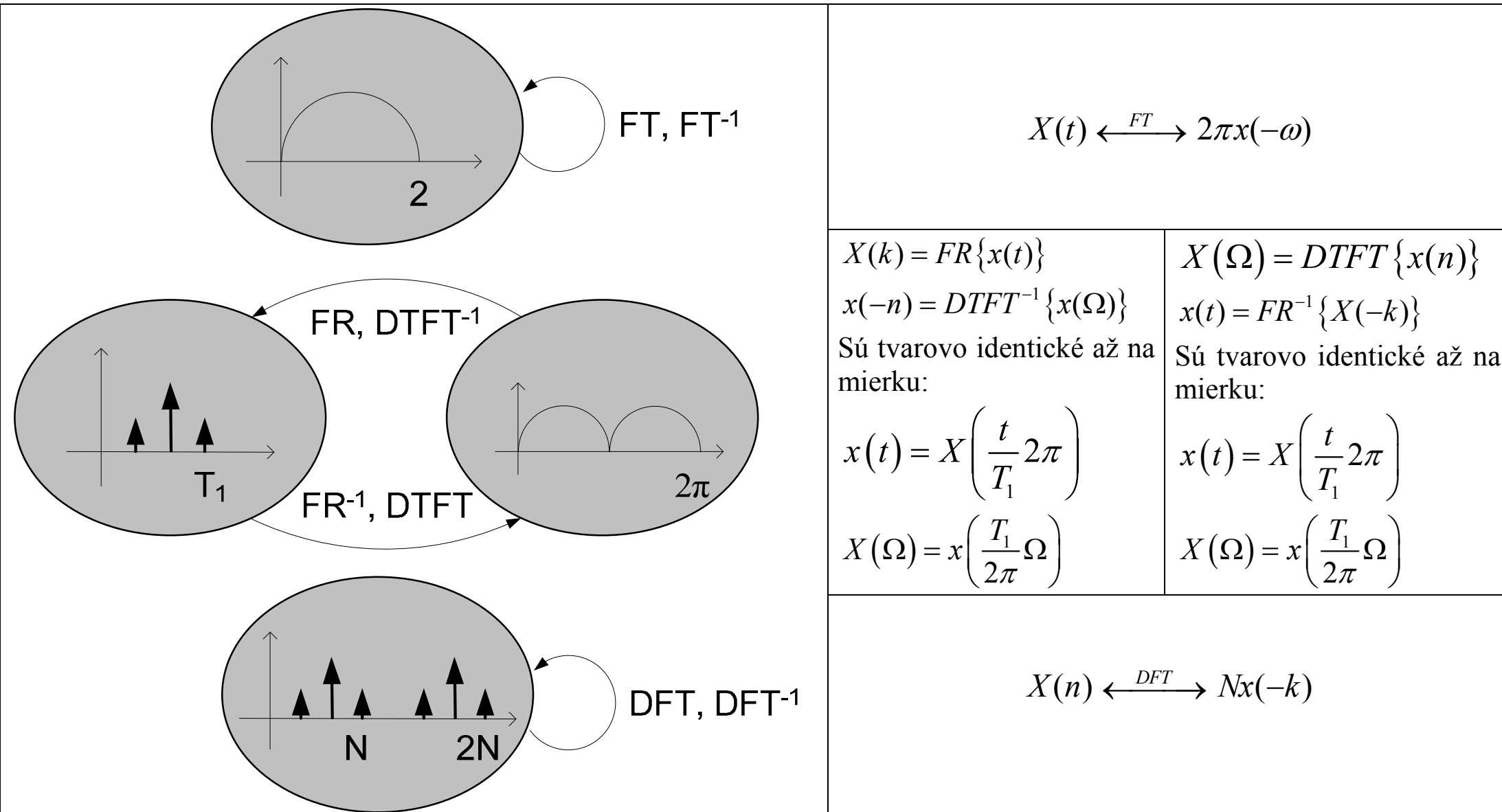
- Platí $x(n) \xleftrightarrow{DTFT} X(\Omega)$, $n \in \mathbb{Z}, x(n) \in \mathbb{C}; X(\Omega) \in \mathbb{C}$
- Platí $y(n) \xleftrightarrow{DTFT} Y(\Omega)$, $n \in \mathbb{Z}, y(n) \in \mathbb{C}; Y(\Omega) \in \mathbb{C}$

Názov	Časová oblasť	Frekvenčná oblasť	Poznámka
	$x(n)$, $y(n)$, diskkrétne neperiodické	$X(\Omega)$, $Y(\Omega)$ - spojité periodické, perióda 2π	$X(\Omega) = \sum_n x(n)e^{-j\Omega n}$ $x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n} d\Omega$
Linearita	$\alpha x(n) + \beta y(n)$	$\alpha X(\Omega) + \beta Y(\Omega)$	
Časové posunutie	$x(n - n_0)$	$e^{-j\Omega n_0} X(\Omega)$	
Časové otočenie	$x(-n)$	$X(-\Omega)$	
Posunutie vo frekvencii	$e^{j\Omega_0 n} x(n)$	$X(\Omega - \Omega_0)$	
Konvolúcia v čase	$x(n) * y(n)$	$X(\Omega)Y(\Omega)$	
Násobenie v čase	$x(n)y(n)$	$\frac{1}{2\pi} X(\Omega) * Y(\Omega)$	
Symetria v spektre	$x(n)$ reálny	$X(\Omega) = \overline{X(-\Omega)}$	
Parsevalova teoréma	$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) ^2$	$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) ^2 d\Omega$	

Dualita – revízia

Čo ak nám niekto zadá signál, ale nepovie čo je na osi x? (čas?, frekvencia (ω ?/ Ω ?/ f ?))

My automaticky predpokladáme, že čas ale čo keď sme sa mýlili? (mal náš výpočet nejakú hodnotu, či ho treba opakovat' znovu?)



Odvod'me: $X(\Omega) = DTFT\{x(n)\}$ je tvarovo identické s $x(t) = FR^{-1}\{x(-k)\}$

Platí: $DTFT$: $X(\Omega) = \sum_n x(n)e^{-j\Omega n}$ FR^{-1} : $x(t) = \sum_k X(k)e^{jk\omega_1 t}$

Ak chceme zmeniť prvý integrál na druhý tak musí platiť: $-j\omega_1 kt = j\Omega n \Rightarrow -tk2\pi / T_1 = \Omega n$

T.j. $n = -k$ a zároveň $\frac{t}{T_1} = \frac{\Omega}{2\pi} \Rightarrow \Omega = \frac{t}{T_1} 2\pi$

Dostávame: $X\left(\frac{t}{T_1} 2\pi\right) = \sum_n x(n)e^{-jn2\pi t/T_1} = \sum_n x(n)e^{-jnt\omega_1} = \sum_n x(-n)e^{jnt\omega_1} = \sum_k X(k)e^{jk\omega_1 t} = x(t)$

Odvod'me: $X(k) = FR\{x(t)\}$ je tvarovo identické s $x(n) = DTFT^{-1}\{x(-\Omega)\}$

Platí: FR : $X(k) = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} x(t)e^{-jk\omega_1 t} dt$ $DTFT^{-1}$: $x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n} d\Omega$

Ak chceme zmeniť prvý integrál na druhý tak musí platiť: $-j\omega_1 kt = j\Omega n \Rightarrow -tk2\pi / T_1 = \Omega n$

T.j. $n = -k$ a zároveň $\frac{t}{T_1} = \frac{\Omega}{2\pi}$

Dostávame: $dt = d\Omega \frac{T_1}{2\pi}$

$X(k) = \frac{1}{T_1} \int_{T_1} x(t)e^{-jkt2\pi/T_1} dt = \frac{1}{T_1} \frac{T_1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x\left(\Omega \frac{T_1}{2\pi}\right) e^{-jk\Omega} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x\left(\Omega \frac{T_1}{2\pi}\right) e^{-jk\Omega} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\Omega)e^{-jk\Omega} d\Omega = x(-n)$

Signály a Priestory

Označenie	Podmienka	Popis
$L^p(R)$	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) ^p dt < \infty$	Ak p=1: Priestor všetkých absolútne integrovateľných spojitých funkcií Ak p=2: Priestor všetkých po štvorcach integrovateľných spojitých funkcií ...
$L^p([a,b])$	$\int_a^b f(t) ^p dt < \infty$	Priestor všetkých p integrovateľných spojitých funkcií na intervale
$l^p(Z)$	$\sum_{-\infty}^{\infty} f(n) ^p < \infty$	Ak p=1: Priestor všetkých absolútne sumovateľných diskretných funkcií Ak p=2: Priestor všetkých po štvorcach sumovateľných diskretných funkcií ...
C^N, R^N		Priestor všetkých N rozmerných vektorov nad poľom C, alebo R.

Signál/operácia

Signál/operácia	Charakteristika
$\delta(t)$	Absolutne integrovateľný, nie je integrovateľný po štvorcach
$si(t)$	Nie je absolútne integrovateľná, je integrovateľná po štvorcach $\int_{-\infty}^{\infty} si(t)dt = \pi = \int_{-\infty}^{\infty} si^2(t)dt$ Poznámka:
$\sin(t), \cos(t), e^{jt}, a$	Nie su absolútne integrovateľné ani po štvorcach
Skalárny súčin, konvolúcia, korelácia	Funkcie musia patriť $L^2(R)$, $l^2(Z)$ resp. C^N, R^N

Vidíme, že pre viaceré uvedené signály sme ráтали FT, FR a operácie bez zadelenia do priestorov.

Porovnanie druhov FT

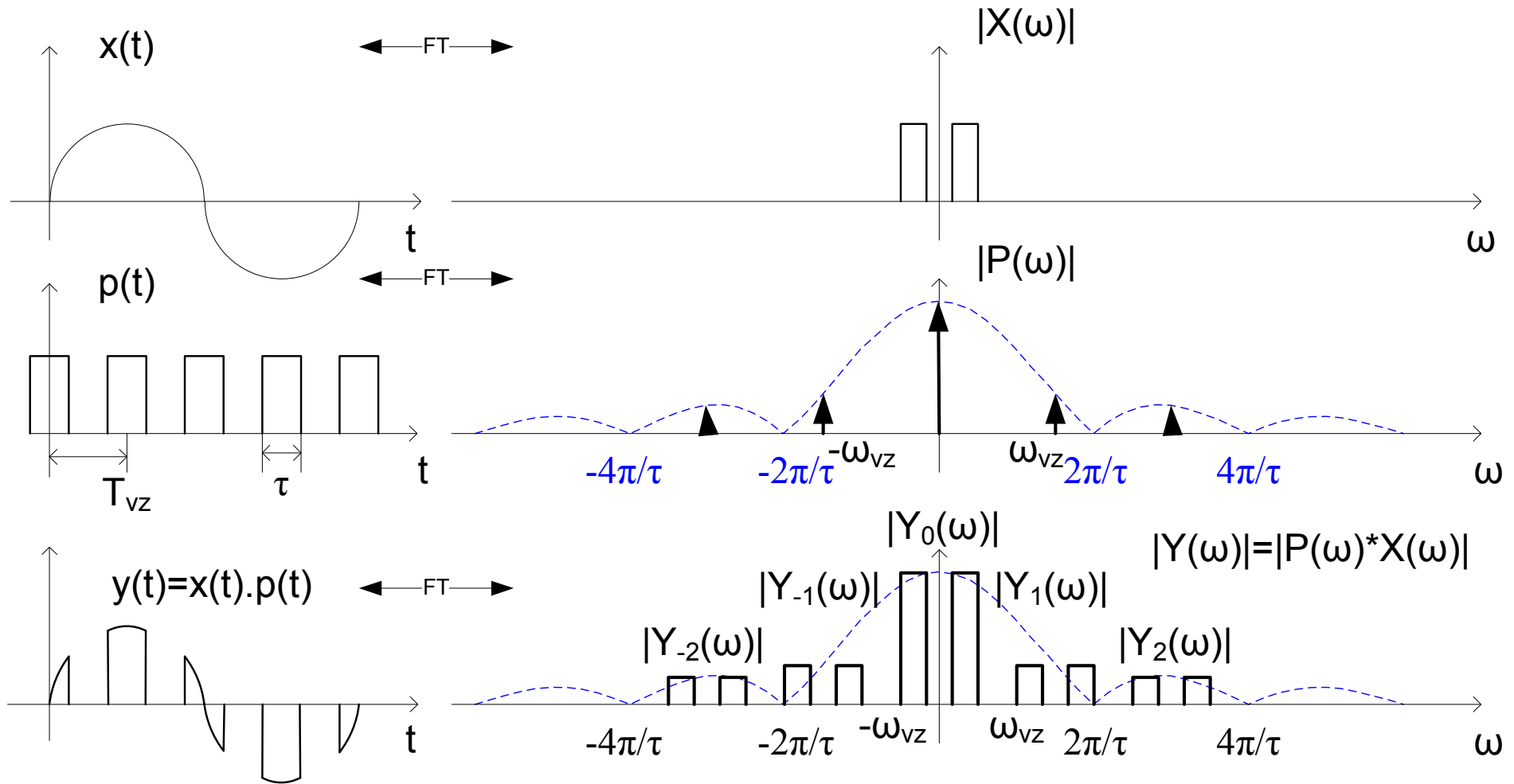
Vlastnosti	FT*	FR	DTFT	DFT
Typ vstupného signálu	Spojité neperiodický	Spojité neperiodický s periódou T_1	Diskrétny neperiodický	Diskrétny periodický s periódou N
Typ spektra	Spojité neperiodické, hladké	Diskrétné neperiodické	Spojité periodické s periódou $\Omega = 2\pi$	Diskrétné periodické s periódou N
Zobrazenie	$L^1(R) \Rightarrow$ spojitá, hladká $L^1(R) \cap L^2(R) \Rightarrow L^2(R)$ $L^2(R) \Rightarrow L^2(R)$	$L^2([-T_1/2, T_1/2])$ $\Rightarrow l^2(Z)$	$l^2(Z) \Rightarrow L^2([- \pi, \pi])$	$C^N \Rightarrow C^N$
Báza		$\left\{ \frac{1}{\sqrt{T_1}} e^{jn\omega_1 t} \right\}$ je ortonormálna báza na intervale $\langle -T_1/2, T_1/2 \rangle$	$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{jn\Omega} \right\}$ je ortonormálna báza na intervale $\langle -\pi, \pi \rangle$	$\left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} W_N^{nk} \right\}$ je ortonormálna báza C^N

***kvôli viacerým signálom ktoré nie sú absolútne ani po štvorcoch integrovateľné sa používa zovšeobecnená FT**

Vzorkovanie – detailný pohľad

- Doteraz sme mali „ideálne vzorkovanie“ (vzorkovanie Diracovým hrebenom/hrablami)
- V reálnych systémoch nemáme nekonečne úzke vzorky
 - Vzorky kopírujú hodnotu signálu v čase (vzorkovanie 1. Druhu)
 - Vzorky držia hodnotu signálu v čase (vzorkovanie 2. Druhu) (Sample and hold)
- Čo s hodnotou
 - AKý to má vplyv? Odsunieme na neskor, teraz predpokladajme „ideálnu presnosť vzoriek“.

Vzorkovanie 1. Druhu



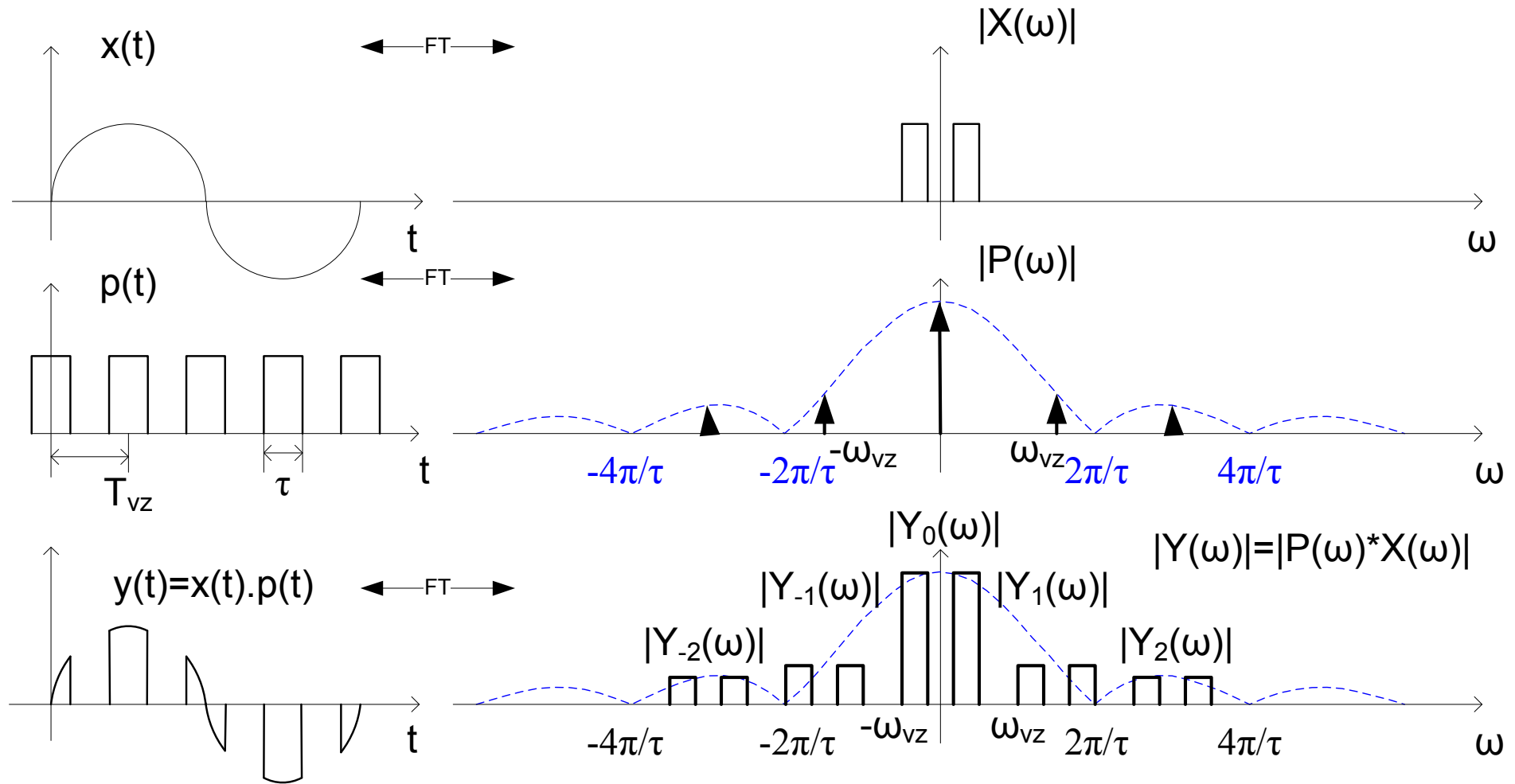
$$y(t) = x(t)p(t)$$

$$p(t) = \sum_k c_k e^{jk\omega_{vz}t} \quad \text{kde} \quad c_k = \frac{1}{T_{vz}} \int_{-T_{vz}/2}^{T_{vz}/2} p(t) e^{jk\omega_{vz}t} dt = \frac{\tau}{T_{vz}} \text{si}(k\pi\tau / T_{vz})$$

$$y(t) = x(t) \sum_k c_k e^{jk\omega_{vz}t} = \sum_k x(t) c_k e^{jk\omega_{vz}t} = \sum_k y_k(t)$$

$$y(\omega) = \sum_k y_k(\omega) \quad y_k(\omega) = \int y_k(t) e^{j\omega t} dt = \int x(t) c_k e^{jk\omega_{vz}t} e^{j\omega t} dt = c_k \int (x(t) e^{jk\omega_{vz}t}) e^{j\omega t} dt = c_k X(\omega - k\omega_{vz})$$

Vzorkovanie 1. Druhu



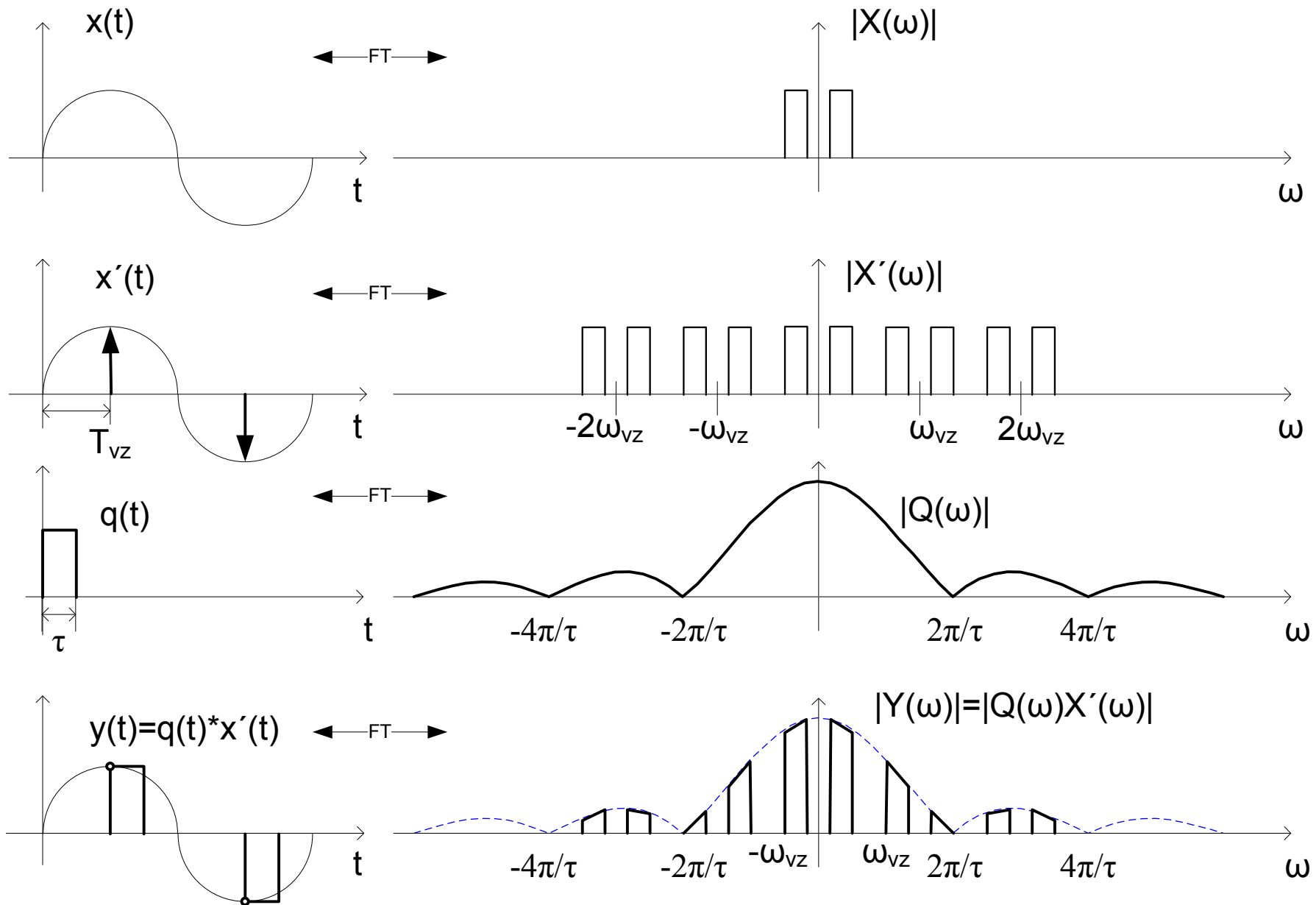
$$y(t) = x(t)p(t)$$

$$p(t) = \sum_k c_k e^{jk\omega_{vz}t} \quad \text{kde} \quad c_k = \frac{1}{T_{vz}} \int_{-T_{vz}/2}^{T_{vz}/2} p(t) e^{jk\omega_{vz}t} dt = \frac{\tau}{T_{vz}} \text{si}(k\pi\tau / T_{vz})$$

$$y(t) = x(t) \sum_k c_k e^{jk\omega_{vz}t} = \sum_k x(t) c_k e^{jk\omega_{vz}t} = \sum_k y_k(t)$$

$$y(\omega) = \sum_k y_k(\omega) \quad y_k(\omega) = \int y_k(t) e^{j\omega t} dt = \int x(t) c_k e^{jk\omega_{vz}t} e^{j\omega t} dt = c_k \int (x(t) e^{jk\omega_{vz}t}) e^{j\omega t} dt = c_k X(\omega - k\omega_{vz})$$

Vzorkovanie 2. Druhu



$$y(t) = q(t) * x'(t) = \sum_n x(nT_{vz})q(t - nT_{vz})$$

$$Y(\omega) = Q(\omega)X'(\omega) = Q(\omega) \sum_k X(\omega - k\omega_{vz})$$

MATLAB DEMO!!!